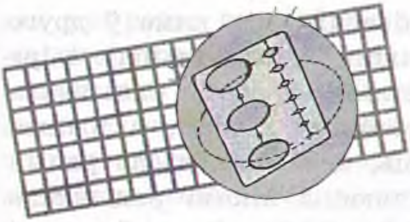


*Сакрэты майстэрства*

# ПРА ПАНЯЦЦЕ ТРАПЕЦЫІ

***Л.А.Латоцін,*** *кандыдат педагагічных навук, дацэнт, загадчык кафедры методыкі выкладання матэматыкі МДУ імя А.А.Куляшова,*
***Б.Дз.Чабатарэўскі,*** *кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт, загадчык кафедры алгебры і геаметрыі МДУ імя А.А.Куляшова*

Ёсць два падыходы да азначэння трапецыі. Традыцыйным для савецкіх падручнікаў з'яўляецца такое азначэнне трапецыі.

**Азначэнне 1.** ***Трапецыяй называецца чатырохвугольнік, у якога дзве стараны паралельныя, а дзве іншыя стараны не паралельныя*** (гл., напрыклад, [1, с. 92], [2, с. 98]).

Іншы падыход грунтуецца на наступным азначэнні.

**Азначэнне 2.** ***Трапецыяй называецца чатырохвугольнік, у якога ёсць хаця б адна пара паралельных старон.***

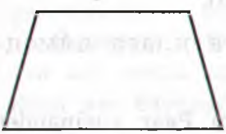
Пры першым падыходзе трапецыя і паралелаграм супрацьпастаўляюцца, пры другім — паралелаграм разглядаецца як від трапецыі.

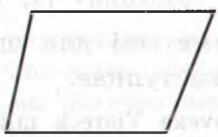
Ці апраўдана супрацьпастаўленне трапецыі і паралелаграма? Супрацьпастаўляць паняцці ёсць сэнс, калі кожнае з іх мае такія ўласцівасці, якіх няма ў другога паняцця. Напрыклад, паняцці рацыянальнага і ірацыянальнага лікаў супрацьлеглыя, бо любы рацыянальны лік можна выявіць звычайным дробам, а ірацыянальны нельга, сума, рознасць, здабытак, дзель рацыянальных лікаў заўсёды з'яўляюцца лікамі рацыянальнымі, а дзеянні з ірацыянальнымі лікамі такой уласцівасці не маюць. Напрыклад, сума і здабытак ірацыянальных лікаў $2+\sqrt{3}$ і $2-\sqrt{3}$ ёсць рацыянальныя лікі 4 і 1, рознасць і дзель ірацыянальных лікаў $2+\sqrt{3}$ і $2+\sqrt{3}$ ёсць рацыянальныя лікі 0 і 1. Другі прыклад. Паняцці трохвугольніка і чатырохвугольніка таксама супрацьлеглыя, бо яны маюць несумяшчальныя ўласцівасці: сума вуглоў трохвугольніка роўная $180^\circ$, а чатырохвугольніка — $360^\circ$, трохвугольнік — фігура жорсткая, а чатырохвугольнік — не жорсткая і інш.

У выпадку з паралелаграмам і трапецыяй несумяшчальнасці іх уласцівасцяў не назіраецца. Напрыклад, уласцівасць сярэдняй лініі трапецыі *«Сярэдняя лінія трапецыі роўная паўсуме яе асноў і паралельная ім»* ёсць і ў паралелаграма; формулу для знаходжання плошчы трапецыі можна выкарыстаць і для знаходжання плошчы паралелаграма; уласцівасць *«Сума вуглоў, прылеглых да бакавой стараны трапецыі, роўная $180^\circ$»* таксама ёсць у паралелаграма і г.д. Такая ўзгодненасць уласцівасцяў трапецыі з уласцівасцямі паралелаграма невыпадковая. Усе ўласцівасці трапецыі ёсць вынік таго, што да ўласцівасцяў чатырохвугольніка дадаецца яшчэ адна ўласцівасць: *«Мець пару паралельных старон»*. Але гэтая ўласцівасць ёсць і ў паралелаграма.

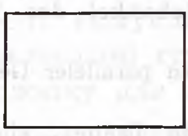
У школьным навучанні супрацьпастаўленне трапецыі і паралелаграма ёсць бадай што адзіны прыклад, калі супрацьпастаўляюцца паняцці, якія па сваёй лагічнай прыродзе не з'яўляюцца несумяшчальнымі. Роўнастароннi трохвугольнік не супрацьпастаўляецца раўнабокаму з-за таго, што ў роўнастаронняга трохвугольніка не дзве, а тры роўныя стараны; прамавугольнік не супрацьпастаўляецца паралелаграму з-за таго, што ў прамавугольніка ёсць перпендыкулярныя стораны; квадрат не супрацьпастаўляецца прамавугольніку з-за таго, што сумежныя стораны квадрата роўныя.

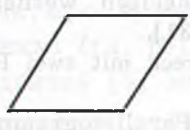
Зразумела, што і прамавугольнік, і ромб, і квадрат з'яўляюцца паралелаграмамі. Але чатырохвугольнікі на рысунках 1 і 2 мы назавём трапецыямі, на рысунку 3 — паралелаграмам, на рысунку 4 — прамавугольнікам, на рысунку 5 — ромбам, на рысунку 6 — квадратам. Зразумела, што ад гэтага ромб на рысунку 5 не перастаў быць паралелаграмам, як і чатырохвугольнікам.


*Рыс. 1*


*Рыс. 2*


*Рыс. 3*


*Рыс. 4*


*Рыс. 5*


*Рыс. 6*

Ад фігуры называюць звычайна з улікам адметных яе ўласцівасцяў. Не называем жа мы чалавека млекакормнікам, хоць гэта таксама было б правільна.

Разуменне трапецыі, як чатырохвугольніка толькі з адной парай паралельных старон, не ёсць агульнапрынятае, у тым ліку і ў расійскіх выданнях. Напрыклад, у школьнай энцыклапедыі па матэматыцы, выдадзенай *Большой Российской энциклопедией* разам са школьным расійскім выдавецтвам *Дрофа*, сказана:

«Трапеция — четырехугольник (см.), у которого две противоположные стороны параллельны. Если же и две другие стороны параллельны, то трапеция оказывается параллелограммом. Параллельные стороны называются основами трапеции, а две другие — боковыми сторонами ее» [3, с. 141].

Як бачым, у гэтым выданні паралелаграм разглядаецца як від трапецыі.

Гэтае самае разуменне трапецыі мы знаходзім і ў *«Справочнике по элементарной математике»* М.Я.Выгодскага:

«Трапецией называется четырехугольник, две противоположные стороны которого параллельны. Параллелограмм можно считать частным видом трапеции» [4, с. 283].

У падручніку матэматыкі для шостага класа нямецкай школы чытаем наступнае:

«Definition: Jedes konvexe Viereck mit einem Paar zueinander paralleler Gegenseiten heiβt Trapez.

Besitzt ein Trapez genau ein Paar zueinander paralleler Gegenseiten, so heiβen sie seine Grundseiten. Die beiden anderen (nicht parallelen) Gegenseiten werden Schenkel des Trapezes genannt» [5, S. 130—131].

«Definition: Jedes Viereck mit zwei Paaren paralleler Gegenseiten heiβt Parallelogramm.

Demnach ist jedes Parallelogramm ein Trapez, aber nicht umgekehrt jedes Trapez ein Parallelogramm.

Die Menge aller Parallelogramme ist in der Menge aller Trapeze enthalten» [5, S. 133].

Як бачна з прыведзенага тэкста, пад трапецыяй разумеецца выпуклы чатырохвугольнік з парай паралельных адна адной супрацьлеглых старон. Калі трапецыя мае дакладна адну пару паралельных старон, то іх называюць асновамі. Дзве іншыя супрацьлеглыя стараны (не паралельныя) называюцца бакавымі старанамі. Паралелаграм азначаецца як чатырохвугольнік з дзвюма парамі паралельных супрацьлеглых старон. Адразу пасля азначэння падкрэсліваецца, што кожны паралелаграм ёсць трапецыя, але не наадварот, што мноства паралелаграмаў змяшчаецца ў мностве трапецый.

Яшчэ ў адным нямецкім падручніку, выдадзеным ужо ў наш час, чытаем:

«Ein Trapez ist Viereck. Es hat wenigstens ein Paar paralleler Seiten» [6, S. 133].

Як бачым, і ў гэтым падручніку трапецыя мае *хаця б адну* пару паралельных старон.

Гэтае самае разуменне трапецыі і ў падручніку геаметрыі, што выкарыстоўваецца ў шэрагу амерыканскіх сярэдніх школ:

«Трапецией называется четырехугольник, имеющий две параллельные стороны.

Заметим, что это определение не исключает возможности, что обе пары противоположных сторон будут параллельными. Если это случится, то мы получим параллелограмм» [7, с. 271].

Падобнае азначэнне мы знаходзім таксама ў падручніку па элементарнай матэматыцы для студэнтаў педагагічных інстытутаў, у адпаведнасці з якім трапецыя ёсць выпуклы чатырохвугольнік з паралельнымі супрацьлеглымі старанамі (гл. [8], с. 101). У вучэбным дапаможніку для студэнтаў [9] мы зноў чытаем:

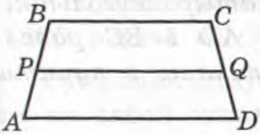
«... мы называем трапецией любой четырехугольник, какие-нибудь две противоположные стороны которого параллельны, т.е. считаем параллелограмм частным случаем трапеции» [9, с. 54], прычым гэта суправаджаецца і рысункам, падобным да рысунка 7.

На мэтазгоднасць азначэння трапецыі як чатырохвугольніка хаця б з адной парай паралельных старон указваецца і ў метадычнай літаратуры. Вядомы украінскі метадыст Г.П.Беўз адзначае «Є пропозиція (до-

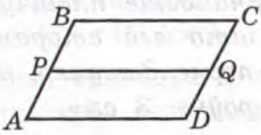

*Рыс. 7*

сить обгрунтована!) трапецією називати кожний чотирикутник, у якого дві протилежні сторони паралельні. Якщо дати таке означення, то паралелограм буде акремим видом трапеції» [10, с. 315].

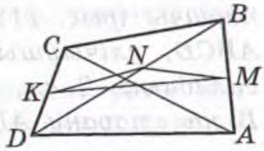
Варта таксама ўказаць, што азначэнне трапецыі як чатырохвугольніка толькі з адной парай паралельных старон ў практычным плане не вытрымліваецца. Звычайна, устанавіўшы паралельнасць пары старон чатырохвугольніка, робяць вывад пра тое, што гэты чатырохвугольнік ёсць трапецыя. Пра гэта сведчаць фармулёўкі задач у многіх кнігах. У дапаможніку для студэнтаў педагагічных інстытутаў [11] ёсць такая задача *«Доказать, что если в выпуклом четырехугольнике отрезок, соединяющий середины противоположных сторон, равен полусумме двух других сторон, то этот четырехугольник — трапеция»*. Лёгка зразумець, што ўмова пра роўнасць адрэзка, што злучае сярэдзіны супрацьлеглых старон выпуклага чатырохвугольніка, паўсуме дзвюх іншых старон праўдзіцца не толькі для трапецыі (рыс. 9), але і для паралелаграма (рыс. 8).




*Рыс. 8*




*Рыс. 9*




*Рыс. 10*

Пра аналагічную задачу *«Расстояние между серединами двух сторон четырехугольника равно полусумме двух других его сторон. Доказать, что этот четырехугольник — трапеция»* [12, с. 175] пасля наступнага рашэння:

«Пусть $M$ — середина стороны $AB$, а $K$ — середина стороны $CD$ четырехугольника $ABCD$, причем $MK=\frac{1}{2}(CB+AD)$. Обозначим через $N$ середину диагонали $BD$ (рис. 10). Отрезок $NK$ — средняя линия в треугольнике $BCD$, $NK$ параллельна $BC$ и равна $\frac{1}{2}BC$. Точно так же $NM$ параллельна $AD$ и равна $\frac{1}{2}AD$. Таким образом, $MK=MN+NK$, т.е. $N$ лежит на отрезке $MK$. Значит, $BC$ и $AD$ параллельны друг другу, поскольку они обе параллельны $MK$.» [12, с. 175—176]

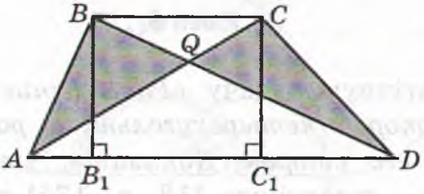
аўтар робіць заўвагу

«Если считать, что параллелограмм не является трапецией, то в условии задачи следует добавить слова *или параллелограмм*» [12, с. 175].

Супрацьпастаўленне паралелаграма і трапецыі стварае дадатковыя цяжкасці пры рашэнні задач, якія часта проста ігнаруюцца, бо пра непаралельнасць старон другой пары проста забываюць. Разгледзім, напрыклад, пры рашэнні задачы

*«Дыяганалі AC і BD чатырохвугольніка ABCD пры сваім перасячэнні ў пункце Q утвараюць чатыры чатырохвугольнікі, два з якіх AQB і CQD маюць роўныя*

*плошчы (рыс. 11). Знайдзіце плошчу чатырохвугольніка ABCD, улічыўшы, што яго стараны AD і BC разам складаюць 8 см, а перпендыкуляр, апушчаны з пункта B на старану AD, роўны 3 см».*




*Рыс. 11*

Задачу звычайна рашаюць так. Улічыўшы, што трохвугольнікі $ABD$ і $ACD$ складаюцца з агульнай часткі — трохвугольніка $AQD$ і роўнавялікіх трохвугольнікаў $AQB$ і $DQC$, можна сцвярджаць, што плошчы трохвугольнікаў $ABD$ і $ACD$ роўныя. Паколькі яны маюць адну і тую ж аснову $AD$, то іх вышыні $BB_1$ і $CC_1$ роўныя. Таму стораны $BC$ і $AD$ паралельныя, $ABCD$ — трапецыя, і яе плошча роўная $\frac{BC+AD}{2}\cdot BB_1=\frac{8}{2}\cdot 3=12$ (см$^2$).

Калі ж прытрымлівацца першага азначэння трапецыі, то рашэнне павінна быць наступным.

Улічыўшы, што трохвугольнікі $ABD$ і $ACD$ складаюцца з агульнай часткі — трохвугольніка $AQD$ — і роўнавялікіх трохвугольнікаў $AQB$ і $CQD$, можна сцвярджаць, што плошчы трохвугольнікаў $ABD$ і $ACD$ роўныя. Паколькі яны маюць адну і тую ж аснову $AD$, то іх вышыні $BB_1$ і $CC_1$ роўныя. Таму стораны $BC$ і $AD$ паралельныя.

Калі стораны $AB$ і $CD$ не паралельныя, то $ABCD$ — трапецыя, і яе плошча роўная $\frac{BC+AD}{2}\cdot BB_1=\frac{8}{2}\cdot 3=12$ (см$^2$).

Калі стораны $AB$ і $CD$ паралельныя, то $ABCD$ — паралелаграм, яго стораны $BC$ и $AD$ роўныя. Таму $AD=\frac{BC+AD}{2}=\frac{8}{2}=4$ (см). Перпендыкуляр $BB_1$ з'яўляецца вышыней паралелаграма $ABCD$. Значыць, плошча паралелаграма $ABCD$ роўная $AD \cdot BB_1 = 4 \cdot 3 = 12$ (см$^2$).

Супрацьпастаўленне трапецыі і паралелаграма цягне за сабой цяжкасці пры лагічным упарадкаванні паняццяў, падпарадкаваных паняццю *«Паралелаграм»*.

У адпаведнасці з азначэннем 1 чатырохвугольнікі на рысунках 12 і 13 ёсць трапецыі. Ураўнаваўшы бакавыя стораны гэтых трапецый, атрымаем чатырохвугольнікі, выяўленыя на рысунках 14 і 15, у якіх стораны адной пары паралельныя, а другой — роўныя. Лагічна б абодва атрыманыя чатырохвугольнікі назваць раўнабокімі трапецыямі, бо яны атрыманы з трапецый з дапамогай далучэння да прымет трапецыі адметнай прыметы раўнабокай трапецыі *«Мець роўныя бакавыя стораны»*. Разам з тым чатырохвугольнік на рысунку 15 ёсць паралелаграм, які, у адпаведнасці з азначэннем 1, нельга лічыць трапецыяй.

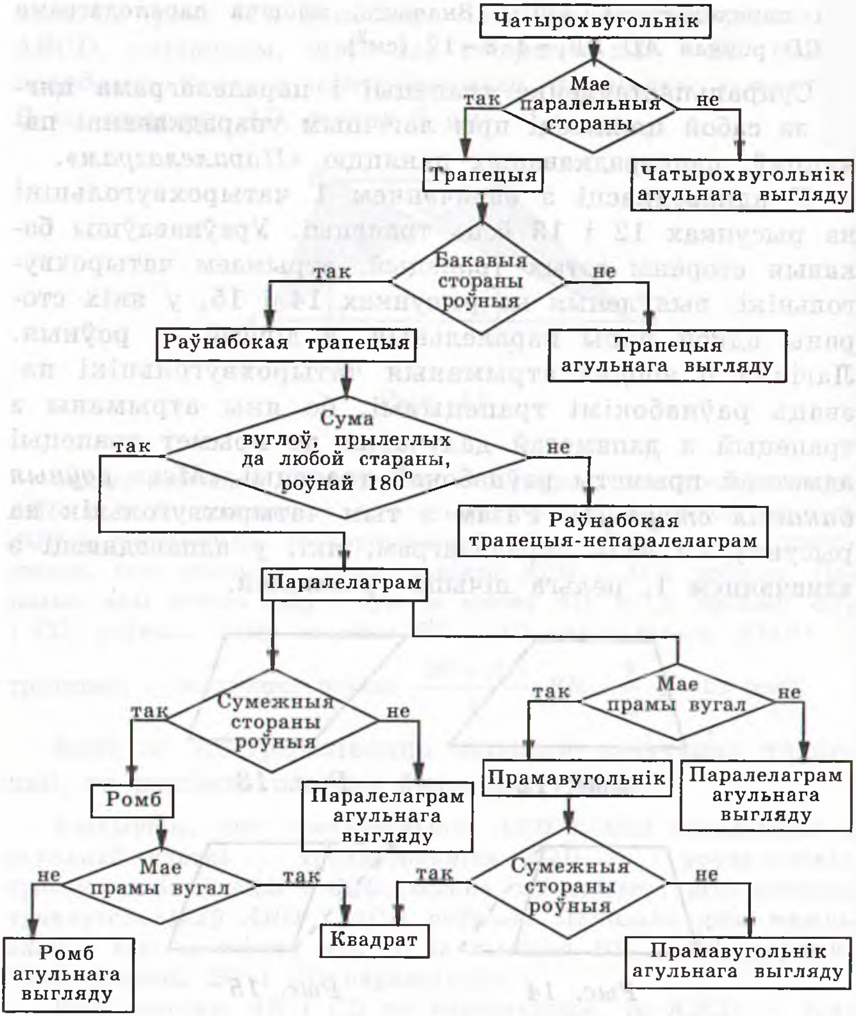
*Рыс. 12*

*Рыс. 13*

*Рыс. 14*

*Рыс. 15*

Падобнай няўзгодненасці ў азначэннях не ўзнікае пры карыстанні азначэннем 2. Тут атрымліваецца лагічна стройная схема лагічнага ўпарадкавання паняццяў, падпарадкаваных паняццю *«Чатырохвугольнік»*, паказаная на рысунку 16.




*Рыс. 16*

1. *Погорелов А.В.* Геометрия: Учебник для 7—11 кл. сред. шк. — М.: Просвещение, 1990. — 384 с.

2. Геометрия: Учебник для 7—9 кл. сред. шк. / Л.С.Атанасян, В.Ф.Бутузов, С.Б.Кадомцев и др. — М.: Просвещение, 1990. — 336 с.

3. Математика: Школьная энциклопедия / Гл. ред. С.М.Никольский. — М.: Большая Российская энциклопедия; Дрофа, 1997. — 527 с.

4. *Выгодский М.Я.* Справочник по элементарной математике. — М.: Наука, 1964. — 420 с.

5. Mathematik: Lehrbuch für Klasse 6. — Berlin: Volk und Wissen, 1974. — 208 s.

6. Mathematik: Mecklenburg-Vorpommern Klasse 5. — Berlin: paetec Gesellschaft für Bildung und Technik mbH. — 192 s.

7. *Моиз Э.Э., Даунс Ф.Л. мл.* Геометрия. — М.: Просвещение, 1972. — 622 с.

8. *Перепелкин Д.И.* Курс элементарной геометрии. Часть I. Геометрия на плоскости. — М. — Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1948. — 344 с.

9. Современные основы школьного курса математики: Пособие для студентов пед. ин-тов / Н.Я.Виленкин, К.И.Дуничев, Л.А.Калужнин, А.А.Столяр. — М.: Просвещение, 1980. — 240 с.

10. *Бевз Г.П.* Методика викладання математики. — Київ: Вища школа, 1977. — 376 с.

11. *Гусев В.А., Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г.* Практикум по решению математических задач: Геометрия: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов. — М.: Просвещение, 1985. — 224 с.

12. *Шарыгин И.Ф.* Факультативный курс по математике: Решение задач: Учеб. пособие для 10 кл. сред. шк. — М.: Просвещение, 1989. — 252 с.