УДК 378.147: 621.72: 62-504.1

О.И.МЕЛЬНИКОВ

МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗУЧЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Дискретные математические модели в последнее время получили широкое распространение. Это во многом связано с изучением так называемых кибернетических или больших систем, имеющих широкое распространение в науке, технике, экономике, военном деле и т.д. Строгого определения таких систем нет, они характеризуются большим числом составляющих, сложной иерархией частей, огромным количеством связей между элементами. Конечно, подобные системы существовали и раньше, но в последнее время их исследование стало более актуальным в связи с увеличением масштабов производства, расширением экономических связей, созданием межгосударственных объединений. С другой стороны, изучение этих систем, ввиду их масштабности, стало возможным лишь с появлением мощной вычислительной техники.

Большие системы – это основные объекты, изучаемые в кибернетике. Существенным является вопрос: почему дискретные формы хранения, передачи и обработки информации стали преобладающими в этой науке? Для этого имеются веские причины. В кибернетике распространены дискретные управляющие системы, параметры которых задаются как дискретные величины. Даже в тех случаях, когда состояние элементов системы определяются непрерывными функциями, для анализа выбираются мгновенные состояния, а для преобразований – мгновенные значения [1, с.41]. Кроме того, информация, обрабатывающаяся или передающаяся в дискретном виде, устойчива относительно помех.

Термин "модель" в настоящее время не имеет единой трактовки. В различных работах моделями часто называют сильно отличающиеся друг от друга объекты. В настоящей работе под моделью понимается искусственно создаваемый объект, на который отображаются основные элементы реально существующего объекта или явления с целью изучения последнего. Если искусственный объект описывается с помощью математических символов и соотношений, то говорят о математической модели.

Математическая модель сочетает достоинства как теории, так и эксперимента. "Работа не с самим объектом (явлением, процессом), а с его моделью дает возможность безболезненно, относительно быстро и без существенных затрат исследовать его поведение в любых мысленных ситуациях (преимущества теории). В то же время вычислительные эксперименты с моделями позволяют, опираясь на мощь современных вычислительных методов и технических инструментов информатики, изучать объекты в достаточной полноте, недоступной чисто теоретическим подходам (преимущества эксперимента)" [2, с.6].

Знакомство с моделями начинается уже в средней школе. Модели используются в физике, биологии, географии. Простейшие математические модели встречаются в начальных классах при изучении арифметических операций. Моделирование широко представлено в курсе информатики. Если в арифметике и физике школьник изучает, в основном, готовые математические модели, то в информатике он часто должен сам строить их. Построение моделей является сложной процедурой для учеников [3], впрочем, как и для студентов вузов. Вопросы построения и исследования различных моделей встречаются при обучении практически всем специальностям.

При изучении дискретных моделей нужно, естественно, начинать с особенностей, присущих всем моделям. Первоначально следует выбрать язык, описывающий объект. В качестве языка могут служить алгебраические или дифференциальные уравнения, булевы функции, графы и т.д. Широко распространены и всевозможные комбинации средств описания. Таким образом, модель – это перевод с одного языка на другой, но перевод упрощенный. "Тонкости при таком сокращении могут быть потеряны, но все, что есть в оригинале, чем-то представлено в переводе, и в уменьшенном масштабе сохраняется" [4,с. 50].

Как правило, построение модели начинается с уточнения постановки задачи. Часто заказчик исследования сам не является математиком, плохо знает исследуемый объект, смутно представляет, что же он хочет получить в результате исследования. Поэтому разработчик модели должен сделать предварительный анализ объекта. Необходимо учить студента выделять его основные части, особенности, связи, пренебрегая второстепенными. Нужно указать управляемые переменные, т.е. те, которые можно изменять в процессе исследования, и неуправляемые параметры. В большинстве случаев выделение управляемых переменных является относительно легкой задачей, поскольку априори ясно, с помощью каких воздействий можно влиять на ситуацию. Вместе с тем нужно установить границы изменения управляемых переменных. Более тяжелой является задача выявления неуправляемых параметров, поскольку их, как правило, очень много, и поэтому нужно учитывать лишь некоторые из них, существенные для данной задачи.

Необходимо поставить конечную цель исследования. Возможно, это будет получение лучшего результата при заданных ограничениях или исследование поведения системы при некоторых воздействиях, или определение свойств объекта и т.д. Следует отметить, что в некоторых случаях вместе с конкретными целями могут существовать и такие установки, которые непосредственно в постановке задачи не отражены. Кроме того, большинство реальных задач являются многокритериальными, т.е. такими, в которых необходимо добиться нескольких, часто противоречащих друг другу целей. Выбор цели исследования существенно определит и построенную модель, и способы ее исследования. В ситуациях, когда необходимо оптимизировать несколько критериев, следует установить их приоритеты.

Многие объекты можно описать с помощью различных моделей. Нужно обратить внимание студентов на то, что правильный выбор средств описания играет важную роль при исследовании. Так, например, задачу о назначениях можно представить в виде модели целочисленного линейного программирования и в виде матрично-графовой модели. В последнем случае исследование является более простым.

Существенным является вопрос о степени точности и подробности при построении модели. Модель – это гомоморфное отображение реального объекта на искусственный. Две крайности при построении модели: в качестве искусственного объекта взять реальный, в качестве искусственного объекта взять единичный. Для хорошей модели нужно найти золотую середину между этими крайностями. Часто хочется более точно описать ситуацию. Но перегруженность модели деталями приводит к ее громоздкости, невозможности ее исследования даже с помощью современных вычислительных машин. С другой стороны, упрощение модели облегчает ее изучение, но полученные результаты могут плохо соответствовать реальному объекту. В ряде случаев компромисс между сложностью и простотой находится путем проб и ошибок.

Построение моделей – дело весьма сложное. "К великому сожалению, действительно невозможно предложить универсального рецепта, позволяющего безошибочно выбирать и строить математическую модель в любом конкретном случае. Однако по этому поводу не следует испытывать особого беспокойства. Практика показывает, что большинство студентов, получивших подготовку либо в области естественных или технических наук, либо в области математики, экономики или административного руководства, не испытывают особых затруднений при построении моделей при условии, если они имеют к этому склонность" [5, с.12]. Автор согласен с первым процитированным предложением. Окончание второго фактически говорит о том, что построение моделей является искусством. Некоторые специалисты вообще считают, что для успешного моделирования не обязательно знать сущность моделируемого процесса. "Может случиться, что эта сущность и вовсе еще неизвестна, а, тем не менее, оказывается возможным в случае, если известны определенные связи разных частей изучаемого явления, создать математическую модель, достаточно хорошо отражающую внешние нужные стороны изучаемого явления и тем самым получить возможность изучать его и предвидеть, предсказывать его дальнейшее развитие" [6]. Действительно, в ряде случаев можно создать "достаточно" хорошую модель, да и что делать, если по разным причинам создателю модели не ясна сущность явления. Но на взгляд автора, построение удачных математических моделей возможно лишь при хорошем знании математики и области моделирования и при наличии определенного опыта. В свое время на механико-математическом факультете БГУ была открыта специализация "Математическая электроника". Это было вызвано тем, что выпускники факультета, распределенные на "Интеграл", могли успешно строить и исследовать модели электронно-вычислительной аппаратуры только после нескольких лет работы. Специализация позволила сократить время адаптации молодого специалиста к производству.

Поскольку построенная модель может оказаться чересчур упрощенной и поэтому плохо описывающей реальный объект, желательно осуществлять проверку модели на адекватность объекту, т.е. производить адекватные воздействия на объект и модель и сравнивать получаемые результаты. К сожалению, это не всегда возможно, так как моделируемый объект может еще не существовать, или проверка воздействий на существующем объекте приводит к его изменению.

В некоторых случаях приходится строить модели объектов или ситуаций, о структуре которых известно мало, например, модели развития военных конфликтов. В этих случаях выдвигаются различные гипотезы о строении объекта и его внутренних связях, объект заменяется "искусственной действительностью", которая и моделируется.

Изучение дискретных математических моделей имеет и свои особенности, связанные с дискретностью. На первый взгляд, непрерывность и дискретность абсолютно противоположны друг другу. Но реальный мир одновременно и непрерывен, и дискретен, а его описание с помощью различных моделей является лишь абстракцией.

Необходимо обратить внимание студентов на взаимосвязь непрерывности и дискретности. Во-первых, некоторые модели могут рассматриваться одновременно и как дискретные, и как непрерывные. Например, все ограничения задачи линейного программирования являются непрерывными. Но оказывается, что множество точек, в которых может находиться оптимальное решение, дискретно, т.е. модель можно рассматривать и как дискретную. Однако при исследовании модели на чувствительность к изменениям параметров опять следует перейти к непрерывной трактовке.

Во-вторых, многие непрерывные модели можно превратить в дискретные путем введения некоторого шага изменения параметров. Так, задачу поиска оптимальной траектории в трехмерном пространстве легко представить как задачу поиска траектории, отрезки которой параллельны осям координат, причем на этих отрезках рассматриваются лишь определенные дискретные точки. Следует отметить, что фактически в этом случае происходит замена построенной модели на более простую. Однако ничего плохого не происходит, поскольку с помощью уменьшения шага изменения параметров, как правило, можно подойти сколь угодно близко к старой модели.

В-третьих, существуют модели, в которых присутствует и дискретность, и непрерывность. Модель может состоять из дискретных элементов, связи между которыми описываются непрерывными функциями. Такими, в частности, являются некоторые модели интегральных схем.

Большинство дискретных математических моделей являются моделями, в которых число составляющих элементов, число связей между ними и число возможных значений управляемых переменных конечно. С точки зрения классической математики, изучение таких моделей не представляет труда. Так как число различных подмножеств элементов модели и число воздействий на них конечно, то исследовать все возможные ситуации, возникающие в моделях, можно с помощью простого перебора. Однако при решении даже небольших комбинаторных практических задач число таких ситуаций, как правило, астрономическое, и перебрать их с помощью даже сверхмощных ЭВМ в реальное время невозможно. Увеличение же быстродействия ЭВМ зависит от скорости передачи информации по ее каналам связи, которая ограничена скоростью света. Поэтому разработка специальных методов исследования дискретных моделей является необходимостью.

Следует обращать внимание студентов на то, что степень детализации при построении модели существенно влияет на время ее изучения. При очень подробном описании объекта это время может оказаться совершенно неприемлемым. Его желательно оценить до создания компьютерных программ, которое требует значительных усилий. Уменьшения времени исследования можно достигнуть тремя способами: упрощением модели, упрощением алгоритма или созданием более эффективного алгоритма. В первых двух случаях, естественно, ухудшается качество исследования, но, возможно, получаемый результат вполне приемлем для поставленных целей.

Достоинством дискретных моделей является то, что они часто имеют много интерпретаций. Рассмотрим несколько примеров. Простейшие задачи о диете, о смешивании нефтепродуктов, о выпуске товара и многие другие сводятся к линейной модели (задаче линейного программирования), задачу коммивояжера (матрично-графовую модель) можно трактовать как задачу о рациональном маршруте объезда городов и как задачу о переналадке станка-автомата, с помощью одной и той же графовой модели можно изобразить и карту дорог, и отношения между людьми, и строение интегральной схемы. Самостоятельная жизнь моделей приводит к тому, что в некоторых книгах термины "модель" и "задача" являются, фактически, синонимами [7].

Содержание математики не меняется в зависимости от того, кто ее использует: чистый математик, которого интересует лишь математическая истина, или инженер, которому необходимо решить конкретную производственную задачу. Однако набор математических курсов, их содержание, степень строгости доказательств, подбор примеров зависит от будущей специальности студентов.

На математических факультетах следует изучать наиболее известные математические дискретные модели и рассматривать их наиболее распространенные интерпретации. Возможно обучение на конкретной модели некоторому универсальному методу решения комбинаторных задач. Так, задачу коммивояжера можно использовать для обучения методу "ветвей и границ", задачу о ранце – динамическому программированию, задачу эффективного умножения матриц – методу "разделяй и властвуй" и т.д. Особым видам моделей, например, графовым, исследованием которых занимаются специальные разделы математики, необходимо посвящать отдельные курсы.

Особое внимание нужно уделять алгоритмическим аспектам, связанным с моделями, а при построении и анализе алгоритмов – вопросам их трудоемкости. Существует несколько способов оценки трудоемкости алгоритма. Один из них – заполнение таблицы, в которой указывается время реализации алгоритма с помощью конкретной ЭВМ при решении задач различных размеров. Этот способ имеет и достоинства, и недостатки. Наиболее совершенным является оценка трудоемкости алгоритма с помощью времени работы искусственной ЭВМ, которая является моделью реальных ЭВМ.

На технических и экономических факультетах необходимо рассматривать приемы построения моделей, возникающих в соответствующих отраслях хозяйства, и изучать наиболее распространенные из них. Студенты должны уяснить, что математики уже построили огромное число моделей. Возможно, что для объекта, близкого к исследуемому, существует изученная модель, и следует только рассмотреть, как влияют отличия объектов на конечный результат. Если же объект ранее не изучался, то, скорее всего, отдельные его части можно описать с помощью известных моделей.

На педагогических факультетах нужно, во-первых, изучать те дискретные модели, которые попали в различные программы для средних школ. Так, раздел "Теория графов" включен в Программу по информатике для школ с ее повышенным и углубленным изучением, принятую Министерством образования Республики Беларусь [8]. Во-вторых, нужно изучать модели, с помощью которых можно развивать умственные способности школьников и одновременно решать методические задачи преподавания математики. Такие модели можно встретить в математической логике, булевой алгебре, комбинаторике, теории графов [9].

Во всех случаях изучение каждой модели целесообразно производить параллельно с ее наиболее распространенной интерпретацией. Если это возможно, следует рассматривать обобщения модели, которые, возможно, не вкладываются в данную интерпретацию. Например, графовая модель, в которой каждому ребру графа приписано некоторое положительное число, возникает из задачи определения кратчайших расстояний между городами. Ослабив условия, считая, что приписанные числа могут принимать отрицательные значения, мы не можем пользоваться прежней интерпретацией, поскольку расстояния между городами положительны. В данном примере легко предложить новую интерпретацию: задачу о перевозках наименьшей стоимости, в которой стоимость перевозки между некоторыми городами может оказаться отрицательной.

Важным является вопрос о точности исследования модели и о строгости доказательств. Здесь следует учитывать, на каком факультете происходит обучение.

Поскольку модель является упрощенным отражением объекта, то в ряде случаев на технических факультетах нет необходимости проводить очень точные исследования для получения, например, оптимального решения. Это связано с тем, что погрешности при построении модели могут оказаться существенными, и полученное с помощью модели точное значение не будет соответствовать такому же для объекта. Поэтому часто возможно ограничиться приближенными или эвристическими алгоритмами. Доказательства также могут быть эскизными, с пропусками наиболее сложных частей. Следует учитывать, что для практически всех важнейших дискретных моделей созданы пакеты программ их исследования, и будущего инженера нужно научить определять то место, где можно воспользоваться стандартной программой из пакета.

На педагогических факультетах желательно рассматривать такие модели, с которыми будущие учителя смогут знакомить своих учеников.

На математических факультетах важно подробно и строго изучать известные модели, так как главным на этих факультетах является обучение методике исследований. Однако и здесь возможно использование некоторых теорем без доказательств или доказательство их в упрощенной формулировке, так как в этом случае часто исчезают технические сложности и теорема становится прозрачнее в идейном смысле.

В обучении математике можно выделить две взаимосвязанные цели: обучение математическим знаниям и обучение научному поиску. "Нередко для успешного использования математики при решении новых задач надо проявить определенную долю фантазии, искусства, изобретательность, т.е. проявить черты, неотъемлемо входящие в понятие математической культуры. Этому также надо где-то учить, и научить этому, безусловно, гораздо труднее, чем научить использованию готовых алгоритмов [6, с.90].

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Рыбников К.А.*** Введение в методологию математики. – М., 1994–1995.
2. ***Самарский А.А., Михайлов А.П.*** Математическое моделирование. – М., 1997.
3. ***Смолянинов А.А.*** Первые уроки по теме "Моделирование". – "Информатика и образование". – 1998. – № 8. – С.23–29.
4. ***Пойа Д.*** Математика и правдоподобные рассуждения. – М., 1975.
5. ***Вагнер Г.*** Основы исследования операций. – М., 1972. – Т.1.
6. ***Кудрявцев Л.Д.*** Мысли о современной математике и ее изучении. – М., 1997.
7. ***Таха Х.*** Введение а исследование операций. – М., 1985.
8. Методы алгоритмизации и программирование. Программа для углубленного и повышенного изучения информатики в 10-11 классах общеобразовательной школы. – "Інфарматызацыя адукацыі". – Вып.8. – 1997. – С.122–128.
9. ***Мельников О. И.*** Технология применения теории графов в школе. Материалы 1-й научно-практической конференции физико-математического лицея "Альфа" при Гродненском государственном университете. – Гродно, 1998. – С.122–126.