Л. А. Латоцін,
загадчык кафедры методыкі выкладання матэматыкі МДУ імя А. А. Куляшова, кандыдат педагагічных навук,
Б. Дз. Чабатарэўскі
загадчык кафедры алгебры і геаметрыі МДУ імя А. А. Куляшова, кандыдат фізіка-матэматычных навук

Рэфармаванай школе — якасныя падручнікі

Рэформа адукацыі ў сваім практычным увасабленні прыйшла ўжо ў шосты клас (сёмы год навучання). У вучэбна-метадычных комплексах, што забяспечваюць працэс навучання ў тым ці іншым класе, асаблівая роля належыць падручнікам. Разам са словам настаўніка падручнік з'яўляецца асноўнай крыніцай, абавязковай для засваення інфармацыі. Таму зразумела тая ўвага, якая надаецца праблеме паляпшэння якасці падручнікаў.

Асноўныя патрабаванні да падручніка наступныя:

- забеспячэнне вучню магчымасці засваення і замацавання вызначаных праграмай ведаў і ўменняў, выяўлення ўзроўню аваладвання імі, ліквідацыі прабелаў;
- інтэграванне набытых школьнікам у розных відах дзейнасці і з розных крыніц ведаў і ўменняў з тым, каб паслядоўна і цэласна фарміраваць метады навуковага мыслення, развіваць уменні самастойна ацэньваць і перапрацоўваць усю тую інфармацыю, што да яго паступае;
- стварэнне падмурка для эфектыўнай самаадукацыі, самастойнай творчай дзейнасці.

Аналізу і ацэнцы вучэбнага дапаможніка "Матэматыка-6" [2], створанага аўтарскім калектывам пад рэдакцыяй Л. Б. Шнепермана, прысвечаны пяты выпуск зборніка артыкулаў па праблемах школьнага падручніка [1]. Тут выказваюцца заўвагі, якія пажадана ўлічыць аўтарам дапаможніка для паляпшэння змястоўнага і дыдактычнага кампанентаў падручніка, яго мовы і афармлення.

Паняцці

Паняцце — адна з асноўных форм навуковага пазнання рэчаіснасці. Гэтая форма мыслення адлюстроўвае аб'екты ў іх істотных прыметах. Паняцці складаюць аснову любой тэорыі, у тым ліку і пачаткаў тых тэорый, што вывучаюцца ў школьнай матэматыцы. Ад сфарміраванасці паняццяў у значнай меры залежыць якасць ведаў вучняў, засваенне імі іншых структурных элементаў зместу — сцвярджэнняў, правілаў, алгарытмаў. Таму зразумела, што трактоўкі паняццяў у школьным курсе павінны быць, з аднаго боку, навукова карэктнымі, з другога — адаптаванымі да ўзроставых магчымасцей вучняў.

Цэнтральным паняццем школьнага курса алгебры з'яўляецца паняцце *выразу з пераменнымі*. На ім грунтуюцца іншыя важныя паняцці гэтага курса. Таму зразумела, што трактоўка гэтага паняцця павінна быць як выразнай, так і навукова, і метадычна карэктнай.

У пункце 1.2 вучэбнага дапаможніка [2] змешчана такое азначэнне: "Выражение, составленное из чисел, букв, знаков арифметических действий и скобок, указывающих на порядок выполнения этих действий, называют алгебраическим" (с. 9). Тут апісваецца паняцце выразу з пераменнымі, але ў якасці азначальнага выкарыстаны іншы тэрмін "алгебраічны выраз". Калі дапусціць, што аўтары па пэўных меркаваннях замест тэрміна "выраз з пераменнымі" ўжываюць тэрмін "алгебраічны выраз", то тады гэта тэрміны-сінонімы. Але далей у пункце 1.4 чытаем: "В алгебраическом выражении $\frac{340-k}{2}$ буква k, вместо которой можно подставлять различные числа, называется переменной, а само выражение — выражением с переменной" (с. 23), з чаго вынікае, што выраз з пераменнай ёсць асобны выпадак алгебраічнага выразу. Паўстае пытанне: а якія акрамя выразаў з пераменнымі ёсць яшчэ алгебраічныя выразы?

Аналіз выкладзенага на с. 5 і 9 сведчыць пра тое, што аўтары алгебраічны выраз разумеюць у сэнсе "выраз наогул", г. зн. што любы выраз у аўтарскай трактоўцы з'яўляецца алгебраічным выразам, паняцці "алгебраическое выражение" и "выражение с переменными" раўназначныя. Але ці варта ў такім разе ўводзіць ва ўжыванне два тэрміны для абазначэння аднаго паняцця?

Уласна ў матэматыцы пад алгебраічным выразам разумеюць выраз з пераменнымі, які змяшчае дзеянні складання, аднімання, множання, дзялення і ўзвядзення ў рацыянальную ступень (узвядзенне ў цэлую ступень і здабыванне кораня) (гл., напрыклад, [3. С. 60]). З паняццем алгебраічнага выразу супастаўляецца паняцце трансцэндэнтнага выразу; алгебраічныя выразы раздзяляюцца на рацыянальныя і ірацыянальныя, у сваю чаргу рацыянальныя выразы складаюцца з цэлых і дробава-рацыянальных выразаў. Атрымліваецца, што тэрмін "алгебраічны выраз" у вучэбным дапаможніку [2] напаўняецца зместам, які адрозніваецца ад таго, які ёсць у матэматычнай навуцы.

Неапраўдана звужаной у дапаможніку [2] з'яўляецца трактоўка формулы як залежнасці паміж пераменнымі: "...$s = 400 - 80t$. Левая часть этого равенства содержит переменную s, правая — переменную t, а само равенство выражает зависимость между переменными s и t. Такие равенства называют формулами" (с. 76). Разам з гэтым тэрмін "формула" ва ўказаным дапаможніку прымяняецца як для роўнасцей $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (с. 192), так і да іх падобных, якія залежнасцямі не з'яўляюцца. У матэматыцы прыняты лагічна просты падыход да трактоўкі паняцця «формула». У матэматычным энцыклапедычным слоўніку [3] пад формулай маецца на ўвазе камбінацыя матэматычных знакаў, што выражае які-небудзь сказ. У якасці прыкладаў прыведзены наступныя запісы:

$$x^3 + y^3 < z;\ 2 \times 2 = 4;\ \Delta ABC \infty \Delta EFG;\ 2 \times 2 = 5;\ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$\int_0^1 x^5 dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{i}{n}\right)^5 \cdot \frac{1}{n};\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

Усе формулы падзяляюцца на два класы: формулы-выразы, якія могуць быць ацэнены як праўдзівыя або непраўдзівыя, і формулы-прэдыкаты, якія ператвараюцца ў выразы пасля замены ўваходзячых у формулу пераменных іх значэннямі з пэўнага прадметнага абсягу. З формул-прэдыкатаў вылучаюць тоесна праўдзівыя формулы, або тоеснасці, г. зн. такія, якія ператвараюцца ў праўдзівыя выказванні пры любым выбары з пэўнага прадметнага абсягу значэнняў, уваходзячых у іх пераменных. Праўдзівыя выказванні і тоесна праўдзівыя ў пэўным абсягу формулы выкарыстоўваюць для запісу матэматычных законаў. Пры гэтым тоесна праўдзівым формулам у матэматыцы часта надаюць інтэрпрэтацыю ўсеагульнасці. Напрыклад, найбольш распаўсюджанае разуменне формулы $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ заключаецца ў тым, што яе лічаць скарочаным запісам сцверджання "для любых лікаў a і b праўдзіцца роўнасць $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$" [3. С. 610]. Алгебраічныя формулы без звязаных пераменных раздзяляюцца на ўраўненні і няроўнасці. Ураўненне ёсць формула, што змяшчае знак "=", няроўнасць — формула, што змяшчае адзін са знакаў "≠", "<", ">", "⩾", "⩽". Як бачна, гэты падыход лагічна вытрыманы і не патрабуе штучных агаворак.

Непраяснёнасць асноўных паняццяў адбіваецца на якасці аўтарскіх тэкстаў.

"П р ы м е р 1. При каких значениях x имеет смысл выражение: а) $A = x - 7$; б) $B = \frac{1+5x}{x-7}$?" (с. 24).

Сказ-пытанне пабудаваны так, быццам запісы пасля двухкроп'я — выразы. Але ж гэта формулы, нават і ў аўтарскай трактоўцы. Выразамі аўтары называюць аб'екты, якія імі не з'яўляюцца. Напрыклад:

"Алгебраическими выражениями пользуются для записи свойств сложения и умножения чисел. Напомним эти свойства.

1. Переместительный закон сложения:
$a + b = b + a$.

2. Сочетательный закон сложения:
$(a + b) + c = a + (b + c)$ ..." [2. С. 14].

Зразумела, што $a + b = b + a$ і $(a + b) + c = a + (b + c)$ ёсць не выразы, а формулы. Можна знайсці тлумачэнне, якое быццам бы засведчыць фармальную правільнасць прыведзенага сцверджання, бо выразы, як часткі формул, сапраўды маюць дачыненне да запісу ўласцівасцей. Але гэта часткі формул, а саму ўласцівасць цалкам выражае менавіта формула.

Азначэнні

Азначэнні з'яўляюцца адным з асноўных кампанентаў вучэбнай кнігі. На іх ускладаецца функцыя ўвядзення новага паняцця. Гэта вельмі адказны момант, бо правільнымі першымі ўяўленнямі вучня пра ўводзімае паняцце ў значнай меры забяспечваецца паспяховае ўключэнне новага паняцця ў сістэму ўжо сфарміраваных паняццяў. Трэба мець на ўвазе, што ў вучэбнай кнізе па неабходнасці даводзіцца карыстацца як яўнымі, так і няяўнымі азначэннямі. Пры гэтым карыстанне яўным азначэннем апраўдана толькі тады, калі паняцці, што выкарыстаны ў азначніку, у дастатковай меры асвоены вучнямі. У адваротным выпадку мэта, што стаіць перад азначэннем, не будзе дасягнутай: нельга азначаць невядомае праз невядомае. Падобная памылка азначэння ў логіцы называецца памылкай idem per idem. Калі ж глеба для яўнага азначэння не падрыхтавана, тады карыстаюцца рознымі відамі няяўнага азначэння — кантэкстуальным, астэнсіўным, аксіяматычным і інш.

Аналіз сістэмы азначэнняў вучэбнага дапаможніка [2] пачнём з характарыстыкі таго, як уводзіцца паняцце арыфметычнага выразу.

"В пятом классе мы изучали *арифметические действия* над рациональными числами: сложение, вычитание, умножение и деление. В дальнейшем мы будем изучать и *некоторые другие действия над ними* (вылучэнні нашы. — **Л. Л., Б. Ч.**). Сложение, вычитание и умножение чисел возможны для любых чисел, а деление нет, поскольку на нуль делить нельзя. Для обозначения действия деления наряду со знаком ":" употребляется также и дробная черта.

Иногда бывает необходимо записать последовательность действий над числами. Например, запись

$$(0{,}2 + 1{,}7)\cdot 5$$

означает, что сумму чисел 0,2 и 1,7 нужно умножить на 5, а запись

$$0{,}2 + 1{,}7\cdot 5$$

означает, что число 0,2 нужно сложить с произведением чисел 1,7 и 5. Подобные записи называются арифметическими, или числовыми выражениями.

Таким образом, арифметическое (числовое) выражение — это выражение, составленное из чисел, знаков действий и скобок, указывающих на порядок выполнения этих действий" (с. 5).

У першым сказе ўвага акцэнтуецца на тым, што вывучаліся "арифметические действия". Таму словазлучэнне "некоторые другие действия" з другога сказа сэнсава дапасуецца менавіта да арыфметычных дзеянняў. Атрымліваецца, што будуць вывучацца іншыя, г. зн. неарыфметычныя дзеянні. Якія?

Двухсэнсоўна ўспрымаецца і канец другога сказа "действия над ними". Калі арыентавацца толькі на структуру абзаца, то сэнсава "действия над ними" дапасуецца да аб'ектаў, названых апошнімі ў першым сказе "сложение, вычитание, умножение и деление". Атрымліваецца, што будуць вывучацца дзеянні над дзеяннямі.

Бачым, што аўтары няправільна расставілі сэнсавыя акцэнты.

У сказе "Сложение, вычитание и умножение чисел возможны для любых чисел, а деление нет, поскольку на нуль делить нельзя" дапушчана прастамоўнае словазлучэнне "сложение возможно". Нормы матэматычнага маўлення ў падобных выпадках патрабуюць ужывання іншага словазлучэння "сложение выполнимо". У падручніках арыфметыкі менавіта такія словазлучэнні і ўжываюцца (гл., напрыклад, [4]).

У сказе "Для обозначения действия деления наряду со знаком ":" употребляется также и дробная черта" зрушаны акцэнты, бо дробавая рыса можа інтэрпрэтавацца як абазначэнне дзеяння дзялення, але гэта пабочная інтэрпрэтацыя.

У наступнай частцы тлумачэння "Иногда бывает необходимо записать последовательность действий над числами. Например, запись

$$(0{,}2 + 1{,}7)\cdot 5$$

означает, что сумму чисел 0,2 и 1,7 нужно умножить на 5, а запись

$$0{,}2 + 1{,}7\cdot 5$$

означает, что число 0,2 нужно сложить с произведением чисел 1,7 и 5" паясняльная частка пасля слова "например" не карэлюе з папярэдняй сцвярджальнай часткай. Сапраўды, напачатку сцвярджаецца, што ў пэўнай сітуацыі можа ўзнікнуць патрэба запісаць паслядоўнасць дзеянняў над лікамі. Натуральна, што пасля гэтага павінен ісці прыклад, дзе фармулюецца такая сітуацыя і затым паказваецца працэс узнікнення адпаведнага запісу.

Такім чынам, у кантэксце, што ўводзіць паняцце лікавага выразу, мы назіраем наступныя памылкі: няправільная расстаноўка сэнсавых акцэнтаў (два разы ў першым абзацы); ужыванне прастамоўнага словазлучэння (трэці сказ); зрушэнне акцэнтаў у інтэрпрэтацыі знака рысы дробу (чацвёрты сказ); лагічная памылка non sequitur у другім абзацы (гл. [5. С. 266]). З лагічнага пункту гледжання, прааналізаваны тэкст ёсць кантэкстуальнае азначэнне паняцця лікавага выразу. Наяўнасць такой колькасці памылак недапушчальная, тым больш, што яны не кампенсуюцца заключным сказам "Таким образом, арифметическое (числовое) выражение — это выражение, составленное из чисел, знаков действий и скобок, указывающих на порядок выполнения этих действий", які, як можна меркаваць, аўтары лічаць яўным азначэннем паняцця лікавага выразу. Але ці выконвае прыведзены сказ функцыю азначэння? У якасці радавога паняцця выступае паняцце "выражение". Але паняцце выразу да гэтага не было ніяк растлумачана (памылка idem per idem).

Сэнс цэнтральнага для школьнай алгебры паняцця алгебраічнага выразу растлумачваецца такім тэкстам [2. С. 9]:

"В арифметическом выражении

$$\frac{(2-3)(4+3)}{5-4}$$

заменим число 3 буквой x, а число 5 — буквой y. В результате получится выражение

$$\frac{(2-x)(4+x)}{y-4}$$

Подобные выражения называют алгебраическими, или буквенными".

Гэта апісанне стварае ўражанне, што алгебраічны выраз ёсць выраз, атрыманы з лікавага выразу ў выніку замены некаторых лікаў пераменнымі. Як бачым, аўтары тут дапускаюць памылку fallacia fictae universalitatis (паспешлівага абагульнення): яны апісалі толькі адну, і прытым не самую важную, сітуацыю, якая вядзе да ўзнікнення выразу з пераменнымі, і адразу пасля гэтага далі яўнае азначэнне: "Выражение, составленное из чисел, букв, знаков арифметических действий и скобок, указывающих на порядок выполнения этих действий, называют алгебраическим".

Логіка-дыдактычны аналіз паняцця выразу з пераменнымі паказвае, што яўнае азначэнне тут не да месца, бо радавое паняцце выразу і паняцце літары, што выкарыстоўваюцца аўтарамі ў азначніку, а таксама правілы складання (утварэння) у папярэднім навучанні сфарміраваны не ў такой меры, каб на іх абапірацца ў яўным азначэнні. Па дыдактычных меркаваннях тут лепш абмежавацца астэнсіўным ці кантэкстуальным азначэннем. З-за імкнення да празмернай строгасці абцяжараным атрымалася азначэнне значэння лікавага выразу (с. 6).

Невыразнасць трактовак асноўных паняццяў паўплывала і на неакрэсленасць структуры першага раздзела цалкам. Акрамя вызначальных пунктаў 1.1, 1.2 і 1.4, раздзел змяшчае яшчэ два алгебраічныя пункты (пункт 1.3, прысвечаны ўласцівасцям арыфметычных дзеянняў, і пункт 1.5, у якім разглядаюцца падобныя складаемыя), якія ў аўтарскім выкладанні амаль не звязаны з цэнтральным паняццем алгебраічнага выразу, што вынесены ў загаловак раздзела.

У вучэбным дапаможніку [2] назіраецца тэндэнцыя да аксіяматычнага стылю выкладання, асабліва ў карыстанні азначэннямі. Яна праяўляецца ў тым, што даюцца азначэнні нават тым паняццям, якія па дыдактычных меркаваннях, гэтага не патрабуюць. Вось толькі некаторыя прыклады квазіазначэнняў:

"Сложение подобных слагаемых называется приведением подобных слагаемых" (с. 29).

"Привести подобные слагаемые — это значит сумму их коэффициентов умножить на их общую часть" (с. 160).

"Сложить два многочлена — это значит представить их сумму в стандартном виде.

Вычесть из одного многочлена другой — это значит представить их разность в стандартном виде" (с. 167).

"Умножить многочлен на одночлен (или одночлен на многочлен) — это значит каждый член многочлена умножить на этот адночлен и полученные одночлены сложить" (с. 170—171).

У пераважнай большасці такіх выпадкаў метадычна апраўданы кантэкстуальныя ці астэнсіўныя азначэнні, або азначэнні зусім не патрэбны.

У азначэнні цэлага выразу (с. 178) дапушчана памылка вузкага азначэння, бо ў адпаведнасці з ім выраз $\frac{x+2}{3}$ не з'яўляецца цэлым.

У вучэбным дапаможніку [2] уведзены шэраг паняццяў, якія не атрымліваюць неабходнай тэарэтычнай і практычнай нагрузкі.

Гэта выкарыстанне адразу трох тэрмінаў для абазначэння паняцця пераменнай — гэта ўласна пераменная (с. 23), літара (с. 9) і невядомае (с. 62); двух паняццяў, звязаных з абсягам вызначэння выразу — проста абсяг вызначэння і натуральны абсяг вызначэння (с. 24); шэраг паняццяў з тэорыі мнагачленаў — нулявы адначлен (с. 149), адначлен нулявой ступені (с. 152), нулявы мнагачлен (с. 158), супрацьлеглыя мнагачлены (с. 168), нераскладальны мнагачлен (с. 224).

Сцверджанні

Сцверджанні ў падручніку займаюць адно з самых важных месцаў, імі ў сціслай форме выражаюцца асноўныя тэарэтычныя факты. Таму фармулёўкі сцвярджэнняў павінны быць выразнымі і па магчымасці кароткімі.

На с. 23 [2] у сказе-сцвярджэнні "В область определения любого выражения могут входить только те значения переменной, при которых получается арифметическое выражение, имеющее смысл" выкарыстана не адпаведная разнавіднасць фактычнай мадальнасці: замест алетычнага тэрміна "неабходна" ўжыты алетычны тэрмін "магчыма". Сапраўды, прыведзенае суджэнне ёсць суджэнне фактычнай магчымасці (гл., напрыклад, [5. С. 107]), якое змяшчае інфармацыю аб прынцыповай сумяшчальнасці дзвюх з'яў: з'явы, аб якой гаворыцца ў суджэнні, і з'явы-адмоўя. Гэта азначае, што прыведзенае суджэнне трэба інтэрпрэтаваць так: у абсяг вызначэння выразу ўказаныя значэнні пераменнай могуць уваходзіць, а могуць і не ўваходзіць.

У сказе-эквіваленцыі $A \sim B$ "Произведение n множителей, равных a, обозначается a^n, т. е. $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ раз}$" [2. С. 103], які фіксуе раўназначнасць двух сцвярджэнняў, звязаных з азначэннем ступені з натуральным паказчыкам, дапушчаны дзве некарэктнасці. Па-першае, сцвярджанне A гаворыць пра тое, што здабытак абазначаецца a^n, г. зн. A слоўна сцвярджае пераход ад $\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ раз}$ да a^n, а B сімвальна сцвярджае адваротны пераход ад a^n да $\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ раз}$, таму па фармальных прыкметах, гэты сказ нельга лічыць карэктным. Па-другое, тлумачэнне "n раз" няўзгоднена з запісам $a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$, да якога яно адносіцца, бо калі множанне выконваецца n разоў, то множнікаў ёсць $n + 1$, таму атрымаецца ступень a^{n+1}, а не a^n.

Сказ "Площадь трапеции равна произведению полусуммы длин оснований и длины высоты" [2. С. 247] граматычна пабудаваны так, што ў яго канцы нагрувашчана пяць аднародных дапаўненняў у родным склоне: "полусуммы", "длин", "оснований", "длины", "высоты", і таму яны ўспрымаюцца дапасаванымі да яшчэ аднаго дапаўнення — "произведению", але ўжо ў давальным склоне. Таму сэнсава словазлучэнне "полусуммы длин оснований и длины высоты" ўспрымаецца як адно цэлае. Такая фармулёўка не дапамагае запамінанню формулы плошчы трапецыі.

Абгрунтаванні

Асаблівасцю ўведзеных у падручнік сцверджанняў з'яўляецца тое, што яны патрабуюць адпаведнага абгрунтавання. Яно можа быць як індуктыўным, так і дэдуктыўным. У шостым класе па неабходнасці пераважаюць, як і ў папярэдніх класах, індуктыўныя падыходы. Разам з гэтым паступова павінны з'яўляцца і доказныя элементы. Але сістэма абгрунтаванняў павінна быць узважанай. Доказ да месца тады, калі яго неабходнасць усведамляецца вучнем і калі структура гэтага доказу вучню зразумелая. У гэтым сэнсе сістэма абгрунтаванняў у вучэбным дапаможніку [2] небясспрэчная. Прааналізуем наступны доказ (с. 46).

"Нам известно, что если множители не равны нулю, то и произведение не равно нулю:

если $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то $ab \neq 0$.

Отсюда следует, что если произведение равно нулю, то хотя бы один из множителей равен нулю:

если $ab = 0$, то $a = 0$ или $b = 0$.

Докажем это.

Нам дано, что $ab = 0$ — верное числовое равенство. Если число $a \neq 0$, то существует обратное ему число $\frac{1}{a} \neq 0$.

Умножив обе части равенства $ab = 0$ на число , получим (по свойству 2) верное числовое равенство

$$\frac{1}{a}(ab) = \frac{1}{a} \cdot\ 0, \text{ т. е. } b = 0".$$

Па-першае, аўтары тут лагічна не паслядоўныя. Яны аб'явілі, што са сцверджання "калі $a \neq 0$ і $b \neq 0$, то $ab \neq 0$" лагічна вынікае "калі $ab = 0$, то $a = 0$ або $b = 0$", а затым праводзяць доказ, у якім спасылка "калі $a \neq 0$ і $b \neq 0$, то $ab \neq 0$" ніяк не выкарыстоўваецца. Аб'яўленае выніканне сапраўды праўдзіцца, і падставай для яго з'яўляюцца лагічныя правілы контрапазіцыі і адмоўя кан'юнкцыі:

"З $A \supset B$ вынікае $\neg B \supset \neg A$"; "$\neg(A \wedge B)$ вынікае $\neg A \vee \neg B$".

Паколькі вучням гэтыя правілы невядомыя, то трэба праводзіць адпаведнае змястоўнае разважанне:

"Няхай $ab = 0$. Дапусцім, што $a \neq 0$ і $b \neq 0$. Тады, выкарыстаўшы сцверджанне "калі $a \neq 0$ і $b \neq 0$, то $ab \neq 0$", атрымаем, што $ab \neq 0$. Але гэта супярэчыць умове $ab = 0$. Таму дапушчэнне "$a \neq 0$ і $b \neq 0$" трэба адхіліць, і тым самым згадзіцца з тым, што хаця адзін з множнікаў a або b роўны нулю, г. зн. $a = 0$ або $b = 0$".

Па-другое, прыведзены ў дапаможніку доказ разборам выпадкаў даволі складаны для ўспрымання вучнямі, тым больш, што ён у дадатак змяшчае энтымемы.

У прыведзеным тэксце "П р и м е р 2. Доказать тождество $0a^2bc^3 = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При любых значениях a, b и c значение левой части этого равенства равно нулю, т. е. равно значению его правой части. Значит, равенство $0a^2bc^3 = 0$ является тождеством" [2. С. 151], тоесная праўдзівасць роўнасці $0a^2bc^3 = 0$ для вучняў відавочная. Калі ж і прыводзіць абгрунтаванне, то яно павінна быць завершаным.

Заданне "П р и м е р 6. Уравнения $x^2 = 1$ и $(x - 1)(x + 1) = 0$ равносильны, так как каждое из них имеет одни и те же корни: 1 и -1 (проверьте это)" [2. С. 63], з'яўляецца няпростым: вучні могуць праверыць, што як лік 1, так і лік -1 — карані кожнага з ураўненняў. Яны могуць даказаць, што ўраўненне $(x - 1)(x + 1) = 0$ іншых каранёў не мае. Але як ім даказаць тое, што ўраўненне $x^2 = 1$ іншых каранёў не мае? Адзначым яшчэ стылістычную недакладнасць фразы "каждое из них имеет одни и те же корни".

Сказам з энтымемай "Степень одночлена $-\frac{2}{3}a^2cd^3$ равна 6, так как 2 + 1 + 3 = 6" [2. С. 63] абгрунтоўваецца праўдзівасць сцверджання "Ступень адначлена $-\frac{2}{3}a^2cd^3$ роўная 6". Падставай для гэтага з'яўляецца праўдзівасць сцверджання "2 + 1 + 3 = 6". Атрымліваецца, што са сцверджання "2 + 1 + 3 = 6" вынікае сцверджанне "Ступень адначлена $-\frac{2}{3}a^2cd^3$ роўная 6", але ў разважанні праігнаравана змястоўная сувязь пасылкі і заключэння.

Аўтары даволі часта (гл., напрыклад, с. 63, 178, 257, 269, 283, 289) ужываюць словазлучэнне "отсюда следует", але не растлумачваюць, чым забяспечваецца гэты вынік. Вынікам падобных вольнасцей можа стаць фарміраванне ў вучняў некрытычнага стаўлення да доказнасці ў матэматыцы. Таму ў падобных сітуацыях трэба або прыводзіць самі доказы, або пра доказы не ўпамінаць і адразу гаварыць пра патрэбны вынік.

(Заканчэнне будзе)