А. Б. Чеботаревский, кандидат педагогических наук, старший преподаватель Могилёвского государственного университета имени А. А. Кулешова

НЕРАВЕНСТВА И ОЦЕНКИ В НЕСТАНДАРТНЫХ ЗАДАЧАХ В XI КЛАССЕ

Математика является не только инструментом решения практических задач, аппаратом для обслуживания потребностей других наук, но и мощным средством развития способностей человека к познанию окружающего мира, источником саморазвития. Стало уже многовековой традицией при обучении математике предлагать задачи, выходящие за рамки практических приложений. В Беларуси уже более 15 лет нестандартные задачи предлагаются в школьных учебниках математики, начиная с первого года обучения. И в учебном пособии для XI класса [1] содержатся такие задания, работа над которыми позволит не только обрести опыт поисковой, исследовательской деятельности, но и воспитать необходимые для этого качества: трудолюбие, целеустремлённость, умение планировать свои действия и оценивать их результаты, выдвигать гипотезы и проверять их, развивать наблюдательность, умение анализировать и сопоставлять.

Целью статьи является обсуждение задач, использующих неравенства и оценки. Это объясняется тем, что, с одной стороны, использованию неравенств и оценок при решении задач обычно уделяется меньше внимания, чем тождественным преобразованиям, а с другой стороны, значительным эвристическим потенциалом «прикидки», оценок.

Иногда решение задачи помогает получить несложная оценка сверху или снизу.

62*. Сколько общих точек могут иметь контуры двух четырёхугольников?

Две ломаные могут иметь общий отрезок. В этом случае контуры четырёхугольников имеют бесконечное множество общих точек.

Если нет общего отрезка у двух ломаных, то один отрезок может пересечь замкнутую ломаную из четырёх звеньев не более чем в четырёх точках. Поэтому контуры двух четырёхугольников в рассматриваемом случае не могут иметь более $4 \cdot 4$, т. е. 16 общих точек. Остаётся убедиться, что в действительности все варианты от 0 до 16 общих точек могут быть реализованы (см., например, рис. 1 и 2).

Рисунок 1

Рисунок 2

* Здесь и далее номера задач приводятся по учебном пособию [1].

1218. Какое наименьшее количество уголков из трёх клеток нужно вырезать из шахматной доски, чтобы после этого уже нельзя было вырезать ни одного такого уголка?

Примем во внимание, что из каждого квадрата размером 2×2 должно быть вырезано не менее двух клеток, иначе из оставшейся части можно будет вырезать уголок из трёх клеток. Поскольку шахматная доска разбивается на 16 квадратов размером 2×2, то всего должно быть вырезано не менее $2 \cdot 16$, т. е. 32 клеток. Поэтому из шахматной доски должно быть вырезано не менее 11 уголков. Рисунок 3 говорит о том, что число 11 является ответом задачи.

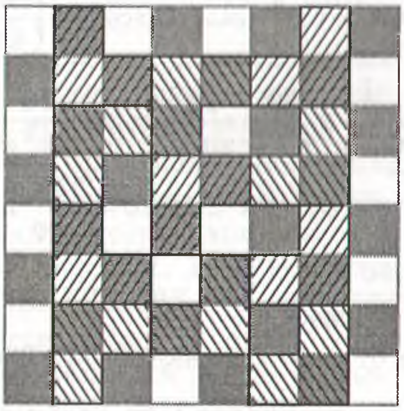


Рисунок 3

В ряде задач предполагается умение проводить несложные оценки, использовать известные свойства неравенств.

124. Определите, какое из чисел больше: $2007^{2009} \cdot 2009^{2007}$ или 2008^{4016}.

Оценим выражение $\dfrac{2007^{2009} \cdot 2009^{2007}}{2008^{4016}}$.

Будем иметь:

$$\frac{2007^{2009} \cdot 2009^{2007}}{2008^{4016}} = \frac{(2008-1)^{2009} \cdot (2008+1)^{2007}}{2008^{4016}} = \frac{\left(2008^2-1\right)^{2007} \cdot (2008-1)^2}{2008^{4016}} < \frac{\left(2008^2\right)^{2007} \cdot 2008^2}{2008^{4016}} = 1.$$

Поэтому: $2007^{2009} \cdot 2009^{2007} < 2008^{4016}$.

256. Неравенство $x^2+px+q>0$ (p и q — целые числа) истинно при всех целых значениях x. Докажите, что $p^2<4q$.

Если p — число чётное, то значение многочлена x^2+px+q при $x=-\dfrac{p}{2}$ положительно по условию: $\left(-\dfrac{p}{2}\right)^2+p\left(-\dfrac{p}{2}\right)+q>0$, т. е. $-\dfrac{p^2}{4}+q>0$ и $p^2<4q$.

Пусть p — число нечётное, $p=2k+1$, где $k \in \mathbf{Z}$. По условию $(-k)^2+p \cdot (-k)+q>0$, т. е. $-k^2-k+q \geq 1$. Тогда $\left(-\dfrac{p}{2}\right)^2+p\left(-\dfrac{p}{2}\right)+$ $+q=\left(-\dfrac{2k+1}{2}\right)^2+(2k+1)\left(-\dfrac{2k+1}{2}\right)+q=-k^2-k-$ $-\dfrac{1}{4}+q \geq 1-\dfrac{1}{4}>0$. Получили, что вершина параболы, ветви которой идут вверх, расположена выше оси абсцисс. Поэтому неравенство $x^2+px+q>0$ истинно при всех действительных значениях x, и значит, дискриминант p^2-4q квадратного трёхчлена x^2+px+q отрицателен: $p^2<4q$.

297. Из чисел от 1 до 50 образовали 10 групп по пять чисел в каждой группе. Определите, какой может быть наибольшая сумма средних по величине чисел из этих 10 групп и какой — наименьшая.

Упорядочим средние числа в пятёрках по возрастанию: $a_1<a_2<\ldots<a_{10}$. Для каждого числа a_k есть $k-1$ число a_1, a_2, …, a_{k-1}, меньшее a_k, и $10-k$ чисел a_{k+1}, …, a_{10}, больших a_k. Поэтому из всех 50 чисел вместе с ними меньшими a_k будут по три числа в каждой из этих групп, да ещё два числа из группы, в которой находится a_k, а большими a_k будут, аналогично, $3(10-k)+2$ числа. Поэтому истинны оценки $3k \leq a_k \leq 50-3(10-k)-2$. Нетрудно убедиться, что эти оценки достижимы.

Наибольшее значение суммы средних по величине чисел в 10 группах будет $21+24+\ldots+48$, т. е. 345, а наименьшее — $3+6+\ldots+30$, т. е. 165.

363. Найдите все решения системы неравенств

$$\begin{cases} x^2-4xy+1\le 0,\\ 2y^2+2y-x\le 0.\end{cases}$$

Сложив первое неравенство с удвоенным вторым, получим, что $x^2-4xy+4y^2-2x+4y+1\le 0$, т. е. $(x-2y-1)^2\le 0$. Следовательно, $x-2y-1=0$ и $x=2y+1$. С учётом этого система принимает вид

$$\begin{cases} 1\le 2y^2,\\ 2y^2\le 1,\\ x=2y+1,\end{cases}$$ откуда находим, что $y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Поэтому решениями исходной системы неравенств являются пары $\left(\sqrt{2}+1;\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и $\left(-\sqrt{2}+1;\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

1285. Две высоты треугольника равны 12 и 20. Какой может быть третья высота этого треугольника?

Примем во внимание соотношения, связывающие высоты треугольника, стороны, к которым они проведены, и площадь S этого треугольника: $2S=a\cdot 12$, $2S=b\cdot 20$, $2S=c\cdot h$. Отсюда получаем, что $a=\dfrac{2S}{12}$, $b=\dfrac{2S}{20}$ и $c=\dfrac{2S}{h}$. Поскольку сторона c меньше суммы двух других сторон треугольника и больше их разности, то $\dfrac{2S}{12}-\dfrac{2S}{20}<\dfrac{2S}{h}<\dfrac{2S}{12}+\dfrac{2S}{20}$ и $\dfrac{1}{12}-\dfrac{1}{20}<\dfrac{1}{h}<\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{20}$.

А так как $\dfrac{1}{30}<\dfrac{1}{h}<\dfrac{2}{15}$, то $7{,}5<h<30$.

Остаётся доказать, что каждое число из промежутка (7,5; 30) может быть значением h. Рассмотрим пересечение полос шириной 20 и 12.

В треугольнике ABC, две стороны которого идут по сторонам полосы (рис. 4), при любом значении угла C высоты h_A и h_B равны 20 и 12. Выразим третью высоту h как функцию угла ACB. Пусть

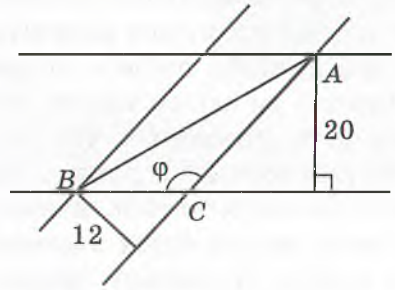


Рисунок 4

$\angle ACB=\varphi$. Тогда $CA=\dfrac{20}{\sin\varphi}$, $CB=\dfrac{12}{\sin\varphi}$,

$AB^2=CA^2+CB^2-2CA\cdot CB\cos\varphi=\left(\dfrac{20}{\sin\varphi}\right)^2+\left(\dfrac{12}{\sin\varphi}\right)^2-2\dfrac{20}{\sin\varphi}\cdot\dfrac{12}{\sin\varphi}\cos\varphi=\dfrac{16}{\sin^2\varphi}(34-30\cos\varphi)$, $2S=CA\cdot CB\sin\varphi=\dfrac{240}{\sin\varphi}$ и $h=\dfrac{2S}{AB}=\dfrac{60}{\sqrt{34-30\cos\varphi}}$. Так как при увеличении угла φ от 0 до π функция $34-30\cos\varphi$ возрастает от 4 до 64, то функция $\dfrac{60}{\sqrt{34-30\cos\varphi}}$ в этом случае будет убывать от 30 до 7,5, принимая все промежуточные значения.

1509. Докажите неравенство $\dfrac{1+a}{1-2a}+\dfrac{1+b}{1-2b}+\dfrac{1+c}{1-2c}>6$, учитывая, что a, b и c — стороны треугольника с периметром 1.

Так как $a+b+c=1$, то $1-2a=b+c-a$, $1-2b=a-b+c$, $1-2c=a+b-c$. Поскольку $0<b+c-a<1$, $0<a-b+c<1$, $0<a+b-c<1$, то $\dfrac{1+a}{1-2a}+\dfrac{1+b}{1-2b}+\dfrac{1+c}{1-2c}=3+\dfrac{3a}{b+c-a}+\dfrac{3b}{a-b+c}+\dfrac{3c}{a+b-c}>3+3(a+b+c)=6$.

850. Найдите разность между наибольшим и наименьшим кратными 11 десятизначными числами, в десятичной записи которых цифры не повторяются.

Воспользуемся признаком делимости на 11: число делится на 11 тогда и только тогда, когда делится на 11 разность между суммой a цифр, стоящих на чётных местах, и суммой b цифр, стоящих на нечётных местах. Поскольку в каждом числе должны быть использованы все цифры, то $a+b=45$. Примем во внимание, что наименьшее значение для a и b равно $0+1+2+3+4$, т. е. 10, а наибольшее — $9+8+7+6+5$, т. е. 35, и, кроме того, что значения выражений $a+b$ и $a-b$ имеют одинаковую чётность. Поэтому должна выполняться система

$$\begin{cases} a+b=45, \\ a-b=\pm 11. \end{cases}$$

Решениями этой системы являются пары (28; 17) и (17; 28).

Наибольшее из десятизначных чисел, записанных различными цифрами, должно иметь вид 98765*****. Для получения кратного 11 десятизначного числа, записанного различными цифрами, на остальные чётные места запишем в порядке убывания цифры 2, 1, 0, поскольку только их сумма дополняет сумму $8+6$ до 17. Оставшиеся цифры — 4 и 3 — также по убыванию запишем на нечётные места. Получим число 9876524130.

Наименьшее из десятизначных чисел, записанных различными цифрами, должно иметь вид 102*******. Для получения наименьшего нужного числа на остальных нечётных местах нужно использовать цифры, сумма которых равна $17-(1+2)=14$. Из трёх цифр одна должна быть чётной, а ещё две иметь одинаковую чётность. Так как $4+6+8=18$ и $18>14$, то должны быть использованы две нечётные и одна чётная цифры. Одной из нечётных цифр должна быть цифра 3. Её следует поставить на пятое место. Тогда четвёртое место следует занять цифрой 4, поскольку все другие десятизначные числа будут большими. На седьмое и девятое места необходимо записать цифры 5 и 6, сумма которых дополняет сумму $1+2+3$ до 17. Поставив на чётные места цифры 0, 4, 7, 8 и 9 в порядке возрастания, получим наименьшее десятизначное число, записанное различными цифрами и кратное 11, — число 1024375869. Искомая разность будет 8852148261.

1394. Найдите все тройки неотрицательных чисел, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} x^2\sqrt{1-y}=\sqrt{1-z}, \\ y^3\sqrt{1-x}=z^3. \end{cases}$$

Из условия следует, что числа x, y и z должны принадлежать промежутку [0; 1].

Если $x=0$, то из второго уравнения следует, что $y^3=z^3$, т. е. что $y=z$, а из первого — что $z=1$.

Если $x=1$, то из второго уравнения следует, что $z=0$, а из первого — что $y=0$.

Пусть теперь $x\in(0;\ 1)$. Тогда и $x^2\in(0;\ 1)$, а потому $\sqrt{1-y}>\sqrt{1-z}$ и $y<z$. А тогда $y^3<z^3$ и из второго уравнения следует, что $\sqrt{1-x}>1$, что невозможно, если $x\in(0;\ 1)$. Значит, рассматриваемая система не имеет решений, для которых $x\in(0;\ 1)$.

Таким образом, неотрицательными решениями данной системы являются наборы (0; 1; 1) и (1; 0; 0).

В ряде задач используется известное соотношение между средним арифметическим и средним геометрическим.

181. Докажите, что если положительные числа a, b, m, n удовлетворяют неравенству $ab>am+bn$, то они удовлетворяют и неравенству $\sqrt{a+b}>\sqrt{m}+\sqrt{n}$.

Применив свойства неравенств, получим: $b>m+\frac{bn}{a}$, $a>n+\frac{am}{b}$ и $a+b>m+n+\frac{am}{b}+\frac{bn}{a}$. Используя теперь соотношение между средним арифметическим и средним геометрическим, заключаем, что $\frac{am}{b}+\frac{bn}{a}\geq 2\sqrt{\frac{am}{b}\cdot\frac{bn}{a}}$, и потому $a+b>m+n+2\sqrt{mn}=\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}\right)^2$. Следовательно, $\sqrt{a+b}>\sqrt{m}+\sqrt{n}$.

1284. Докажите, что если $xy=1$ и $x>y$, то истинно неравенство

$$\frac{x^2+y^2}{x-y}\geq 2\sqrt{2}.$$

Пусть $x-y=t$. Тогда $x^2+y^2=t^2+2xy=$ $=t^2+2$ и $\dfrac{x^2+y^2}{x-y}=\dfrac{t^2+2}{t}=t+\dfrac{2}{t}\ge 2\sqrt{t\cdot\dfrac{2}{t}}=2\sqrt{2}$.

«Недоопределённость» уравнения или системы является одним из признаков скрытой в условии экстремальности, которая позволит получить дополнительные условия.

616. Решите уравнение

$$\sqrt{x_1-1^2}+2\sqrt{x_2-2^2}+\ldots+n\sqrt{x_n-n^2}=$$
$$=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{2}.$$

Используя неравенство, связывающее среднее геометрическое и среднее арифметическое, будем иметь: $1\cdot\sqrt{x_1-1^2}\le\dfrac{1+(x_1-1)}{2}=$ $=\dfrac{x_1}{2}$, $2\cdot\sqrt{x_2-2^2}\le\dfrac{2^2+(x_2-2^2)}{2}=\dfrac{x_2}{2}$, ..., $n\cdot\sqrt{x_n-n^2}\le\dfrac{n^2+(x_n-n^2)}{2}=\dfrac{x_n}{2}$, и $\sqrt{x_1-1^2}+$ $+2\sqrt{x_2-2^2}+\ldots+n\sqrt{x_n-n^2}\le\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{2}$.

Поскольку в соответствии с условием левая и правая части последней формулы связаны знаком равенства, то и все предыдущие формулы должны быть равенствами. Поэтому для всех k от 1 до n будем иметь: $k\cdot\sqrt{x_k-k^2}=\dfrac{x_k}{2}$, откуда $x_k=2k^2$.

953. Решите уравнение

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{2-z^2}+z\sqrt{3-x^2}=3.$$

Здесь также одно уравнение содержит больше одной неизвестной. Поэтому продуктивным будет использование оценок.

Так как $ab\le\dfrac{a^2+b^2}{2}$, то $x\sqrt{1-y^2}\le$ $\le\dfrac{x^2+1-y^2}{2}$, $y\sqrt{2-z^2}\le\dfrac{y^2+2-z^2}{2}$, $z\sqrt{3-x^2}\le$ $\le\dfrac{z^2+3-x^2}{2}$ и, следовательно, $x\sqrt{1-y^2}+$ $+y\sqrt{2-z^2}+z\sqrt{3-x^2}\le 3$. Равенство возможно лишь тогда, когда сомножители одинаковы, т. е. когда выполняется система условий

$$\begin{cases} x=\sqrt{1-y^2},\\ y=\sqrt{2-z^2},\\ z=\sqrt{3-x^2}.\end{cases}$$

Из этой системы следует, что все неизвестные неотрицательны. Поэтому можно решить систему

$$\begin{cases} x^2=1-y^2,\\ y^2=2-z^2,\\ z^2=3-x^2\end{cases}$$

при условии $x\ge0$, $y\ge0$, $z\ge0$. Получаем, что решением исходного уравнения является набор $(1;\ 0;\ \sqrt{2})$.

955. Докажите, что если положительные числа b и c удовлетворяют неравенству $b(1-c)>\dfrac{1}{4}$, то $b>c$.

Поскольку $\dfrac{1}{2}<\sqrt{b(1-c)}$, то с учётом соотношения между средним геометрическим и средним арифметическим $\sqrt{b(1-c)}\le$ $\le\dfrac{b+(1-c)}{2}$ получаем, что $\dfrac{1}{2}<\dfrac{b+(1-c)}{2}$ и $b>c$.

1157. Решите уравнение

$$x^2(1+x^2)^2+y^2(1+y^2)^2=8x^2y^2.$$

Используем и здесь неравенство $a+b\ge2\sqrt{ab}$ между средним арифметическим и средним геометрическим для неотрицательных чисел. Будем последовательно получать:

$$1+x^2\ge 2|x|,\ (1+x^2)^2\ge 4x^2,$$
$$x^2(1+x^2)^2\ge 4x^4,\ y^2(1+y^2)^2\ge 4y^4,$$
$$x^2(1+x^2)^2+y^2(1+y^2)^2\ge 4x^4+4y^4\ge 8x^2y^2.$$

Выясним, при каких условиях получается точное равенство. $4x^4+4y^4=8x^2y^2$ лишь когда $|x|=|y|$; $x^2(1+x^2)^2=4x^4$ либо когда $x^2=0$, либо когда $(1+x^2)^2=4x^2$, т. е. при $|x|=1$; аналогично $y^2(1+y^2)^2=4y^4$ либо при $y=0$, либо при $y=\pm1$.

Таким образом, решениями данного уравнения являются пары (0; 0), (1; 1), (1; −1), (−1; 1), (−1; −1).

1200. Решите уравнение

$$x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1}=xy.$$

Решения следует искать при $x\geq 1$ и $y\geq 1$. Так как $\sqrt{y-1}\leq\frac{1+(y-1)}{2}=\frac{y}{2}$ и $\sqrt{x-1}\leq\frac{x}{2}$, то $x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1}\leq\frac{xy}{2}+\frac{xy}{2}=xy$. Равенство возможно только когда $y-1=1$ и $x-1=1$, т. е. при $x=2$ и $y=2$.

Иногда получить ответ к задаче помогает её геометрическая интерпретация.

848. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+(1-c)^2}+\sqrt{c^2+(1-d)^2}+\sqrt{d^2+(1-a)^2}. \quad (1)$$

Будем рассматривать каждое из слагаемых как длину некоторого отрезка на координатной плоскости. Тогда указанная в условии сумма (1) даст длину ломаной. Выбрав вершины ломаной в точках $O(0;\ 0)$, $A(a,\ 1-b)$, $B(1+a-c,\ 1)$, $C(1+a,\ 2-d)$, $D(2,\ 2)$, найдём, что её длина выражается формулой из условия задачи. Эта длина будет наименьшей, если звенья ломаной составляют отрезок, соединяющий точки $O(0;\ 0)$ и $D(2,\ 2)$. Поэтому наименьшим значением выражения (1) является число $2\sqrt{2}$ при $a=c=1$, $b=d=0$.

1201. Найдите область значений функции

$$y=\sqrt{x^2-6x+13}+\sqrt{x^2-14x+58}.$$

Поскольку

$$\sqrt{x^2-6x+13}+\sqrt{x^2-14x+58}=$$
$$=\sqrt{(x-3)^2+2^2}+\sqrt{(x-7)^2+3^2},$$

то значением функции y является сумма расстояний от точки $M(x;\ 0)$ оси абсцисс до точек $A(3;\ 2)$ и $B(7;\ 3)$. Наименьшая сумма $MA+MB$ равна расстоянию от точки A до точки B_1, симметричной точке B относительно оси абсцисс. Так как $B_1(7;\ -3)$, $AB_1=\sqrt{(7-3)^2+(-3-2)^2}=\sqrt{41}$, то наименьшее значение выражения $\sqrt{x^2-6x+13}+\sqrt{x^2-14x+58}$ равно $\sqrt{41}$ и областью значений функции y является промежуток $\left[\sqrt{41};\ \infty\right[$.

Для получения оценок можно использовать возрастание или убывание некоторой функции.

893. На промежутке $[0;\ 1]$ выбираются числа $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{2008}$. Найдите наибольшее возможное значение выражения

$$x_1+x_2+\ldots+x_{2008}-x_1x_2-$$
$$-x_2x_3-\ldots-x_{2007}x_{2008}-x_{2008}x_1.$$

Данное выражение является линейным по каждой из переменных. Рассматривая это выражение как функцию одной переменной x_i, найдём, что наибольшее своё значение она принимает на концах промежутка, т. е. либо при $x_i=0$, либо при $x_i=1$. Таким образом, нужно выбрать наибольшее значение данного выражения на наборах, состоящих из нулей и единиц.

Учитывая циклическую форму записи исходного выражения, удобно считать, что числа $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{2008}$ расположены на окружности. Если в наборе этих чисел есть три единицы (три нуля), стоящие подряд, то исходное выражение при таком наборе не может принимать максимальное значение, так как при изменении среднего из этих чисел на нуль (на единицу) значение всего выражения увеличится на 1. Следовательно, наибольшее значение исходного выражения равно 1004, и оно достигается при $x_1=x_3=\ldots=x_{2007}=1$, $x_2=x_4=\ldots=x_{2008}=0$ или $x_1=x_3=\ldots=x_{2007}=1$, $x_2=x_4=\ldots=x_{2008}=0$.

1040. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^5+xy^4=y^{10}+y^6, \\ x^6+x^2=8y^3+2y. \end{cases}$$

Набор $(0;\ 0)$ является очевидным решением системы. Будем теперь искать ненулевые решения. Если $y\neq 0$, то систему можно записать в виде

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{y}\right)^5+\frac{x}{y}=y^5+y, \\ \left(x^2\right)^3+x^2=(2y)^3+2y. \end{cases}$$

Так как функции $f(t)=t^5+t$ и $g(t)=t^3+t$ обе являются возрастающими (их производные $f'(t)=5t^4+1$ и $g'(t)=3t^2+1$ везде положительны), то каждое своё значение они принимают только один раз и потому последняя система равносильна системе

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y}=y, \\ x^2=2y, \end{cases}$$

из которой получаем ещё одно решение $\left(\sqrt[3]{4};\ \sqrt[3]{2}\right)$ исходной системы.

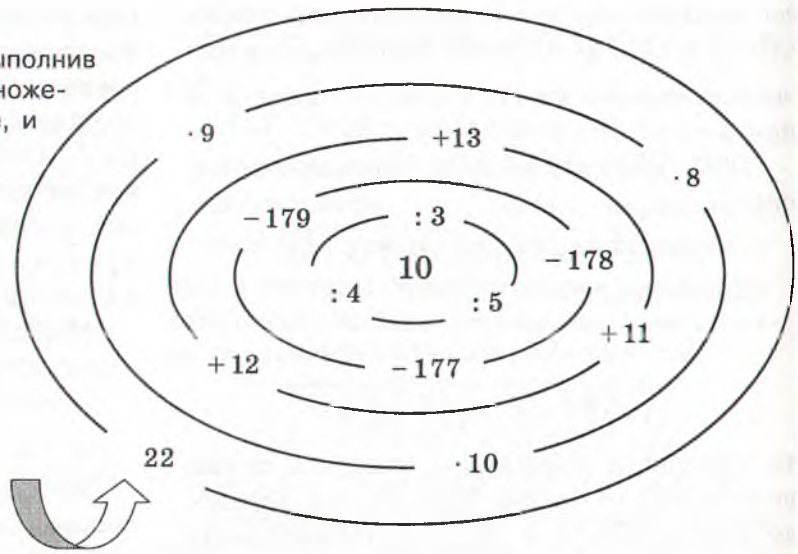
Список использованной литературы

1. *Латотин, Л. А.* Математика: учеб. пособие для 11-го кл. учреждений, обеспечивающих получение сред. образования, с рус. яз. обучения с 12-летним сроком обучения (базовый и повышенный уровни) / Л. А. Латотин, Б. Д. Чеботаревский. — Минск : Народная асвета, 2007. — 445 с.: ил.

Занимательные домашние задания для пятиклассников

Пройди числовой лабиринт, выполнив последовательно необходимые умножение, сложение, вычитание и деление, и получи в ответе число 10.

Ответ: $(22\cdot 9+11-179):3=10$.



Идея: Л. Г. Петерсон. «Математика, 4 класс»