УДК 517.984

Н.Б.СЕВЕРЕНЧУК

СПЕКТРАЛЬНЫЕ И ФРЕДГОЛЬМОВЫ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ ВЗВЕШЕННОГО СРЕДНЕГО В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ с

Пусть A – нижняя треугольная матрица с элементами $a_{nk}=p_k/P_n$, $k\le n$, где $p_k\ge 0$, $p_0>0$, $P_n=\sum\limits_{k=0}^{n} p_k$, удовлетворяющими условию:

$$\lim p_n/P_n=\delta,\ 0<\delta<1. \tag{1}$$

Пусть оператор $A\in B(\mathbf{c})$ удовлетворяет условию (1). Тогда из работы Роудса [1] следует, что спектр такого оператора взвешенного среднего описывается следующим образом:

$$\sigma(A)=\{\lambda\in C: |\lambda-1/(2-\delta)|\le(1-\delta)/(2-\delta)\}\cup cl(\{\lambda\in C: \lambda=c_n=p_n/P_n, n=0,1,2\ldots\}). \tag{2}$$

Разобьем спектр $\sigma(A)$, определяемый правой частью формулы (2), на подмножества:

$$M_1:=\{\lambda\in C: |\lambda-1/(2-\delta)|<(1-\delta)/(2-\delta)\};\quad M_2:=\{\lambda\in C: |\lambda-1/(2-\delta)|=(1-\delta)/(2-\delta)\};$$
$$M_3:=\{\lambda=c_n=p_n/P_n, n=0,1,2\ldots, 0\le\lambda<\delta/(2-\delta)\}.$$

Лемма 1. Пусть $A\in B(\mathbf{c})$, матрица A удовлетворяет условию (1) и диагональ матрицы A не содержит бесконечного числа одинаковых элементов, тогда верны следующие утверждения:

a) Если $\lambda\in M_1$, то $nul(A-\lambda I)=0$, $def(A-\lambda I)=1$ и $ind(A-\lambda I)=-1$,

b) Если $\lambda\in M_2\setminus\{1,\delta/(2-\delta)\}$, то $nul(A-\lambda I)=0$, $def(A-\lambda I)=0$ и $ind(A-\lambda I)=0$,

c) Если $\lambda\in M_3$, то при $\lambda\ne 0$ $nul(A-\lambda I)=1$, $def(A-\lambda I)=1$ и $ind(A-\lambda I)=0$, а при $\lambda=0$, когда на диагонали стоит конечное число $c_j=0$, равное m, имеем $nul(A-\lambda I)=m$, $def(A-\lambda I)=m$ и $ind(A-\lambda I)=0$.

При доказательстве леммы рассматриваются три случая: 1) $\lambda\ne c_n$,

2) $\lambda=c_n\ne 0$ и существует m штук номеров j таких, что $c_j=c_n$, 3) $\lambda=0$ и существует m штук номеров j таких, что $c_j=0$. В зависимости от этого, а также принадлежности λ одному из множеств M_1, M_2 или M_3 получаем различное число линейно независимых решений уравнений $(A-\lambda I)x=0$, $(A^*-\lambda I)y=0$, где $x\in\mathbf{c}$, $y\in l_1$, для

этого используются свойства элементов матрицы A и признаки сходимости числовых рядов. Следует отметить, что предположение о том, что диагональ матрицы A не содержит бесконечного числа одинаковых элементов, существенно при нахождении решения уравнения $(A-\lambda I)x=0$ в случае $\lambda\in M_3$, $\lambda\neq 0$.

Лемма 2. Пусть $A\in B(\mathbf{c})$, матрица A удовлетворяет условию (1) и диагональ матрицы A не содержит бесконечного числа одинаковых элементов, тогда минимальный модуль Като $\gamma(A-\lambda I)$, определенный по формуле:

$$\gamma(A-\lambda I):=\inf_x \{\|(A-\lambda I)x\|/d(x,N(A-\lambda I)),\ x\in \mathbf{c}\setminus N(A-\lambda I)\}, \qquad (3)$$

где $d(x,N(A-\lambda I)):=\inf\limits_{y\in N(A-\lambda I)}\|x-y\|$, $\|\cdot\|$ – норма в банаховом пространстве **c**, положителен для $\lambda\in M_3$, т.е. $\gamma(A-\lambda I)>0$.

При доказательстве целесообразно рассмотреть следующие два случая:

1) $\lambda\in M_3\setminus\{0\}$ и 2) $\lambda=0$, т. к. для них используются различные методы построения оценки для минимального модуля Като (3). Для каждого случая, используя некоторые неравенства для оценки числителя и знаменателя минимального модуля Като $\gamma(A-\lambda I)$ (см. определение и свойства в [2]), получим необходимое утверждение. Заметим, что неравенство $\gamma(A-\lambda I)>0$ для минимального модуля Като ограниченного оператора $A-\lambda I$ эквивалентно замкнутости его области значений, т.е. $R(A-\lambda I)=\overline{R(A-\lambda I)}$ ([2], теорема IV.5.2).

Лемма 3. Пусть $A\in B(\mathbf{c})$, матрица A удовлетворяет условию (1) и диагональ матрицы A не содержит бесконечного числа одинаковых элементов, тогда для $\lambda\in M_1$ оператор $A^*-\lambda I$ сюръективен, т.е. $R(A^*-\lambda I)=l_1$.

Доказательство проводится прямыми вычислениями, используя выкладки, проделанные в работе [1], с помощью которых устанавливается разрешимость уравнения $(A^*-\lambda I)y=x\ \forall x\in l_1$.

Рассмотрим подмножества комплексной плоскости C, определяемые полуфредгольмовыми и фредгольмовыми характеристиками:

$$\Delta_1(A):=\{\lambda\in C:\ R(A-\lambda I)=\overline{R(A-\lambda I)}\};$$

$$\Phi^+(A):=\{\lambda\in\Delta_1(A):\mathrm{nul}(A-\lambda I)<\infty\};\quad \Phi^-(A):=\{\lambda\in\Delta_1(A):\mathrm{def}(A-\lambda I)<\infty\};$$

$$\Delta_2(A):=\Phi^+(A)\cup\Phi^-(A);\quad \Delta_3(A):=\Phi^+(A)\cap\Phi^-(A);\quad \Delta_4(A):=\{\lambda\in\Delta_3(A):\mathrm{ind}(A-\lambda I)=0\};$$

$$\Delta_5(A):=\{\lambda\in\Delta_4(A):\text{проколотая окрестность точки }\lambda\text{ лежит в }\rho(A)\}.$$

Существенными спектрами линейного оператора A называются подмножества спектра $\sigma(A)$, определяемые следующим образом:

$$\sigma_{ek}(A):=C\setminus\Delta_k(A),\ k=\overline{1,5}\,;\quad \sigma_{e2}^{\pm}(A):=C\setminus\Phi^{\pm}(A).$$

Каждое из множеств $\sigma_{ek}(A)$ ($k=\overline{1,5}$), $\sigma_{e2}^{\pm}(A)$ называется существенным спектром, причем, $\sigma_{e1}(A)$ – существенный спектр Голдберга, $\sigma_{e2}(A)$ – существенный спектр Като, $\sigma_{e2}^{+}(A)$ – существенный спектр Вольфа, $\sigma_{e2}^{-}(A)$ – существенный спектр Густафсона-Вейдмана, $\sigma_{e3}(A)$ – существенный спектр Фредгольма, $\sigma_{e4}(A)$ – существенный спектр Вейля или Шехтера, $\sigma_{e5}(A)$ – существенный спектр Браудера [3]. Их можно описать и другими эквивалентными способами. Очевидно, что рассмотренные существенные спектры удовлетворяют следующим включениям:

$$\sigma_{e1}(A)\subseteq\sigma_{e2}(A)\subseteq\sigma_{e2}^{\pm}(A)\subseteq\sigma_{e3}(A)\subseteq\sigma_{e4}(A)\subseteq\sigma_{e5}(A).$$

В доказательстве следующей теоремы используется таблица состояний Тейлора- Халберга [4]. В ней систематизирована информация о спектральных свойствах оператора T и его банахово сопряженного T^*. Если $T\in B(X)$, т.е. T – ограниченный оператор, действующий из X в X, то для $R(T)$ имеются три возможности: I. $R(\mathrm{T})=X$, II. $R(\mathrm{T})\neq X$, но $\overline{R(\mathrm{T})}=X$, III. $\overline{R(\mathrm{T})}\neq X$ и имеются три возможности для T^{-1}: 1. существует T^{-1} и он непрерывен, 2. существует T^{-1} и не непрерывен, 3. не существует T^{-1}. При комбинации указанных вариантов получаем девять различных условий (например, $\mathrm{T}\in\mathrm{I}$ и $\mathrm{T}\in 3$, тогда пишут $\mathrm{T}\in\mathrm{I}_3$). Если рассматривать упорядоченную пару $(\mathrm{T},\mathrm{T}^*)$, то упорядоченная пара условий называется состоянием пары $(\mathrm{T},\mathrm{T}^*)$. Всего таких состояний восемьдесят одно, но для банахова пространства X возможны ровно девять пар состояний: $(\mathrm{I}_1,\mathrm{I}_1)$, $(\mathrm{I}_3,\mathrm{III}_1)$, $(\mathrm{II}_2,\mathrm{II}_2)$, $(\mathrm{II}_2,\mathrm{III}_2)$, $(\mathrm{II}_3,\mathrm{III}_2)$, $(\mathrm{III}_1,\mathrm{I}_3)$, $(\mathrm{III}_2,\mathrm{II}_3)$, $(\mathrm{III}_2,\mathrm{III}_3)$, $(\mathrm{III}_3,\mathrm{III}_3)$, причем состояния $(\mathrm{II}_2,\mathrm{III}_2)$ и $(\mathrm{III}_2,\mathrm{III}_3)$ невозможны, если пространство X рефлексивно.

Теорема 1. Пусть оператор $A\in B(\mathbf{c})$, матрица A удовлетворяет условию (1) и диагональ матрицы A не содержит бесконечного числа одинаковых элементов, тогда для существенных спектров оператора A справедливы формулы:

$$\sigma_{e1}(A)=\sigma_{e2}(A)=\sigma_{e2}^{\pm}(A)=\sigma_{e3}(A)=\{\lambda\in C: |\lambda-1/(2-\delta)|=(1-\delta)/(2-\delta)\},$$
$$\sigma_{e4}(A)=\sigma_{e5}(A)=\{\lambda\in C: |\lambda-1/(2-\delta)|\leq(1-\delta)/(2-\delta)\}.$$

Доказательство: Воспользуемся определением существенных спектров через множества $\Delta_k(A)$, $k=\overline{1,5}$, $\Phi^{\pm}(A)$. Рассмотрим множество M_1. Из леммы1 следует, что $A^*-\lambda\mathrm{I}$ не инъективен, из леммы 3 вытекает, что $A^*-\lambda\mathrm{I}$ сюръективен, таким образом, $(A^*-\lambda\mathrm{I})\in\mathrm{I}_3$. Поэтому из таблицы состояний Тейлора-Халберга ([4], стр. 77) получаем включение $(A-\lambda\mathrm{I})\in\mathrm{III}_1$, т.е. существует непрерывный оператор $(A-\lambda\mathrm{I})^{-1}$, что влечет замкнутость области значений: $R(A-\lambda\mathrm{I})=\overline{R(A-\lambda\mathrm{I})}$, поэтому $M_1\subset\Delta_1(A)$. Из леммы1 непосредственно следует, что $M_1\subset\Phi^{\pm}(A)$, следовательно $M_1\subset\Delta_3(A)$, но $M_1\not\subset\Delta_4(A)$ и, таким образом, $M_1\subset\sigma_{e4}(A)\subset\sigma_{e5}(A)$.

Рассмотрим множество $M_2\backslash\{1, \delta/(2-\delta)\}$. Из леммы1 вытекает, что $A-\lambda\mathrm{I}$ и $A^*-\lambda\mathrm{I}$ инъективны, а поскольку в соответствии с таблицей состояний Тейлора-Халберга $(A-\lambda\mathrm{I})\in\mathrm{II}_2$, то $\overline{R(A-\lambda\mathrm{I})}=\mathbf{c}$, но $R(A-\lambda\mathrm{I})\neq\mathbf{c}$, поэтому $M_2\backslash\{1,\delta/(2-\delta)\}\not\subset\Delta_1(A)$. Из теоремы об устойчивости индекса линейного ограниченного оператора ([2], теорема IV.5.22) при $\lambda=1$, $\delta/(2-\delta)$ получаем, что $R(A-\lambda\mathrm{I})\neq\overline{R(A-\lambda\mathrm{I})}$, следовательно $M_2\not\subset\Delta_1(A)$.

Рассмотрим множество M_3. Из леммы 2 вытекает вложение $M_3\subset\Delta_1(A)$, из леммы1 следует, что $M_3\subset\Delta_4(A)$, а так как точки множества M_3 – изолированные точки спектра, то $M_3\subset\Delta_5(A)\subset\Delta_4(A)\subset\Delta_3(A)\subset\Delta_2(A)$, поэтому $M_3\not\subset\sigma_{ek}(A)$, $k=\overline{1,5}$ и $M_3\not\subset\sigma_{e2}^{\pm}(A)$.

Пусть теперь $A\in B(\mathbf{c})$ – нижняя треугольная матрица, у которой

$$c_0=1,\ c_{2n}=1/p,\ c_{2n-1}=1/q,\ n>0,\ \text{ где } 1<p<q. \qquad (4)$$

Из работы Роудса [1] спектр такого оператора задается формулой:

$$\sigma(A)=\{\lambda\in C: (p-1)(q-1)|\lambda|^2\geq|1-p\lambda||1-q\lambda|\}.$$

Теорема 2. Пусть оператор $A\in B(\mathbf{c})$, матрица A удовлетворяет условию (4), тогда для существенных спектров оператора A справедливо:

$$\sigma_{e1}(A)=\sigma_{e2}(A)=\sigma_{e2}^{\pm}(A)=\sigma_{e3}(A)=\{\lambda\in C: (p-1)(q-1)|\lambda|^2=|1-p\lambda||1-q\lambda|\},$$
$$\sigma_{e4}(A)=\sigma_{e5}(A)=\{\lambda\in C: (p-1)(q-1)|\lambda|^2\geq|1-p\lambda||1-q\lambda|\}.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1. Рассматриваются подмножества спектра $\sigma(A)$:

$M_1=\{\lambda\in C: (p-1)(q-1)|\lambda|^2>|1-p\lambda||1-q\lambda|\}$, $M_2=\{\lambda\in C: (p-1)(q-1)|\lambda|^2=|1-p\lambda||1-q\lambda|\}$, для которых вычисляются числовые характеристики оператора $A-\lambda\mathrm{I}$.

Граница этого спектра представляет собой овал или овалы Кассини. Если $\sqrt{(1-p)(1-q)}$=(q-p)/2, то спектр является объединением двух областей, границы которых пересекаются в точке оси x между 0 и 1, при $\sqrt{(1-p)(1-q)}$>(q-p)/2 спектр – это связная область, когда $\sqrt{(1-p)(1-q)}$<(q-p)/2 спектральное множество состоит из двух непересекающихся областей.

Частный случай, когда выполняется условие (1), задается матрицей *A* с элементами: $a_{nk}=0$, $k>n$, $a_{nk}=q^k/\sum_{i=0}^{n} q^i$ при $k\le n$, где $q=1/(1-\delta)$.

Часть результатов об указанных выше, а также полубраудеровских существенных спектрах оператора взвешенного среднего в пространствах l_p, $1\le p\le\infty$, и **с** анонсирована в работе [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Rhoades B.E.*** The fine spectra for weighted mean operators // Pacific journal of mathematics. – 1983. – Vol.104, №1. – P.219-230.
2. ***Като Т.*** Теория возмущений линейных операторов. – М., 1972.
3. ***Еровенко В.А.*** Аналоги классической теоремы Вейля об инвариантности существенного спектра // Доклады НАН Беларуси. – 1998. – Т.42, №2. – С.13–17.
4. ***Тейлор А.Е., Халберг Ч.Дж.А.*** Общие теоремы об ограниченном линейном операторе и его сопряженном // Сборник переводов Математика. – 1959. – Т.3, №1. – С.69–89.
5. ***Северенчук Н.Б.*** Существенные спектры операторов взвешенного среднего в банаховых пространствах последовательностей // Тезисы докладов международной математической конференции "Еругинские чтения-VI". – Гомель, 1999. – Ч.1. – с.167-168.