

УДК 514.765.1

ЭКВИАФФИННЫЕ СВЯЗНОСТИ НА СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ НЕРАЗРЕШИМЫХ ГРУПП ЛИ

Н. П. Можей

кандидат физико-математических наук, доцент

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

В работе исследуется задача описания эквивалентных связностей на гладком многообразии. В общем случае эта проблема является довольно сложной. Поэтому естественно рассмотреть эту проблему в более узком классе многообразий, например, в классе симметрических однородных пространств. Цель работы – описание всех инвариантных эквивалентных связностей на трехмерных симметрических однородных пространствах вместе с тензорами кручения и тензорами Риччи. Рассмотрены пространства, на которых действует неразрешимая группа преобразований с неразрешимым стабилизатором. В статье для трехмерных симметрических однородных пространств определено, при каких условиях связность является эквивалентной (локально эквивалентной). Также выписаны в явном виде сами эквивалентные (локально эквивалентные) связности, тензоры кручения, тензоры Риччи.

Ключевые слова: эквивалентная связность, группа преобразований, симметрическое пространство, тензор кручения, тензор Риччи.

Введение

Цель работы – описать все эквивалентные связности на симметрических однородных пространствах размерности 3. Случай аффинных связностей известен [1]. Аффинная связность является эквивалентной, если допускает параллельную форму объема [2]. Для трехмерных симметрических однородных пространств определим, при каких условиях связность является эквивалентной (локально эквивалентной), также выпишем в явном виде сами связности, тензоры кручения и тензоры Риччи.

Симметрическое пространство – это пространство аффинной связности без кручения, тензор кривизны которого сохраняется при параллельном перенесении [3]. Геодезическая симметрия относительно любой точки такого пространства есть автоморфизм, заданная аффинная связность переходит в себя. Примерами симметрических пространств могут служить пространства постоянной кривизны, классические области в комплексном аффинном пространстве и т. д. Симметрические римановы пространства впервые исследовал П.А. Широков [4]. Трехмерные симметрические однородные пространства с неразрешимой группой преобразований и неразрешимым стабилизатором изучались в работе [1].

Эквивалентные пространства, т. е. пространства аффинной связности, в которых объем n -мерного параллелепипеда является инвариантным при параллельном переносе, также играют большую роль в теории геодезических отображений. Й. Микеш и В.Е. Березовский [5; 6] описали основные уравнения теории геодезических отображений для случая геодезических отображений эквивалентных многообразий на псевдоримановы пространства. Эти результаты были отправной точкой для М.Г. Иствуда и В.С. Матвеева [7] в исследовании геодезических отображений многообразий с проективной связностью. В [8] показано, что любое пространство аффинной связности

локально проективно эквивалентно пространству с эквиаффинной связностью. Этот результат также действителен “в целом” [9]. В [10] показано, что произвольное пространство проективной связности допускает “в целом” геодезическое отображение на некоторое пространство с эквиаффинной связностью. Эквиаффинные связности на трехмерных римановых и псевдоримановых однородных пространствах изучались в работе [11]. В данной работе изучаются эквиаффинные (локально эквиаффинные) связности на симметрических однородных пространствах.

Основные определения. Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа \bar{G} , $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Проблема классификации однородных пространств (M, \bar{G}) равносильна классификации пар групп Ли \bar{G}/G , так как M может быть отождествлено с многообразием левых смежных классов \bar{G}/G (см., например, [12]). Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли \bar{G} , а \mathfrak{g} – подалгебра, соответствующая подгруппе G . Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ алгебр Ли называется *эффективной*, если подалгебра \mathfrak{g} не содержит отличных от нуля идеалов $\bar{\mathfrak{g}}$. *Изотропное действие* группы G на касательном пространстве $T_x M$ – это фактор-действие присоединенного действия G на $\bar{\mathfrak{g}}$: $s \cdot (x + \mathfrak{g}) = (Ad_s)(x) + \mathfrak{g}$ для всех $s \in G$, $x \in \bar{\mathfrak{g}}$. При этом алгебра \mathfrak{g} действует на $T_x M = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ следующим образом:

$$x \cdot (y + \mathfrak{g}) = [x, y] + \mathfrak{g}, \text{ для всех } x \in \bar{\mathfrak{g}}, y \in \bar{\mathfrak{g}}.$$

Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление \mathfrak{g} . Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к \mathfrak{g} в $\bar{\mathfrak{g}}$ и фактор-пространство $\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$.

Аффинной связностью на паре $\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}$ называется такое отображение $\Lambda: \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на \mathfrak{g} – изотропное представление подалгебры, а все отображение является \mathfrak{g} -инвариантным. Необходимое условие существования аффинной связности состоит в том, что представление изотропии для G должно быть точным, если \bar{G} эффективна на \bar{G}/G [13; 14]. Инвариантные аффинные связности на однородном пространстве (M, \bar{G}) находятся во взаимно однозначном соответствии (см., например, [15]) с аффинными связностями на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Симметрическое пространство есть тройка (\bar{G}, G, σ) , состоящая из связной группы Ли \bar{G} , замкнутой подгруппы G и инволютивного автоморфизма σ такого, что $\sigma(g) = s_o \circ g \circ s_o^{-1}$ для $g \in \bar{G}$ где s_o – симметрия для M в o . Поскольку $M = \bar{G}/G$ редуктивно (а \bar{G} , транзитивна), все симметрические пространства являются изотропно-точными. Пусть $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, \sigma)$ – симметрическая алгебра Ли. Поскольку σ инволютивно, то его собственными значениями являются 1 и -1 , а \mathfrak{g} – собственное подпространство для 1. Пусть \mathfrak{m} – собственное подпространство для -1 . Разложение $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$ называется *каноническим разложением* для $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, \sigma)$. Если $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$ – каноническое разложение симметрической алгебры Ли $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, \sigma)$, то $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$, $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{g}$. Поскольку тензоры кривизны и кручения инвариантны относительно действия группы Ли G , то они однозначно определяются тензорами на касательном пространстве к многообразию, причем эти тензоры инвариантны относительно изотропного действия. Тензоры кручения $T \in \text{Inv}T_2^1(\mathfrak{m})$ и кривизны $R \in \text{Inv}T_3^1(\mathfrak{m})$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$ имеют вид

$$T(x_m, y_m) = \Lambda(x)y_m - \Lambda(y)x_m - [x, y]_m, \quad R(x_m, y_m) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]).$$

Будем говорить, что Λ имеет *нулевое кручение* или является *связностью без кручения*, если $T = 0$. В этом случае имеет место первое тождество Бьянки:

$$R(x, y)z + R(y, z)x + R(z, x)y = 0 \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{m}.$$

Определим тензор Риччи $Ric \in InvT_2(\mathfrak{m})$:

$$Ric(y, z) = \text{tr}\{x \mapsto R(x, y)z\}.$$

Будем говорить, что аффинная связность Λ является *локально эквиваффинной*, если $\text{tr}\Lambda([x, y]) = 0$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$ (то есть $\Lambda([\bar{\mathfrak{g}}, \bar{\mathfrak{g}}]) \subset \mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$).

Аффинная связность Λ с нулевым кручением имеет симметрический тензор Риччи тогда и только тогда, когда она локально эквиваффинна [2]. Действительно, по определению,

$$Ric(y, z) - Ric(z, y) = \text{tr}\{x \mapsto R(x, y)z - R(x, z)y\}.$$

С учетом первого тождества Бьянки получаем

$$Ric(y, z) - Ric(z, y) = \text{tr}\{x \mapsto -R(y, z)x\} = -\text{tr}R(y, z).$$

Поскольку $\text{tr}(AB - BA) = 0$, имеем

$$Ric(y, z) - Ric(z, y) = -\text{tr}(\Lambda(y)\Lambda(z) - \Lambda(z)\Lambda(y)) + \text{tr}\Lambda([y, z]) = \text{tr}\Lambda([y, z]).$$

Поскольку $\text{tr}(AB - BA) = 0$, имеем

$$Ric(y, z) - Ric(z, y) = -\text{tr}(\Lambda(y)\Lambda(z) - \Lambda(z)\Lambda(y)) + \text{tr}\Lambda([y, z]) = \text{tr}\Lambda([y, z]).$$

Следовательно, тензор Ric симметрический тогда и только тогда, когда $\text{tr}\Lambda([y, z]) = 0$ для всех $y, z \in \bar{\mathfrak{g}}$.

Под *эквиваффинной* связностью будем понимать аффинную связность Λ (без кручения), для которой $\text{tr}\Lambda(x) = 0$ для всех $x \in \bar{\mathfrak{g}}$. В этом случае очевидно, что $\Lambda(\mathfrak{g}) \in \mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$.

Основная часть

Будем описывать пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ при помощи таблицы умножения алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$. Через $\{e_1, \dots, e_n\}$ обозначим базис $\bar{\mathfrak{g}}$ ($n = \dim \bar{\mathfrak{g}}$). Будем полагать, что подалгебра Ли \mathfrak{g} порождается векторами e_1, \dots, e_{n-3} , а $\{u_1 = e_{n-2}, u_2 = e_{n-1}, u_3 = e_n\}$ – базис \mathfrak{m} . Для нумерации подалгебр используем запись d, n , а для нумерации пар – запись d, n, m , где d – размерность подалгебры, n – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, m – номер пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, соответствующие приведенным в [1]. Поскольку ограничение $\Lambda: \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ на \mathfrak{g} – изотропное представление подалгебры, связность определяется своими значениями на \mathfrak{m} . Выпишем ее через образы базисных векторов $\Lambda(u_1), \Lambda(u_2), \Lambda(u_3)$, запишем тензор кривизны R его значениями $R(u_1, u_2), R(u_1, u_3), R(u_2, u_3)$, а тензор кручения T – его значениями $T(u_1, u_2), T(u_1, u_3), T(u_2, u_3)$. Будем говорить, что связность *нулевая*, если $\Lambda(u_1) = \Lambda(u_2) = \Lambda(u_3) = 0$.

Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *тривиальной*, если существует коммутативный идеал \mathfrak{a} в алгебре Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ такой, что $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a} = \bar{\mathfrak{g}}$.

Теорема 1 [1]. Любое трехмерное симметрическое тривиальное однородное пространство $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, такое, что $\bar{\mathfrak{g}}$ и \mathfrak{g} неразрешимы, локально имеет вид $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a} = \bar{\mathfrak{g}}$, где \mathfrak{g} (подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$) сопряжена только одной из следующих подалгебр:

$$\begin{aligned}
 & 3.3. \begin{bmatrix} x & y \\ z & -x \end{bmatrix}; 3.4. \begin{bmatrix} x & y \\ z & -x \end{bmatrix}; 3.5. \begin{bmatrix} & y & x \\ -y & & z \\ -x & -z & \end{bmatrix}; \\
 4.1. & \begin{bmatrix} x & z \\ u & y \end{bmatrix}; 4.2. \begin{bmatrix} \lambda x + y & z \\ u & \lambda x - y \\ & x \end{bmatrix}; 4.3. \begin{bmatrix} x + y & z \\ u & x & z \\ & u & x - y \end{bmatrix}; 4.5. \begin{bmatrix} x & z & y \\ -z & x & u \\ -y & -u & x \end{bmatrix}; \\
 5.1. & \begin{bmatrix} x & u \\ v & y \\ & z \end{bmatrix}; 5.2. \begin{bmatrix} x & u & v \\ z & -x & u \end{bmatrix}; 5.3. \begin{bmatrix} u & v \\ x & y \\ z & -x \end{bmatrix}; \\
 6.1. & \begin{bmatrix} x & z & w \\ u & y & v \end{bmatrix}; 6.2. \begin{bmatrix} \lambda x + y & z & w \\ u & \lambda x - y & v \\ & x & \end{bmatrix}; 6.3. \begin{bmatrix} v & w \\ x & z \\ y & u \end{bmatrix}; 6.4. \begin{bmatrix} x & v & w \\ \lambda x + y & z & \\ u & \lambda x - y & \end{bmatrix}; \\
 7.1. & \begin{bmatrix} x & u & t \\ v & y & w \\ & z & \end{bmatrix}; 7.2. \begin{bmatrix} x & w & t \\ y & u & \\ v & z & \end{bmatrix}; 8.1. \begin{bmatrix} x & z & v \\ w & y - x & u \\ t & s & -y \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Также при $\dim \mathfrak{g} = 9$ подалгебра $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$. Здесь подалгебры с одинаковыми номерами, но разными значениями параметра λ , не сопряжены друг другу; предполагается, что параметры пробегают все \mathbb{R} , также предполагается, что переменные обозначены латинскими буквами и принадлежат \mathbb{R} . Базис подалгебры, по умолчанию, будем выбирать, придав одной из латинских переменных значение 1, а остальным 0, нумерация базисных векторов соответствует алфавиту.

Доказательство этой теоремы приведено в работе [1].

Теорема 2 [1]. Любое трехмерное симметрическое нетривиальное однородное пространство $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, такое, что $\bar{\mathfrak{g}}$ и \mathfrak{g} неразрешимы локально эквивалентно одному и только одному из следующих пространств:

3.4.2	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3	3.4.3	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	$-e_3$	u_1	0	$-u_3$	e_1	0	e_2	$-e_3$	u_1	0	$-u_3$
e_2	$-e_2$	0	e_1	0	u_1	u_2	e_2	$-e_2$	0	e_1	0	u_1	u_2
e_3	e_3	$-e_1$	0	u_2	u_3	0	e_3	e_3	$-e_1$	0	u_2	u_3	0
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	e_2	$-e_1$	u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	$-e_2$	e_1
u_2	0	$-u_1$	$-u_3$	$-e_2$	0	$-e_3$	u_2	0	$-u_1$	$-u_3$	e_2	0	e_3
u_3	u_3	$-u_2$	0	e_1	e_3	0	u_3	u_3	$-u_2$	0	$-e_1$	$-e_3$	0
3.5.2	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3	3.5.3	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_3	$-e_2$	$-u_3$	0	u_1	e_1	0	e_3	$-e_2$	$-u_3$	0	u_1
e_2	$-e_3$	0	e_1	$-u_2$	u_1	0	e_2	$-e_3$	0	e_1	$-u_2$	u_1	0
e_3	e_2	$-e_1$	0	0	$-u_3$	u_2	e_3	e_2	$-e_1$	0	0	$-u_3$	u_2
u_1	u_3	u_2	0	0	e_2	e_1	u_1	u_3	u_2	0	0	$-e_2$	$-e_1$
u_2	0	$-u_1$	u_3	$-e_2$	0	e_3	u_2	0	$-u_1$	u_3	e_2	0	$-e_3$
u_3	$-u_1$	0	$-u_2$	$-e_1$	$-e_3$	0	u_3	$-u_1$	0	$-u_2$	e_1	e_3	0

5.2.2	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	e_4	$-e_5$	u_1	$-u_2$	0
e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	e_4	0	u_1	0
e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	e_5	0	u_2	0	0
e_4	$-e_4$	0	$-e_5$	0	0	0	0	e_4+u_1
e_5	e_5	$-e_4$	0	0	0	0	0	e_5+u_2
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	0	0	$-u_1$
u_2	u_2	$-u_1$	0	0	0	0	0	$-u_2$
u_3	0	0	0	$-e_4-u_1$	$-e_5-u_2$	u_1	u_2	0

5.2.3	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	e_4	$-e_5$	u_1	$-u_2$	0
e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	e_4	0	u_1	0
e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	e_5	0	u_2	0	0
e_4	$-e_4$	0	$-e_5$	0	0	0	0	u_1
e_5	e_5	$-e_4$	0	0	0	0	0	u_2
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	0	0	$-e_4$
u_2	u_2	$-u_1$	0	0	0	0	0	$-e_5$
u_3	0	0	0	$-u_1$	$-u_2$	e_4	e_5	0

6.1.2.	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	0	e_5	$-e_6$	u_1	$-u_2$	0
e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	0	e_5	0	u_1	0
e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	0	e_6	0	u_2	0	0
e_4	0	0	0	0	e_5	e_6	u_1	u_2	0
e_5	$-e_5$	0	$-e_6$	$-e_5$	0	0	0	0	u_1
e_6	e_6	$-e_5$	0	$-e_6$	0	0	0	0	u_2
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	$-u_1$	0	0	0	0	e_5
u_2	u_2	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	0	0	e_6
u_3	0	0	0	0	$-u_1$	$-u_2$	$-e_5$	$-e_6$	0

6.1.3.	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	0	e_5	$-e_6$	u_1	$-u_2$	0
e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	0	e_5	0	u_1	0
e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	0	e_6	0	u_2	0	0
e_4	0	0	0	0	e_5	e_6	u_1	u_2	0
e_5	$-e_5$	0	$-e_6$	$-e_5$	0	0	0	0	u_1
e_6	e_6	$-e_5$	0	$-e_6$	0	0	0	0	u_2
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	$-u_1$	0	0	0	0	$-e_5$
u_2	u_2	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	0	0	$-e_6$
u_3	0	0	0	0	$-u_1$	$-u_2$	e_5	e_6	0

Замечание. В случае 5.2.2 базис \mathfrak{m} в каноническом разложении имеет вид $\{u_1 + e_4, u_2 + e_5, u_3\}$, в остальных случаях – стандартный базис $\{u_1, u_2, u_3\}$. Далее используется базис канонического разложения. Если на параметры, появляющиеся в процессе классификации, не накладываются дополнительные условия, то предполагается, что они пробегает все \mathbb{R} .

Доказательство этой теоремы также приведено в работе [1].

Информация о тензорах кручения и тензорах Риччи приведена в доказательстве теоремы 3.

Пусть далее $p_{i,j}, q_{i,j}, r_{i,j} \in \mathbb{R}$ ($i, j = 1, 2, 3$).

Теорема 3. Пусть $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ – трехмерное симметрическое однородное пространство, приведенное в теореме 1 или 2. Эквивалентные (локально эквивалентные) связности имеют вид:

Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$	Локально эквивалентная связность (без кручения)
3.4.1, 3.4.2, 3.4.3, 3.5.1, 3.5.2, 3.5.3, 4.2.1, 4.3.1, 4.5.1, 5.1.1, 5.3.1, 6.2.1, 6.3.1, 6.4.1, 7.1.1, 7.2.1, 8.1.1, 9.1.1	тривиальная
3.3.1, 4.1.1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,3} & 0 & 0 \\ 0 & p_{1,3} & 0 \\ 0 & 0 & r_{3,3} \end{pmatrix}$
5.2.1, 5.2.3, 6.1.1, 6.1.2, 6.1.3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,3} & 0 & 0 \\ 0 & p_{1,3} & 0 \\ 0 & 0 & 2p_{1,3} \end{pmatrix}$
5.2.2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,3}+1 & 0 & 0 \\ 0 & p_{1,3}+1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(p_{1,3}+1) \end{pmatrix}$

Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$	Эквивалентная связность (без кручения)
3.4.1, 3.4.2, 3.4.3, 3.5.1, 3.5.2, 3.5.3, 4.2.1 ($\lambda=-1/2$), 5.2.1, 5.2.3, 5.3.1, 6.2.1 ($\lambda=-1/2$), 6.4.1 ($\lambda=-1/2$), 8.1.1	тривиальная
3.3.1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,3} & 0 & 0 \\ 0 & p_{1,3} & 0 \\ 0 & 0 & -2p_{1,3} \end{pmatrix}$
5.2.2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

В остальных случаях пространство не допускает эквивалентной (локально эквивалентной) связности.

Доказательство. Действительно, пусть, например, $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ – трехмерное симметрическое однородное пространство 3.5.1 (либо 3.5.2, либо 3.5.3), тогда

$$\Lambda(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Lambda(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Lambda(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$(\Lambda|_{\mathfrak{g}}$ является изотропным представлением подалгебры \mathfrak{g}). Отображение Λ является \mathfrak{g} -инвариантным, поэтому инвариантная аффинная связность имеет вид (см. [1]):

$$\Lambda(u_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ 0 & -p_{2,3} & 0 \end{pmatrix}, \Lambda(u_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ p_{2,3} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Lambda(u_3) = \begin{pmatrix} 0 & p_{2,3} & 0 \\ -p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, при любых $p_{2,3} \in \mathbb{R}$ имеем $\text{tr}\Lambda(x) = 0$ для всех $x \in \bar{\mathfrak{g}}$ (и $\text{tr}\Lambda([x, y]) = 0$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$). Тензор кривизны

$$\begin{pmatrix} 0 & -p_{2,3}^2 + \delta & 0 \\ p_{2,3}^2 - \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3}^2 + \delta \\ 0 & 0 & 0 \\ p_{2,3}^2 - \delta & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p_{2,3}^2 + \delta \\ 0 & p_{2,3}^2 - \delta & 0 \end{pmatrix},$$

$\delta = 0$ в случае 3.5.1, $\delta = -1$ в случае 3.5.2, $\delta = 1$ в случае 3.5.3. Тензор Риччи имеет вид

$$\text{Ric} = \begin{pmatrix} -2p_{2,3}^2 + 2\delta & 0 & 0 \\ 0 & -2p_{2,3}^2 + 2\delta & 0 \\ 0 & 0 & -2p_{2,3}^2 + 2\delta \end{pmatrix}$$

и является симметрическим. Тензор кручения $T(u_1, u_2) = (0, 0, -2p_{2,3})$, $T(u_1, u_3) = (0, 2p_{2,3}, 0)$, $T(u_2, u_3) = (-2p_{2,3}, 0, 0)$. Если $T=0$ (Λ является связностью без кручения), то $p_{2,3} = 0$ и связность тривиальная. В случаях 3.4.1, 3.4.2, 3.4.3 инвариантная аффинная связность имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,2} & 0 \end{pmatrix},$$

тогда $\text{tr}\Lambda(x) = 0$, $x \in \bar{\mathfrak{g}}$ (и $\text{tr}\Lambda([x, y]) = 0$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$), тензор Риччи является симметрическим; тензор кручения $(2p_{1,2}, 0, 0), (0, 2p_{1,2}, 0), (0, 0, 2p_{1,2})$.

В случаях 6.1.1, 6.1.2, 6.1.3 инвариантная аффинная связность имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & r_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & r_{1,1} + p_{1,3} \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\Lambda(\mathfrak{g}) \notin \mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$, связность не является эквивариантной. Тензор кручения

$(0, 0, 0), (-p_{1,3} + r_{1,1}, 0, 0), (0, -p_{1,3} + r_{1,1}, 0)$, если $T=0$ (Λ является связностью без кручения), то $r_{1,1} = p_{1,3}$. Имеем $\text{tr}\Lambda([x, y]) = 0$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$, тензор Риччи является симметрическим, т. е. связность является локально эквивариантной.

В случаях 5.2.1, 5.2.3 инвариантная аффинная связность имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & r_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & r_{1,1} + q_{2,3} \end{pmatrix},$$

тензор кручения $(0, 0, 0), (q_{2,3} - r_{1,1}, 0, 0), (0, q_{2,3} - r_{1,1}, 0)$, тензор Риччи является симметрическим, то есть связность является эквивариантной при $3r_{1,1} + q_{2,3} = 0$ ($\text{tr}\Lambda(x) = 0$, $x \in \bar{\mathfrak{g}}$) и $r_{1,1} = q_{2,3}$ ($T = 0$), тогда связность тривиальная. Имеем также $\text{tr}\Lambda([x, y]) = 0$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$, т. е. связность является локально эквивариантной. В случае 5.2.2 связность –

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & r_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & r_{1,1} + q_{2,3} + 1 \end{pmatrix},$$

тензор кручения $(0, 0, 0), (q_{2,3} - r_{1,1} + 1, 0, 0), (0, q_{2,3} - r_{1,1} + 1, 0)$, тензор Риччи является симметрическим, связность является эквивариантной при $3r_{1,1} + q_{2,3} + 1 = 0$ ($\text{tr}\Lambda(x) = 0$, $x \in \bar{\mathfrak{g}}$) и $r_{1,1} = 0$, $q_{2,3} = -1$ ($T = 0$), тогда $r_{1,1} = 0$, $q_{2,3} = -1$ и связность имеет вид, приведенный в теореме. Также $\text{tr}\Lambda([x, y]) = 0$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$, т. е. связность является локально эквивариантной.

Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Заключение

Таким образом, для трехмерных симметрических однородных пространств с неразрешимой группой преобразований и неразрешимым стабилизатором определено, при каких условиях связность является эквивариантной (локально эквивариантной). Также выписаны в явном виде сами связности, тензоры кручения и тензоры Риччи.

Полученные результаты могут найти приложения при исследовании многообразий, при изучении пространств со связностью, а также в теории относительности, в ядерной физике, физике элементарных частиц и др., поскольку многие фундаментальные проблемы в этих областях сводятся к исследованию инвариантных объектов на симметрических пространствах.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Можей, Н. П.* Симметрические однородные пространства неразрешимых групп Ли и связности на них / Н. П. Можей // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. А. Куляшова. Серыя В. Прыродазнаўчыя навукі: матэматыка, фізіка, біялогія. – 2018. – № 2(52). – С. 15–23.
2. *Nomizu, K.* Affine differential geometry / K. Nomizu, T. Sasaki. – Cambridge Univ. Press, 1994. – 263 p.
3. *Картан, Э.* Риманова геометрия в ортогональном репере / Э. Картан. – М.: Моск. ун-т, 1960. – 307 с.
4. *Широков, П. А.* Симметрические пространства первого класса / П. А. Широков // Избранные работы по геометрии. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1966. – С. 366–383.
5. *Berezovski, V.* Geodesic mappings of affine-connected spaces onto Riemannian spaces / V. Berezovski, J. Mikeš // Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai. – 1989. – Vol. 56. – P. 491–494.
6. *Kiosak, V.* Geodesic Mappings of Manifolds with Affine Connection / V. Kiosak, J. Mikeš, A. Vanžurová. – Olomouc: Palacký Univ. Press, 2008.
7. *Eastwood, M.* Metric connections in projective differential geometry / M. Eastwood, V. S. Matveev // Symmetries and Overdetermined Systems of Partial Differential Equations (Minneapolis, MN, 2006). – New York: Springer, 2007. – (IMA Vol. Math. Appl.; Vol. 144). – P. 339–351.
8. *Hinterleitner, I.* On the theory of geodesic mappings of Einstein spaces and their generalizations / I. Hinterleitner, J. Mikeš, V. Kiosak // Acta Phys. Debrecena. – 2006. – Vol. 861. – P. 428–435.
9. *Mikeš, J.* On geodesic mappings of manifolds with affine connection / J. Mikeš, I. Hinterleitner. – 2009. – arXiv:math.DG/0905.1839v2.

10. *Гинтерлейтнер, И.* Проективная эквивалентность и пространства эквивалентной связности / И. Гинтерлейтнер, Й. Микеш // *Фундаментальная и прикладная математика*. 2010. – Т. 16. – № 1. – С. 47–54.
11. *Mozhey, N. P.* Equiaffine Connections on Three-Dimensional Pseudo-Riemannian Spaces / N. P. Mozhey // *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2019. – Vol. 40. – No. 8. – P. 1194–1203.
12. *Онищик, А. Л.* Топология транзитивных групп Ли преобразований / А. Л. Онищик. – М. : Физ.-мат. лит., 1995. – 384 с.
13. *Kobayashi, S.* Transformation groups in differential geometry / S. Kobayashi. – Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.
14. *Кобаяси, Ш.* Основы дифференциальной геометрии : в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М. : Наука, 1981.
15. *Nomizu, K.* Invariant affine connections on homogeneous spaces / K. Nomizu // *Amer. Journ. Math.* – 1954. – Vol. 76, no. 1. – P. 33–65.

Поступила в редакцию 17.10.2019 г.

Контакты: mozheynatalya@mail.ru (Можей Наталья Павловна)

Mozhey N. EQUIAFFINE CONNECTIONS ON SYMMETRIC SPACES OF UNSOLVABLE LIE GROUPS.

The question of description of equiaffine connections on a smooth manifold is studied in the article. In general, the issue of the research is quite complicated. Therefore, it is natural to consider this problem in a narrower class of manifolds, for example, in the class of homogeneous symmetric spaces. The purpose of the work is to describe all invariant equiaffine connections on three-dimensional symmetric homogeneous spaces together with their torsion tensors and Ricci tensors. The author considers the case of the unsolvable Lie group of transformations with a unsolvable stabilizer. In the paper it is determined under what conditions the connection is equiaffine (locally equiaffine) for all three-dimensional symmetric homogeneous spaces. In addition, equiaffine (locally equiaffine) connections, torsion tensors and Ricci tensors are explicitly defined.

Keywords: equiaffine connection, transformation group, symmetric space, torsion tensor, Ricci tensor.