УДК 514.764.227

В.И.МАРМАЗЕЕВ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ НЕТРИВИАЛЬНЫХ ПРИВОДИМЫХ Σ-ПРОСТРАНСТВ

Приводимые Σ-пространства, введенные в работах [1] и [2], являются обобщением пространств с регулярным умножением [3] и, в частности, симметрических пространств [4]. А именно, любое пространство с регулярным умножением является приводимым Σ-пространством с циклической группой Σ, а для симметрического пространства $\Sigma = Z_2$. Однако ни в одной из работ посвященных приводимым Σ-пространствам фактически не указаны примеры нетривиальных Σ-пространств, т.е. приводимых Σ-пространств не обладающих структурой пространства с регулярным умножением, согласованной с его Σ-структурой.

Целью настоящей заметки является построение класса нетривиальных приводимых Σ-пространств. Для простоты мы ограничимся случаем однородных приводимых Σ-пространств, порожденных простыми компактными группами Ли G и компактными группами их внутренних автоморфизмов Σ. Через Σ также будем обозначать соответствующую группу автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{R}$ группы G.

Итак, пусть G - простая, связная, компактная группа Ли, $\mathfrak{R} = L(G)$ -ее алгебра Ли, $\Sigma \subset AdG$ -связная, компактная группа Ли внутренних автоморфизмов. Тогда однородное пространство $M = G/(G^{\Sigma})_o$, согласно [2], является приводимым Σ-пространством. При этом пусть $\mathfrak{R} = \mathfrak{I} \oplus \aleph$ - редуктивное разложение алгебры Ли $\mathfrak{R}$, где $\mathfrak{I} = \mathfrak{R}^{\Sigma}$ - подалгебра неподвижных точек относительно группы Σ, а $\aleph$ - ортогональное дополнение к $\mathfrak{I}$ в $\mathfrak{R}$ относительно формы Киллинга. Подпространство $\aleph$ естественным образом отождествляется с тройной Σ-алгеброй Ли T_oM пространства M, где $o = (G^{\Sigma})_o$ [5], при этом бинарная и тернарная операции в обозначениях редуктивного разложения выражаются следующим образом

$$X * Y = [X,Y]_{\aleph}, [X,Y,Z] = -[[X,Y]_{\mathfrak{I}}, Z], \tag{1}$$

здесь $[X,Y]_{\aleph}$ и $[X,Y]_{\mathfrak{I}}$ - проекции вектора $[X,Y]$ на подпространства $\aleph$ и $\mathfrak{I}$ соответственно.

Предположим, что рассматриваемое Σ-пространство M обладает также структурой пространства с регулярным умножением согласованной с его Σ-структурой. Последнее означает, что для любых $p,x,y \in M$ и $\sigma \in \Sigma$ справедливо равенство $p \circ \mu(x,\sigma,y) = \mu(p \circ x, \sigma, p \circ y)$, где $\circ$ - регулярное умножение, а μ - Σ - умножение. При этом заметим, что т.к. $M = G/(G^{\Sigma})_o$ - связное риманово пространство, то можно считать, что это умножение - умножение минимального конечного порядка [6]. Следовательно, согласно [7], тройная Σ-алгебра Ли $\aleph$ обладает автоморфизмом φ' конечного порядка, удовлетворяющим следующим условиям:

$$1^{\circ} - Ker(\varphi' - id)|_{\aleph} = \{0\};\ \ 2^{\circ} - [\varphi'(X), \varphi'(Y), Z] = [X,Y,Z].$$

При указанных условиях имеет место следующее утверждение

Предложение 1 *Пусть G - простая связная компактная группа Ли, Σ - связная компактная группа Ли ее внутренних автоморфизмов, а приводимое Σ-пространство $M = G/(G^{\Sigma})_o$ обладает структурой пространства с регулярным умножением, согласованной с его Σ-структурой. Тогда существует такой автоморфизм φ алгебры Ли $\mathfrak{R} = L(G)$, что $\mathfrak{R}^{\varphi} = \mathfrak{R}^{\Sigma}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{R}$ - простая алгебра Ли, $\mathfrak{R}=\Im\oplus\aleph$ - ее редуктивное разложение, т.е. справедливы следующие включения

$$[\Im,\Im]\subset\Im,\ [\Im,\aleph]\subset\aleph. \qquad (2)$$

Тогда из простоты алгебры Ли $\mathfrak{R}$ следует, что $\mathfrak{R}=[\aleph,\aleph]_{\Im}\oplus\aleph$. В самом деле, из тождества Якоби и (2) следует, что для любых $H\in\Im$ и $X,Y\in\aleph$ справедливо равенство

$$[H,[X,Y]_{\Im}]=[X,[H,Y]]_{\Im}-[Y,[H,X]]_{\Im}. \qquad (3)$$

Если $H=[U,V]_{\Im}$ при $U,V\in\aleph$, то равенство (3) перепишится в виде

$$[[X,Y]_{\Im},[U,V]_{\Im}]=[[[U,V]_{\Im},Y],X]_{\Im}-[[[U,V]_{\Im},X],Y]_{\Im}. \qquad (4)$$

Таким образом из (2) - (4) следует, что $\mathfrak{R}(\aleph)=[\aleph,\aleph]_{\Im}\oplus\aleph$ - идеал алгебры Ли $\mathfrak{R}$, следовательно $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}(\aleph)$. Также из (4) следует, что подпространство $\Im_1=\{H\in\Im \mid [H,\aleph]=0\}$ - идеал алгебры Ли $\mathfrak{R}$, следовательно $\Im_1=\{0\}$. А тогда из свойства 2° следует, что

$$[\varphi'(X),\varphi'(Y)]_{\Im}=[X,Y]_{\Im}. \ (5)$$

Определим эндоморфизм φ алгебры Ли $\mathfrak{R}$ следующим образом: пусть $H\in\Im$ и $X,\in\aleph$, тогда $\varphi(H+X)=H+\varphi'(X)$. Следовательно для $X,Y,Z\in\aleph$, согласно (5), имеем: $\varphi([X,Y])=[X,Y]_{\Im}+\varphi'([X,Y]_{\aleph})=$

$[\varphi'(X),\varphi'(Y)]_{\Im}+\varphi'(X*Y)=[\varphi'(X),\varphi'(Y)]_{\Im}+\varphi'(X)*\varphi'(Y)=$

$[\varphi(X),\varphi(Y)]_{\Im}+[\varphi(X),\varphi(Y)]_{\aleph}=[\varphi(X),\varphi(Y)]$ и

$\varphi([[X,Y]_{\Im},Z])=\varphi'([X,Y,Z])=[\varphi'(X),\varphi'(Y),\varphi'(Z)]=$

$[[\varphi'(X),\varphi'(Y)]_{\Im},\varphi'(Z)]=[[X,Y]_{\Im},\varphi(Z)]=[\varphi([X,Y]_{\Im}),\varphi(Z)]$.

Таким образом φ - автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{R}$.

Пусть $H+X\in\mathfrak{R}^{\varphi}$ тогда $\varphi(H+X)=H+\varphi'(X)=H+X$, следовательно $(\varphi'-id)(X)=0$, а согласно 1°, $X=0$, т.е. $\mathfrak{R}^{\varphi}=\Im$.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{R}$ - простая компактная алгебра Ли, а Σ - группа Ли внутренних автоморфизмов $\Sigma\subset Int\mathfrak{R}$ для которой существует внутренний автоморфизм φ минимального конечного порядка k такой, что $\mathfrak{R}^{\varphi}=\mathfrak{R}^{\Sigma}$, причем группа Σ максимально возможная. Тогда $\varphi\in\Sigma$, а группа Σ - абелева.*

Доказательство. Как известно [4], внутренний автоморфизм φ оставляет поточечно неподвижной подалгебру Картана $\wp\subset\mathfrak{R}$. Пусть R - корневая система комплексной оболочки $\mathfrak{R}_C$ относительно подалгебры Картана $\wp_C$, $B=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ - базис системы R, $\mu_0=\sum_{i=1}^{n}m_i\alpha_i$ - максимальный корень, а $\mathfrak{R}_{\alpha}$ - корневое подпространство в $\mathfrak{R}_C$, соответствующее корню α [4].

Обозначим через P симплекс пространства $\wp^* = \sqrt{-1}\wp$, определяемый неравенствами: $\mu_0 < 1$ и $\alpha_i > 1$, $i = \overline{1,n}$, вершины которого H_i определяются равенствами: $H_0 = 0$; $\alpha_i(H_j) = \frac{1}{m_j}\delta_{ij}$, $i = \overline{1,n}$.. Тогда, с точностью до сопряженности, имеем, что $\varphi = \exp ad(\sqrt{-1}\cdot 2\pi X)$, где $X = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{r} m_{i_j} H_{i_j}$.

Положим $R_X = \{\alpha \in R \mid \alpha(X) \in Z\}$, тогда, согласно [4],

$$\mathfrak{R}^{\varphi} = \wp + \sum_{\alpha \in R_X} \mathfrak{R} \cap (\mathfrak{R}_\alpha + \mathfrak{R}_{-\alpha}). \tag{6}$$

Пусть $\sigma \in \Sigma$, тогда $\mathfrak{R}^{\Sigma} \subset \mathfrak{R}^{\sigma}$ и следовательно подалгебра Картана $\wp$ поточечно неподвижна относительно σ, поэтому $\sigma = \exp ad(2\pi\sqrt{-1}Y)$, где $Y = \sum_{i=1}^{n} s_i H_i \in \wp^*$. Заметим попутно, что из (6) следует, что $R_X \subset R_Y$. Если $i \neq i_j$, $j = \overline{1,r}$, то $\alpha_i(X) = \alpha_i(\sum_{j=1}^{r} t_{i_j} H_{i_j}) = \sum_{j=1}^{r} t_{i_j}\alpha_i(H_{i_j}) = 0$, т.е. $\alpha_i \in R_X \subset R_Y$.

Таким образом $\alpha_i(Y) = \alpha_i(\sum_{j=1}^{n} s_j H_j) = \sum_{j=1}^{n} s_j \alpha_i(H_j) = \frac{s_i}{m_i} = z_i \in Z$, т.е. $s_i = z_i \cdot m_i$, а значит $Y = \sum_{j=1}^{r} s'_{i_j} H_{i_j} + \sum_{i=1}^{n} \overline{s}_i H_i$, где $\overline{s_i} = z_i \cdot m_i$, $s'_{i_j} \in [0, m_{i_j})$. Но поскольку вектор $\sum_{i=1}^{n} \overline{s}_i H_i$ принадлежит центральной решетке $\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\exp^{-1}(Z(G))$, где G - связная односвязная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{R}$, то

$$\sigma = \exp(ad(2\pi\sqrt{-1}\sum_{j=1}^{r} s_{i_j} H_{i_j}),\ 0 \le s_{i_j} < m_{i_j}.$$

Пусть с другой стороны $Y = \sum_{j=1}^{r} s_{i_j} H_{i_j}$ $0 \le s_{i_j} < m_{i_j}$ и $\sigma = \exp ad(2\pi\sqrt{-1}Y)$. Рассмотрим сначала случай, когда $\mu \notin R_X$. Поскольку $X \in P$, то $\mu(X) < 1$, следовательно

$$\mu(X) = \mu(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{r} m_{i_j} H_{i_j}) = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{r} m_{i_j}\mu(H_{i_j}) =$$

$$= \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{r} m_{i_j}\sum_{s=1}^{n} m_s \alpha_s(H_{i_j}) = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{r} m_{i_j} < 1, \text{ т.е.}$$

$$\sum_{j=1}^{r} m_{i_j} < k. \tag{7}$$

Значит, если $\alpha \in R_X$, то

$\alpha(X) = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{r} m_{i_j}\alpha(H_{i_j}) = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{r} m_{i_j}\sum_{s=1}^{n} n_s\alpha_s(H_{i_j}) = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{r} n_{i_j} \in Z$. А т.к.

$0 \le n_{i_j} < m_{i_j}$, то из (7) следует, что и $\sum_{j=1}^{r} n_{i_j} < k$, следовательно $n_{i_j} = 0$,

$j = \overline{1,r}$. Таким образом для любого $Y = \sum_{j=1}^{r} s_{i_j} H_{i_j}$ $0 \le s_{i_j} < m_{i_j}$ и любого

$\alpha \in R_X$ имеем

$$\alpha(Y) = \sum_{j=1}^{r} s_{i_j}\alpha(H_{i_j}) = \sum_{j=1}^{r} s_{i_j}\sum_{k=1}^{n} n_k\alpha_k(H_{i_j}) = \sum_{j=1}^{r} s_{i_j}\sum_{k=1}^{n} n_k\frac{\delta_{ki_j}}{m_{i_j}} = \sum_{j=1}^{r} s_{i_j}\cdot 0 = 0 \in Z,$$

т.е. $R_X \subset R_Y$ и $\mathfrak{R}^{\varphi} \subset \mathfrak{R}^{\sigma}$, где $\sigma = \exp ad(2\pi\sqrt{-1}Y)$. Итак

$\Sigma = \{\sigma = \exp ad(2\pi\sqrt{-1}\sum_{j=1}^{r} s_{i_j} H_{i_j} \mid 0 \le s_{i_j} < m_{i_j}\}$, т.е. Σ - тор размерности r.

Пусть теперь $\mu \in R_X$, откуда $\mu \in R_Y$, следовательно $\mu(Y) = \mu(\sum_{j=1}^{r} s_{i_j} H_{i_j}) = \sum_{j=1}^{r} s_{i_j} \in Z$. В частности для $X = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{r} m_{i_j} H_{i_j} \in P$, имеем, что $\mu(X) = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{r} m_{i_j} = 1$, следовательно

$$\sum_{j=1}^{r} m_{i_j} = k. \tag{8}$$

Поэтому для произвольного $\alpha \in R_X$ получаем, что $\alpha(X) = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{r} n_{i_j} = \sum_{j=1}^{r} n_{i_j} / \sum_{j=1}^{r} m_{i_j} \in Z$. А т.к. $0 \le n_{i_j} < m_{i_j}$, то либо все $n_{i_j} = 0$, либо все $n_{i_j} = m_{i_j}$, $j = \overline{1,r}$. Таким образом, если $Y = \sum_{j=1}^{r} s_{i_j} H_{i_j}$, где $0 \le s_{i_j} < m_{i_j}$ и $\sum_{j=1}^{r} m_{i_j} \in Z$, то для $\alpha \in R_X$ имеем, что

$\alpha(Y) = \sum_{j=1}^{r} s_{i_j}\alpha(H_{i_j}) = \sum_{j=1}^{r} s_{i_j}\frac{n_{i_j}}{m_{i_j}}$, т.е. либо $\alpha(Y) = 0$, либо $\alpha(Y) = \sum_{j=1}^{r} s_{i_j} \in Z$.

Следовательно $R_X \subset R_Y$ и

$$\Sigma = \{\sigma = \exp ad(2\pi\sqrt{-1}\sum_{j=1}^{r} s_{i_j} H_{i_j} \mid 0 \le s_{i_j} < m_{i_j}, \sum_{j=1}^{r} s_{i_j} \in Z\}.$$

Заметим, что из простоты алгебры $\mathfrak{R}$ следует биективность отображения: $Y \to \exp ad(2\sqrt{-1}\pi Y)$, следовательно группа Σ - абелева с числом связных компонент равным $HOD(m_{i_1}, ..., m_{i_r})$.

Следствие 1. Однородное приводимое Σ - пространство $M = G/(G^{\Sigma})_o$, порожденное простой связной компактной группой Ли G и неабелевой связной компактной группой Σ ее внутренних автоморфизмов является нетривиальным.

Из доказательства теоремы 1 получаем также

Следствие 2. В условиях теоремы 1 в случае, когда $\mu \notin R_X$, $Z(\mathfrak{R}^{\varphi}) = \{\sqrt{-1} \cdot \sum_{j=1}^{r} s_{i_j} H_{i_j} \mid s_{i_j} \in R\}$, а в случае, когда $\mu \in R_X$ - $Z(\mathfrak{R}^{\varphi}) = \{\sqrt{-1} \cdot \sum_{j=1}^{r} s_{i_j} H_{i_j} \mid s_{i_j} \in R, \sum_{j=1}^{r} s_{i_j} = 0\}$.

Рассмотрим теперь те естественные условия, которым в нашем случае должна удовлетворять подалгебра Ли $\mathfrak{R}^{\Sigma}$.

Пусть $L(\Sigma) \subset ad\mathfrak{R}$ - алгебра Ли группы Σ. Так как для простой алгебры Ли $\mathfrak{R} \cong ad\mathfrak{R}$, то в $\mathfrak{R}$ существует такая подалгебра $\mathfrak{R}_{\Sigma}$, что $L(\Sigma) = ad(\mathfrak{R}_{\Sigma})$. Так как $\mathfrak{R}^{\Sigma}$ и $\mathfrak{R}_{\Sigma}$ - подалгебры простой компактной алгебры Ли $\mathfrak{R}$, то, согласно [8,стр.115], они являются прямыми суммами своих центров и полупростых компактных идеалов:

$$\mathfrak{R}^{\Sigma} = \mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{I}_1,\ \mathfrak{R}_{\Sigma} = \mathfrak{R}_2 \oplus \mathfrak{I}_2, \text{ где } \mathfrak{I}_1 = Z(\mathfrak{R}^{\Sigma}), \text{ а } \mathfrak{I}_2 = Z(\mathfrak{R}_{\Sigma}).$$

Из определения $\mathfrak{R}_{\Sigma}$ следует, что $X \in \mathfrak{R}_{\Sigma}$ тогда и только тогда, когда $\exp adtX \in \Sigma$ для любого $t \in R$. Следовательно для любого $Y \in \mathfrak{R}^{\Sigma}$ справедливо равенство $(\exp adtX)(Y) = Y$, дифференцируя которое по t, получаем при $t = 0$, что $[X, Y] = 0$, т.е. $Y \in Z_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R}_{\Sigma})$ или $\mathfrak{R}^{\Sigma} \subset Z_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R}_{\Sigma})$. Пусть с другой стороны $Y \in Z_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R}_{\Sigma})$, следовательно для любого $X \in \mathfrak{R}_{\Sigma}$ имеем, что $(\exp adX)(Y) = Y$,а т.к. группа Σ связна, то $\sigma(Y) = Y$ и для любого $\sigma \in \Sigma$, т.е. $Y \in \mathfrak{R}^{\Sigma}$, таким образом

$$\mathfrak{R}^{\Sigma} = Z_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R}_{\Sigma}). \tag{9}$$

Отсюда следует, что $\mathfrak{I}_2 \subset \mathfrak{R}^{\Sigma}$, а значит $\mathfrak{I}_2 \subset \mathfrak{I}_1$. Отметим также, что подалгебра Ли $\mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{I}_1 \oplus \mathfrak{R}_2$ - прямая сумма, так как в противном случае из (9) следует, что непустое пересечение $\mathfrak{R}_2 \cap \mathfrak{R}^{\Sigma}$ является нетривиальным центром полупростой алгебры Ли $\mathfrak{R}_2$, что невозможно. Итак для подалгебр $\mathfrak{R}^{\Sigma} = \mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{I}_1$ и $\mathfrak{R}_{\Sigma} = \mathfrak{R}_2 \oplus \mathfrak{I}_2$ выполняются следующие условия

$$\mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{I}_1 \oplus \mathfrak{R}_2 \text{ - прямая сумма; } \mathfrak{I}_2 \subset \mathfrak{I}_1. \tag{10}$$

Пусть обратно $\overline{\mathfrak{R}_1} = \mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{I}_1$, и $\overline{\mathfrak{R}_2} = \mathfrak{R}_2 \oplus \mathfrak{I}_2$ - подалгебры простой компактной алгебры Ли $\mathfrak{R}$, такие, что $\overline{\mathfrak{R}_1} = Z_{\mathfrak{R}}(\overline{\mathfrak{R}_2})$ и справедливо условие (10). Пусть Σ - подгруппа Ли группы $Int\mathfrak{R}$, такая, что $L(\Sigma) = ad\overline{\mathfrak{R}_2}$. Тогда для любого σ элемента группы Σ, $\sigma=\prod_{i=1}^{r}\exp adX_i$, где $X_i\in\overline{\mathfrak{R}_2}$, и любого $Y\in\overline{\mathfrak{R}_1}$ очевидно, что $\sigma(Y)=Y$, т.е. $\overline{\mathfrak{R}_1}\subset\mathfrak{R}^{\Sigma}$. С другой стороны, пусть $Y\in\mathfrak{R}^{\Sigma}$, тогда для любого $X\in\overline{\mathfrak{R}_2}$, $\sigma_t=exp\,adtX\in\Sigma$, следовательно $\sigma_t(Y)=Y$. Дифференцируя это равенство по t, при $t=0$ получаем, что $[X,Y]=0$, следовательно $Y\in Z_{\mathfrak{R}}(\overline{\mathfrak{R}_2})=\overline{\mathfrak{R}_1}$, т.е. $\mathfrak{R}^{\Sigma}\subset\overline{\mathfrak{R}_1}$, а значит $\overline{\mathfrak{R}_1}=\mathfrak{R}^{\Sigma}$.

Таким образом условия (9) и (10) являются необходимыми и достаточными для выполнения равенств $\overline{\mathfrak{R}_1}=\mathfrak{R}^{\Sigma}$ и $L(\Sigma)=ad\overline{\mathfrak{R}_2}$.

Укажем теперь способ построения пар подалгебр $(\overline{\mathfrak{R}_1},\overline{\mathfrak{R}_2})$ простой компактной алгебры Ли $\mathfrak{R}$, удовлетворяющих условиям (9) и (10), а тем самым и способ построения класса нетривиальных Σ - пространств.

Пусть $\mathfrak{R}$ - простая компактная алгебра Ли, φ - ее внутренний автоморфизм минимального конечного порядка, представимый в некоторой корневой системе R в виде $\varphi=\exp(ad2\pi\sqrt{-1}Z)$, где $Z=\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{r}m_{i_j}H_{i_j}$, а $\mathfrak{R}^{\varphi}=\mathfrak{I}\oplus\mathfrak{R}_1\oplus\ldots\oplus\mathfrak{R}_k$ - соответствующая подалгебра неподвижных элементов, где $\mathfrak{I}=Z(\mathfrak{R}^{\varphi})$, а $\mathfrak{R}_i$ - простые идеалы алгебры $\mathfrak{R}^{\varphi}$ и $k\geq 2$. Обозначим через $\overline{\mathfrak{R}_1}=\mathfrak{I}\oplus\mathfrak{R}_{n_1}\oplus\ldots\oplus\mathfrak{R}_{n_s}$ и $\overline{\mathfrak{R}_2}=\mathfrak{I}\oplus\mathfrak{R}_{m_1}\oplus\ldots\oplus\mathfrak{R}_{m_l}$, где непустые множества $\{n_1,\ldots,n_s\}$ и $\{m_1,\ldots,m_l\}$ не пересекаются и их объединение равно множеству {1,…,2}.

Из определения $\overline{\mathfrak{R}_1}$ и $\overline{\mathfrak{R}_2}$ ясно, что $\overline{\mathfrak{R}_1}\subset Z_{\mathfrak{R}}(\overline{\mathfrak{R}_2})$. Пусть теперь $X\in Z_{\mathfrak{R}}(\overline{\mathfrak{R}_2})$, если предположить, что $X\in\mathfrak{R}^{\varphi}$, то $X=H+X_1+X_2$, где $H\in\mathfrak{I}$, $X_1\in[\overline{\mathfrak{R}_1},\overline{\mathfrak{R}_1}]$ и $X_2\in[\overline{\mathfrak{R}_2},\overline{\mathfrak{R}_2}]$. Следовательно для любого $Y\in[\overline{\mathfrak{R}_2},\overline{\mathfrak{R}_2}]$ имеем $[Y,X]=[Y,H]+[Y,X_1]+[Y,X_2]=[Y,X_2]=0$, а тогда из полупростоты подалгебры $[\overline{\mathfrak{R}_2},\overline{\mathfrak{R}_2}]$ получаем, что $X_2=0$ и $X\in\mathfrak{R}_1$. Поэтому рассмотрим теперь случай, когда $X\in Z_{\mathfrak{R}}(\overline{\mathfrak{R}_2})$ и $X\notin\mathfrak{R}^{\varphi}$. Это означает, что в разложении вектора $X=H+\sum_{\alpha\in R}a_\alpha X_\alpha+b_\alpha X_{-\alpha}$ присутствуют векторы X_{α^j} и $X_{-\alpha^j}$ такие, что в разложении корня $\alpha^j=\sum_{i=1}^{n}n_i^j\alpha_i$ по базисным корням выполняются неравенства $n_{i_p}^j\neq 0$ для тех корней α_{i_p}, соответствующие которым векторы H_{i_p} присутствуют в разложении вектора $Z=\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{r}m_{i_j}H_{i_j}$.

Рассмотрим сначала случай, когда максимальный корень μ не принадлежит множеству R_Z, тогда, согласно следствию 2 теоремы 1 $Z(\mathfrak{R}^{\varphi})=\mathfrak{I}^r=gen\{\sqrt{-1}H_{i_1},...,\sqrt{-1}H_{i_r}\}\subset\overline{\mathfrak{R}_i};\ j=1,2.$ Следовательно $[H_{i_p},X]=$

$$\sum_{\alpha\in R}(a_\alpha[H_{i_p},X_\alpha]+b_\alpha[H_{i_p},X_{-\alpha}])=\sum_{\alpha\in R}(a_\alpha\alpha(H_{i_p})X_\alpha-b_\alpha\alpha(H_{i_p})X_{-\alpha})=$$

$$=\sum_{j=1}^{k}\alpha^j(H_{i_p})(a_{\alpha^j}X_{\alpha^j}-b_{\alpha^j}X_{-\alpha^j})=$$

$$=\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}n_i^j\alpha_i(H_{i_p})(a_{\alpha^j}X_{\alpha^j}-b_{\alpha^j}X_{-\alpha^j})=\quad\sum_{j=1}^{k}\frac{n_{i_p}^j}{m_{i_p}}(a_{\alpha^j}X_{\alpha^j}-b_{\alpha^j}X_{-\alpha^j})=0.$$

А т.к. $n_{i_p}^j\neq 0$, то $a_{\alpha^j}=b_{\alpha^j}=0$, поскольку векторы X_α - линейно независимы. Следовательно $X\in\mathfrak{R}^{\varphi}$, а значит $X\in\overline{\mathfrak{R}_1}$, т.е. $Z_{\mathfrak{R}}(\overline{\mathfrak{R}_2})\subset\overline{\mathfrak{R}_1}$, откуда получаем, что $Z_{\mathfrak{R}}(\overline{\mathfrak{R}_2})=\overline{\mathfrak{R}_1}$. Поскольку в данном случае $\overline{\mathfrak{R}_1}$ и $\overline{\mathfrak{R}_2}$ равноправны, то и $Z_{\mathfrak{R}}(\overline{\mathfrak{R}_1})=\overline{\mathfrak{R}_2}$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\mu\in R_Z$, ограничившись случаем, когда хотябы одно из чисел m_{i_j} в разложении вектора $Z=\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{r}m_{i_j}H_{i_j}$, определяющего автоморфизм φ, равно 1. Согласно следствию 2 теоремы 1 $H_o=\sum_{k=1}^{r}s_{i_k}H_{i_k}\in Z(\mathfrak{R}^{\varphi})$ только, если $\sum_{k=1}^{r}s_{i_k}=0$. Тогда для такого H_o имеем:

$$[H_o,X]=\sum_{\alpha\in R}\alpha(H_o)(a_\alpha X_\alpha-b_\alpha X_{-\alpha})=$$

$$=\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}n_i^j\alpha_i(\sum_{l=1}^{r}s_{i_l}H_{i_l})(a_{\alpha^j}X_{\alpha^j}-b_{\alpha^j}X_{-\alpha^j})=$$

$$=\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{l=1}^{r}n_i^js_{i_l}\ \frac{\delta_{ij}}{m_{i_l}}(a_{\alpha^j}X_{\alpha^j}-b_{\alpha^j}X_{-\alpha^j})=$$

$$=\sum_{j=1}^{k}(\sum_{l=1}^{r}\frac{n_{i_l}^j}{m_{i_l}}s_{i_l})(a_{\alpha^j}X_{\alpha^j}-b_{\alpha^j}X_{-\alpha^j})=0$$

Если предположить, что a_{α^j} и $b_{\alpha^j}\neq 0$, то получаем следующую систему однородных линейных уравнений

$$\sum_{l=1}^{r}s_{i_l}=0;\ \sum_{l=1}^{r}\frac{n_{i_l}^j}{m_{i_l}}s_{i_l}=0;\ j=\overline{1,k}. \tag{11}$$

Так как эта система, согласно следствию 2 теоремы 1, имеет пространство решений размерности $r-1$, то ранг системы (11) равен 1, следовательно все ее уравнения пропорциональны уравнению $\sum_{l=1}^{r}s_{i_l}=0$, т.е. $\frac{n_{i_l}^j}{m_{i_l}}=\frac{n_{i_k}^j}{m_{i_k}}<1$

для любых l и k, т.к. хотя бы один раз выполняется неравенство $n_{i_l}^j < m_{i_l}^j$. А так как по предположению хотя бы одно из чисел $m_{i_j} = 1$, то все $n_{i_l}^j = 0$, что противоречит предположению $n_{i_k}^j \neq 0$. Таким образом и в этом случае $X \in \mathfrak{R}^{\varphi}$, т.е. $Z_{\mathfrak{R}}(\overline{\mathfrak{R}}_2) = \overline{\mathfrak{R}}_1$. В частности, это верно для любого автоморфизма алгебры типа A_l. В случае, когда $m_{i_j} > 1$, а $0 < n_{i_l}^j < m_{i_l}^j$ наше утверждение тоже верно, но требует слишком большого перебора всех возможных случаев, поэтому мы ограничимся следующим примером.

Пример. Пусть $G = Sp(n)$ - симплектическая группа с внутренним автоморфизмом $\varphi : Sp(n) \to Sp(n) : A \to TAT^{-1}$,

где $T = (e^{-i\alpha_1} I_{p_1}, e^{-i\alpha_1} I_{p_1}, e^{i\alpha_2} I_{p_2}, e^{-i\alpha_2} I_{p_2})$, $p + q = n$. Отсюда следует, что $G^{\varphi} = \{A \in Sp(n) \mid A = diag(V_1, V_2), V_i = diag(U_i, \overline{U}_i), U_1 \in U(p), U_2 \in U(q)\}$,

а ее алгебра Ли $L(G^{\varphi})$ имеет вид

$$L(G^{\varphi}) = \{diag(S_1, S_2) \mid S_i = diag(Q_i, \overline{Q}_i), Q_i' + \overline{Q}_i = 0, tr(S_1 + S_2) = 0\} \cong \mathfrak{I} \oplus A_{p-1} \oplus A_{q-1},$$

где центр $\mathfrak{I}$ имеет вид $\mathfrak{I} = \{it(diag(I_{2p}, -\frac{p}{q} I_{2q})\}$. Следовательно группа Σ внутренних автоморфизмов, соответствующая алгебре Ли $ad(\mathfrak{I} \oplus A_{q-1})$, состоит из внутренних сопряжений элементами вида $g = diag(\varepsilon I_{2p}, L, \overline{L})$, где $L \in U(q)$.

$$G^{\Sigma} = \{A = diag(N, \overline{N}, \varepsilon I_{2q}) \mid A \in Sp(n)\} \text{ и } L(G^{\Sigma}) = \mathfrak{I} \oplus A_{p-1}.$$

Таким образом приводимое $\Sigma-$ пространство $Sp(n)/(Sp(n))^{\Sigma}$ является нетривиальным приводимым $\Sigma-$ пространством.

Подводя итог нашим рассуждениям, можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 2 Пусть G -связная простая компактная группа Ли, $\mathfrak{R} = L(G)$ - ее алгебра, а φ - такой ее внутренний автоморфизм, что подалгебра $\mathfrak{R}^{\varphi} = \mathfrak{I} \oplus \mathfrak{R}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{R}_k$ - прямая сумма своего центра $\mathfrak{I}$ и не менее двух простых идеалов $\mathfrak{R}_i$. Пусть также $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{I} \oplus \mathfrak{R}_{n_1} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{R}_{n_s}$ и $\mathfrak{R}_2 = \mathfrak{I} \oplus \mathfrak{R}_{m_1} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{R}_{m_l}$, где непустые множества $\{n_1, \ldots, n_s\}$ и $\{m_1, \ldots, m_l\}$ не пересекаются и их объединение равно множеству {1,…,k}. Обозначим через Σ связную группу внутренних автоморфизмов группы G алгеброй Ли которой является алгебра $ad(\mathfrak{R}_1)$. Тогда алгебра Ли подгруппы G^{Σ} равна $\mathfrak{R}_2$, а однородное пространство $M = G/(G^{\Sigma})_o$ является нетривиальным приводимым $\Sigma-$ пространством.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Loos O.* An intrinsic characterization of fibre bundles associated with homogeneous spaces defined by Lie group automorphisms // Abhandl. Math. Semin. Univ. – Hamburg, 1972. – Bd.37. – N 3 – 4. – S. 160-179.
2. *Ledger A.J., Razavi A.R.* Reduced Σ - spaces // Illinois J. Math. –1982. – V.26. – N 2. – P. 272–292.
3. *Феденко А.С.* Пространства с симметриями. – Минск: Изд-во БГУ, 1977. – 168с.
4. *Лоос О.* Симметрические пространства. М.: Наука, 1985. – 208с.
5. *Marmazeev V.I.* On Lie triple algebras of reduced Σ – spaces // Webs and Quasi groups. – Tver, 1992. – P. 50–63.
6. *Ковальский О.* Обобщенные симметрические пространства. – М.: Мир, 1984. – 240с.
7. *Мармазеев В.И.* Каноническое разложение естественно редуктивного риманова пространства // Изв. Вузов. Математика. – 1987. – № 1. – С.27–32.
8. *Гото М., Гроссханс Ф.* Полупростые алгебры Ли. – М.: Мир, 1981. – 336с.