Л.І.Таўгень, доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар,
Л.А.Латоцін, кандыдат педагагічных навук, дацэнт,
Б.Дз.Чабатарэўскі, кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт

Якім быць школьнаму падручніку матэматыкі

Якасць школьнага навучання матэматыцы вызначаюць настаўнік і падручнік — той, хто вучыць, і тое, па чым ён вучыць. Гэта стала вельмі відавочным пасля таго, як у навучальным плане наменклатура матэматычных дысцыплін звялася да аднаго радка — матэматыка, а колькасць тыднёвых гадзін матэматыкі зменшылася да 5. Пры двух падручніках па алгебры і геаметрыі настаўніку давялося самому вызначаць паслядоўнасць вывучэння змешчанага ў іх матэрыялу. Зразумела, што гэтая складаная праблема інтэгравання зместу пад сілу далёка не кожнаму настаўніку.

Праблема інтэгравання зместу — не новая для нашай школы, і стымулявалася яна скарачэннямі колькасці часу, што адводзіўся ў вучэбным плане на вывучэнне матэматыкі. У прыведзенай ніжэй табліцы паказаны час на вывучэнне матэматыкі ў навучальных планах розных вучэбных гадоў.

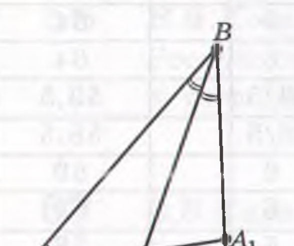
Навучальны год	Колькасць тыднёвых гадзін у класе											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Усяго
1934/35	5	5	5	6	6/5	5	4/5	4/5	5	5		50,5
1940/41	7	7	6	7	7	6	6	6	6	6		64
1945/46	7	7	6	7	7	6	6	6	6	6		64
1950/51	6	7	6	7	7	7	6	6	6	6		64
1956/57	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6/5		59,5
1962/63	6	6	6	6	6	6	6	5	6	6/5		58,5
1967/68	6	6	6	6	6	6	6	5	6	6		59
1972/73	6	6	6	6	6	6	6	5	6	6		59
1977/78	6	6	6	6	6	6	6	6	5	5		58
1982/83	6	6	6	6	6	6	6	6	5	4		57
1987/88	6	6	6	6	6	6	6	6	4/5	4		56,5
1988/89	4	6	6	6	6	6	6	6	6	4/5	4	60,5

Можна заўважыць тэндэнцыю паступовага скарачэння часу, што адводзіцца на вывучэнне матэматыкі. Разам з гэтым змянялася і наменклатура школьных матэматычных прадметаў. У 40-я і 50-я гады такіх прадметаў было чатыры: у першыя пяць гадоў вывучалася арыфметыка, якую змянялі алгебра і геаметрыя і да якіх у IX—X класах далучалася трыганаметрыя. У 60-я гады скасоўваецца трыганаметрыя як вучэбны прадмет, яе змест часткова скарочаны і размеркаваны паміж геаметрыяй і алгебрай: трыганаметрыя прамавугольнага і адвольнага трохвугольнікаў разглядаецца ў геаметрыі, трыганаметрычныя выразы, функцыі, ураўненні і няроўнасці — у алгебры. З канца 60-х гадоў, калі ў змест матэматыкі I—V класаў уключаюцца элементы геаметрычнай і алгебраічнай прапедэўтыкі, змяняецца назва вучэбнага прадмета гэтых гадоў вывучэння: арыфметыка становіцца матэматыкай. Апошнія вучэбныя планы, у якіх на матэматыку ў VI—XI класах вылучаны 4 тыднёвыя гадзіны, паставілі на парадак дня праблему размеркавання вучэбнага часу паміж алгебраічным і геаметрычным кампанентамі школьнай матэматыкі. Пры магчымым мінімуме ў 2 гадзіны на вывучэнне геаметрыі на алгебру застаецца таксама 2 гадзіны, што ўяўляецца ўжо недастатковым. Застаецца адзінае магчымае выйсце — выкласці змест у адной вучэбнай кнізе, правёўшы пры гэтым змястоўную інтэграцыю. Праблема становіцца яшчэ больш вострай, калі ўлічыць, што па выніках навучання за чвэрць, год вучню выстаўляецца па матэматыцы адзіная адзнака.

Мы прывялі знешнія аргументы на карысць інтэграванага падручніка. Цяпер спынімся на ўнутраных аргументах. Іх аснову складаюць лініі, вакол якіх групуецца змест школьнай матэматыкі.

Аналіз зместу школьнай алгебры прыводзіць да вываду, што яго аснову складае вывучэнне выразаў. Спачатку вывучаюцца *цэлыя выразы*, аснову тэорыі якіх складаюць уласцівасці арыфметычных дзеянняў і формулы скарочанага множання. Наступным крокам з'яўляецца вывучэнне *рацыянальных выразаў*, тэорыя якіх грунтуецца на ўласцівасцях дзеянняў над рацыянальнымі дробамі. Вывучэнне дзеяння здабывання кораня — аднаго з дзеянняў, адваротных дзеянню ўзвядзення ў натуральную ступень, уводзіць у разгляд *ірацыянальныя выразы*, якія разам з рацыянальнымі выразамі даюць мноства *алгебраічных выразаў*. Наступны крок звязаны з вывучэннем трансцэндэнтных дзеянняў знаходжання значэнняў сінуса, косінуса, тангенса, катангенса, арксінуса, арккосінуса, арктангенса, арккатангенса, ступені з рэчаісным паказчыкам, лагарыфма, што вядзе да разгляду *трансцэндэнтных выразаў*.

Лікавыя *функцыі*, што вывучаюцца ў школьнай матэматыцы, узнікаюць, калі ў дачыненні да таго ці іншага выразу ставіцца пытанне пра разгляд яго значэнняў пры розных магчымых значэннях уваходных у яго зменных.



Рыс. 1

Разгляд дачыненняў паміж выразамі, якімі ў школьнай матэматыцы з'яўляюцца дачыненні «=», «<», «>» і іх адмоўі «≠», «≥», «≤», прыводзіць да паняццяў *ураўнення* і *няроўнасці*.

Змест школьнай геаметрыі складае вывучэнне геаметрычных фігур, іх уласцівасцей, дачыненняў паміж фігурамі, пры гэтым многія з дадзеных уласцівасцей і дачыненняў атрымліваюць формульныя выяўленні ўраўненнямі і няроўнасцямі. Напрыклад, уласцівасці старон і вуглоў трохвугольніка (рыс. 1) выяўляюцца формуламі:

$$a < b + c; \quad \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ;$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A; \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B};$$

уласцівасці бісектрыс трохвугольніка — формуламі:

$$\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{c}{a}; \quad \frac{AL}{LA_1} = \frac{b+c}{a}; \quad AA_1^2 = bc\left(1 - \left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right); \quad \angle ALB = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle ACB.$$

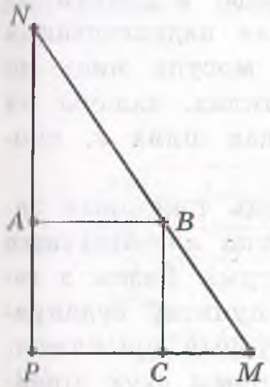
Ёсць разнастайныя формульныя выяўленні для плошчы S трохвугольніка:

$$S=\frac{1}{2}ah;\; S=\frac{1}{2}ab\sin C;\; S=\frac{abc}{4R};\; S=rp;$$

тут h ёсць вышыня трохвугольніка, праведзеная да стараны a, R і r — радыусы апісанай і ўмежанай акружнасцей, p — паўперыметр трохвугольніка.

Гэтая формульнасць геаметрыі стварае моцны падмурак для выкарыстання ў ёй алгебраічных метадаў. Праілюструем гэта прыкладам.

Прыклад 1. Разгледзім такую геаметрычную задачу: «У прамавугольны трохвугольнік MNP з катэтамі m і n умежаны квадрат $PABC$ так, як паказана на рысунку 2. Знайдзіце старану квадрата». Геаметрычнае афармленне рашэння гэтай задачы будзе прыкладна такім.



Рыс. 2

Трохвугольнікі BNA і MNP падобныя, таму

$$\frac{AB}{AN}=\frac{PM}{PN}, \text{ або } AB\cdot PN=AN\cdot PM.$$

Паколькі $AN=PN-PA$ і $PA=AB$,

то $AB\cdot PN=(PN-AB)\cdot PM$,

або $AB\cdot PN=PN\cdot PM-AB\cdot PM$,

або $AB\cdot(PN+PM)=PN\cdot PM$,

або $AB=\dfrac{PN\cdot PM}{PN+PM}$.

Улічыўшы, што па ўмове $PN=m$, а $PM=n$, канчаткова атрымаем:

$$AB=\frac{mn}{m+n}.$$

Вылучым і прааналізуем кампаненты гэтага рашэння. Геаметрычныя факты — прымета падобнасці прамавугольных трохвугольнікаў, прапарцыянальнасць адпаведных старон падобных трохвугольнікаў — дазваляюць скласці зыходнае ўраўненне $\frac{AB}{AN}=\frac{PM}{PN}$ з дзвюма невядомымі велічынямі AB і AN (велічыні PM і PN вядомыя па ўмове). Яшчэ адзін геаметрычны факт — адытыўнасць даўжыні адрэзка — дазваляе звесці гэтае ўраўненне да ўраўнення $AB\cdot PN=(PN-AB)\cdot PM$ з адной невядомай велічынёй AB. Астатнія элементы рашэння гэтага ўраўнення ёсць раўназначныя пераўтварэнні ўраўнення: прымяненне асноўнай уласцівасці прапорцыі; замена адной велічыні другой велічынёй, роўнай ёй; раскрыццё дужак; перанос членаў ураўнення з адной часткі ў другую; вынясенне за дужкі; дзяленне абедзвюх частак ураўнення на не роўны нулю выраз. Гэтыя пераўтварэнні ёсць алгебраічныя элементы рашэння задачы.

Такім чынам, у прыведзеным рашэнні пераважаюць алгебраічныя кампаненты, што выразна бачна з алгебраічнага афармлення рашэння задачы. Абазначым старану квадрата x. Тады $AB=AP=x$, $AN=PN-AP=m-x$. Паколькі трохвугольнікі BNA і MNP падобныя, то

$$\frac{AB}{AN}=\frac{PM}{PN}, \text{ або } \frac{x}{m-x}=\frac{n}{m},$$

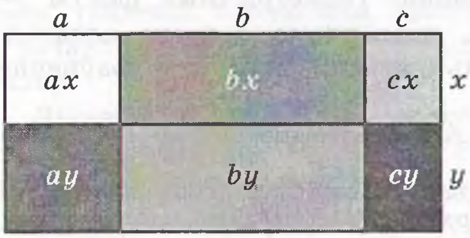
$$\text{або } mx=n(m-x), \text{ або } mx=mn-nx,$$

$$\text{або } x(m+n)=mn, \text{ або } x=\frac{mn}{m+n}.$$

У пэўным сэнсе гэта ёсць тэкставая задача з геаметрычнай фабулай. Наогул, кожны геаметрычны факт-ураўненне дазваляе ўключыць у алгебраічную частку курса матэматыкі адпаведныя тэкставыя задачы. Напрыклад, факт пра сумежныя вуглы дазваляе ў задачы «па суме і рознасным параўнанні», «суме і кратным параўнанні» уключыць такія задачы: «Знайдзіце сумежныя вуглы, улічыўшы, што адзін з іх: а) на 20° большы за другі; б) у тры разы большы за другі; в) на 20° меншы за другі». Падобныя задачы з двума невядомымі значэннямі адной велічыні патрабуюць для сваёй вызначанасці ўказання дзвюх умоў. У прыведзеных задачах адна з дзвюх патрэбных умоў узгадваецца ў фармулёўцы, а другая — $\alpha+\beta=180^{\circ}$ — толькі паднагадваецца. У больш складаных задачах паднагадвацца могуць дзве і больш умоў. Задачы з паднагадванымі ўмовамі могуць мець не толькі геаметрычную фабулу. Да такіх задач адносяцца, напрыклад, задачы на раўнамерны рух, у якіх паднагадваецца ўмова $s=vt$, што звязвае шлях s, скорасць v і час t.

Такім чынам, многія геаметрычныя факты дазваляюць складаць тэкставыя задачы з адпаведнай фабулай, пры рашэнні якіх выкарыстоўваюцца алгебраічныя метады. Гэта ёсць адзін са шляхоў інтэгравання алгебры і геаметрыі. Разам з гэтым інтэграванне магчыма не толькі праз задачы. Ёсць многа пунктаў судакранання і ў тэарэтычным кампаненце падручніка. Прывядзём некаторыя прыклады.

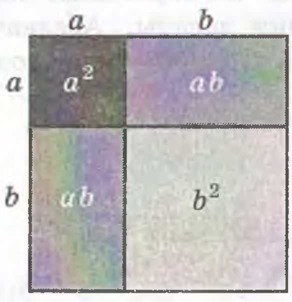
Прыклад 2. Даследаванне пытання пра колькасць рашэнняў сістэмы двух лінейных ураўненняў з дзвюма зменнымі зручна правесці з апорай на геаметрычныя веды. Паколькі лінейнае ўраўненне графічна выяўляецца прамой, а прамыя на плоскасці або перасякаюцца, або паралельныя, або супадаюць, то сістэма двух лінейных ураўненняў з дзвюма зменнымі можа мець адзінае рашэнне, або не мець рашэнняў, або мець бясконца многа рашэнняў. З геаметрычных уяўленняў далей можна вывесці неабходныя і дастатковыя ўмовы для кожнага з гэтых выпадкаў.



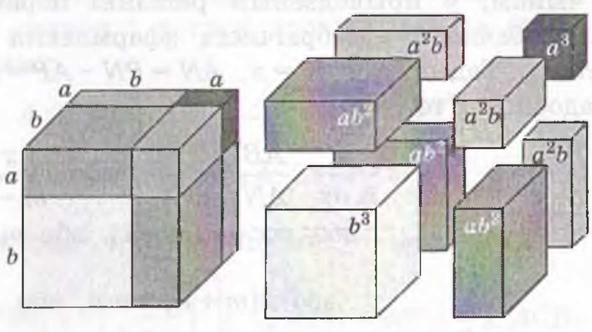
$(a+b+c)(x+y)=ax+bx+cx+ay+by+cy$

Рыс. 3

У шэрагу выпадкаў алгебраічныя факты могуць быць праілюстраваны геаметрычна, што спрыяе больш трываламу іх запамінанню. Гэтае ілюстраванне грунтуецца на тым, што алгебраічныя зменныя могуць мець самыя разнастайныя змястоўныя інтэрпрэтацыі. Калі інтэрпрэтаваць іх як даўжыні, то здабытак дзвюх зменных можна разглядаць як плошчу, а трох зменных — як аб'ём. Тады, напрыклад, правіла множання мнагачлена на мнагачлен ілюструецца рысункам 3, формула квадрата сумы двух лікаў — рысункам 4, формула куба сумы двух лікаў — рысункам 5. У сувязі з гэтым адзначым, што еднасць алгебраічных і геаметрычных ведаў усведамлялі ўжо ў глыбокай старажытнасці. У вядомай кнізе «Пачаткі» Еўкліда алгебраічныя факты даказваюцца геаметрычна.

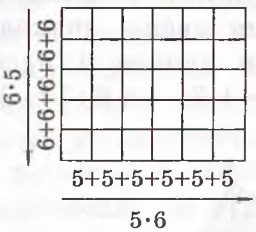


Рыс. 4

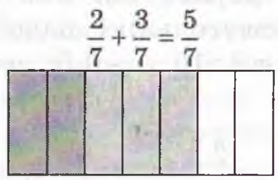


Рыс. 5

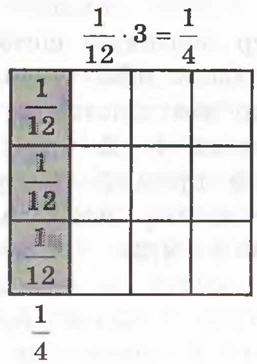
Адзначым, што геаметрычныя ўяўленні шырока выкарыстоўваюцца і ў арыфметыцы. Індуктыўныя абгрунтаванні часта падмацоўваюцца геаметрычнымі ілюстрацыямі. Напрыклад, перамяшчальная ўласцівасць множання $a \cdot b = b \cdot a$ ілюструецца рысункам 6, правіла складання дробаў з аднолькавымі назоўнікамі $\frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n}$ — рысункам 7, правіла множання дробу на натуральны лік $\frac{a}{n}\cdot k=\frac{a\cdot k}{n}$ — рысункам 8. Многія тэкставыя задачы рашаюцца з выкарыстаннем геаметрычных мадэлей, якія з-за сваёй нагляднасці маюць значныя дыдактычныя вартасці.



Рыс. 6

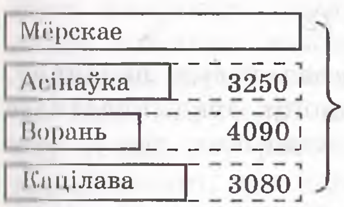


Рыс. 7



Рыс. 8

Прыклад 3. Умову задачы «Супольная плошча вадазбору азёр Мёрскага, Кацілава, Ворані, Асінаўкі, што ў Міёрскім раёне, роўная 15 020 га, прычым плошча вадазбору Мёрскага ў параўнанні з плошчай вадазбору Асінаўкі на 3250 га, з плошчай вадазбору Ворані на 4090 га, з плошчай вадазбору Кацілава на 3080 га большая. Якія паасобныя плошчы вадазбораў гэтых азёр?» можна змадэляваць сістэмай палосак, што на рысунку 9, якая дазваляе адразу ўгледзець, што калі да ліку 15 020 дадаць лікі 3250, 4090, 3080, то атрымаем пачацвяроную плошчу вадазбору Мёрскага возера: $15\,020+3250+4090+3080=25\,440$ (га). Значыць, плошча вадазбору Мёрскага возера роўная 6360 га, пасля чаго лёгка знаходзяцца плошчы вадазбораў астатніх трох азёр: 3110 га, 2270 га, 3280 га.



Рыс. 9

У старшых класах геаметрычныя ўяўленні шырока выкарыстоўваюцца пры даследаванні функцый, рашэнні квадратных няроўнасцей, ураўненняў і няроўнасцей з параметрамі.

Іншы раз геаметрычная мадэль дазваляе амаль адразу ўгледзець адказ да задачы, аналітычнае рашэнне якой уяўляецца амаль немагчымым.

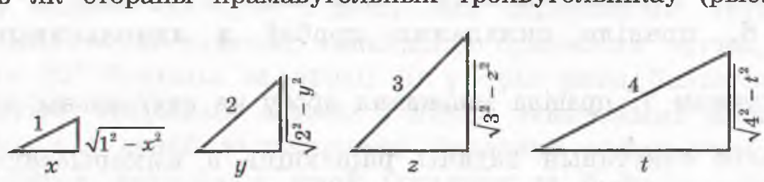
Прыклад 4. Разгледзім такую сістэму ўраўненняў:

$$\begin{cases} x+y+z+t=8, \\ \sqrt{1-x^2}+\sqrt{4-y^2}+\sqrt{9-z^2}+\sqrt{16-t^2}=6. \end{cases}$$

Запісаўшы дадзеную сістэму ў выглядзе

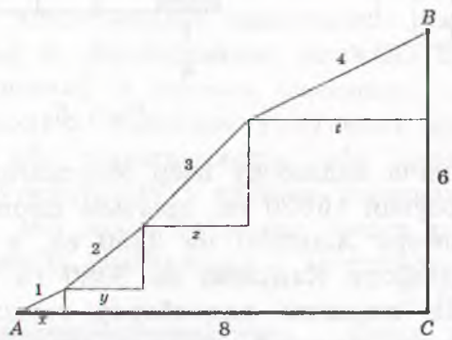
$$\begin{cases} x+y+z+t=8, \\ \sqrt{1^2-x^2}+\sqrt{2^2-y^2}+\sqrt{3^2-z^2}+\sqrt{4^2-t^2}=6, \end{cases}$$

заўважым, што тройкі выразаў $(x, \sqrt{1^2 - x^2}, 1), (y, \sqrt{2^2 - y^2}, 2), (z, \sqrt{3^2 - z^2}, 3), (t, \sqrt{4^2 - t^2}, 4)$ можна інтэрпрэтаваць як стораны прамавугольных трохвугольнікаў (рыс. 10).

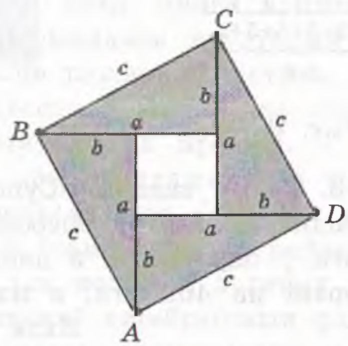


Рыс. 10

Цяпер дадзеную сістэму ўраўненняў можна змадэляваць рысункам 11. Паколькі трохвугольнік ABC таксама прамавугольны з катэтамі AC і BC, роўнымі 8 і 6 адпаведна, то яго гіпатэнуза AB роўная 10. Разам з гэтым сума даўжынь звёнаў-гіпатэнуз ломанай $1+2+3+4$ таксама роўная 10. Значыць, гэтыя звёны знаходзяцца на адной прамой. Таму ўсе трохвугольнікі падобныя адзін аднаму і падобныя трохвугольніку ABC. Адсюль: $x = 8:10 \cdot 1 = 0{,}8$; $y = 8:10 \cdot 2 = 1{,}6$; $z = 8:10 \cdot 3 = 2{,}4$; $t = 8:10 \cdot 4 = 3{,}2$.



Рыс. 11



Рыс. 12

Геаметрычныя веды могуць ствараць падмурак для ўвядзення новых паняццяў. Адным з такіх важных выпадкаў з'яўляецца ўвядзенне паняцця ірацыянальнага ліку, калі тэарэма Піфагора выкарыстоўваецца для доказу існавання лікаў, што не з'яўляюцца рацыянальнымі.

У аснове многіх алгебраічных прымяненняў у геаметрыі ляжыць тое, што значнае месца ў змесце геаметрыі займаюць велічыні — даўжыня, плошча, аб'ём, градусная мера вугла. Сцверджанні, звязаныя з гэтымі велічынямі, па неабходнасці маюць формульнае выяўленне. Таму доказ іх патрабуе выкарыстання пераўтварэнняў выразаў, з якіх пабудаваны гэтыя формулы.

Прыклад 5. Адзін з магчымых доказаў тэарэмы Піфагора наступны. Складзём чатыры прамавугольныя трохвугольнікі з катэтамі a і b і гіпатэнузай c так, як паказана на рысунку 12. Тады ўтвораны чатырохвугольнік $ABCD$ ёсць квадрат. Яго плошча з аднаго боку роўная c^2, з другога $4 \cdot \frac{1}{2}ab + (a-b)^2$. Таму

$$c^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}ab + (a-b)^2,$$

$$\text{або} \quad c^2 = 2ab + a^2 - 2ab + b^2,$$

$$\text{або} \quad c^2 = a^2 + b^2.$$

Як бачым, у гэтым доказе вядомы геаметрычныя факты — сума вострых вуглоў прамавугольнага трохвугольніка, роўная 90°; плошча прамавугольнага трохвугольніка, роўная палавіне здабытку яго катэтаў; плошча квадрата, роўная квадрату яго стараны, — дазваляюць скласці ўраўненне, алгебраічныя пераўтварэнні якога даюць формульнае выяўленне тэарэмы Піфагора.

Такім чынам, можна вылучыць наступныя кірункі прымянення геаметрыі ў алгебры: выкарыстанне геаметрычных фактаў-ураўненняў для складання тэкставых задач; выкарыстанне геаметрычных уяўленняў і фактаў для абгрунтавання алгебраічных фактаў; геаметрычнае ілюстраванне алгебраічных фактаў; выкарыстанне геаметрычных фактаў для ўвядзення арыфметычных і алгебраічных паняццяў.

Не менш важкія прымяненні алгебры ў геаметрыі. Гэта — выкарыстанне алгебраічных метадаў пры рашэнні задач з геаметрычнымі велічынямі — даўжынёй, плошчай, аб'ёмам, градуснай мерай; алгебраічнае даказванне многіх геаметрычных фактаў.

Зразумела, што і алгебраічная і геаметрычная частка школьнага курса матэматыкі мае сваю спецыфіку. Яна праяўляецца ўжо ў самім змесце: алгебра вывучае выразы са зменнымі, геаметрыя — геаметрычныя фігуры. Ёсць адрозненні і ў метадах. Алгебраічныя метады грунтуюцца на тоесных пераўтварэннях выразаў. Уласна геаметрычны метад ёсць метад роўных трохвугольнікаў, які заключаецца ў наступным: устанаўленне роўнасці пары адрэзкаў ці пары вуглоў праводзіцца праз доказ роўнасці трохвугольнікаў, у якія ўключаны гэтыя адрэзкі ці вуглы. Але гэтыя адрозненні не перашкаджаюць прымяняць метады адной тэорыі ў другой.

Прыхільнікі асобных падручнікаў алгебры і геаметрыі зыходзяць з таго, што школьныя алгебра і геаметрыя істотна адрозніваюцца па ступені лагічнай упарадкаванасці свайго матэрыялу. Маўляў, школьная геаметрыя ёсць цэльная тэорыя, а школьная алгебра ёсць набор асобных тэм, не звязаных адна з адной скразной ідэяй. А ці так гэта на самой справе? Такія ўяўленні пра гэтыя прадметы ёсць вынік зыходных установак на гэтыя прадметы. Па традыцыі, якая ідзе ад Еўкліда, вучэбныя кнігі па геаметрыі будуюць з яўным вылучэннем аксіём. Пры гэтым з тых часоў (III ст. да н.э.) змест школьнага курса геаметрыі істотна не змяніўся. А змест школьнага курса алгебры склаўся ў больш позні час (у XVII—XVIII стст.), пры гэтым школьнае выкладанне алгебры не акцэнтуе ўвагу на аксіёмах гэтага курса.

Прааналізуем цяперашнюю сітуацыю з выкладаннем алгебры і геаметрыі ў школе. Пры вывучэнні алгебры асноўная ўвага надаецца выпрацоўцы у вучняў уменняў і навыкаў работы з асноўнымі аб'ектамі алгебры — выразамі, ураўненнямі, няроўнасцямі, функцыямі. Гэта тоесныя пераўтварэнні розных відаў выразаў, рашэнне розных відаў ураўненняў і няроўнасцей, пабудаванне графікаў і выяўленне асноўных уласцівасцей пэўнага набору элементарных функцый, рашэнне тэкставых задач. Пра асновы школьнага курса алгебры ў самім гэтым курсе яўна не гаворыцца. Разам з тым гэтыя асновы вучням добра вядомыя. Як ужо адзначалася, аснову школьнай алгебры складаюць тоесныя пераўтварэнні розных відаў выразаў, а гэтыя пераўтварэнні грунтуюцца на ўласцівасцях арыфметычных дзеянняў над рэчаіснымі лікамі. Асноўныя ўласцівасці рэчаісных лікаў наступныя (гл. [2]).

I. Уласцівасці складання і аднімання

1) $a+b=b+a$ *(перамяшчальнасць складання)*;
2) $(a+b)+c=a+(b+c)$ *(спалучальнасць складання)*;
3) $a+0=a$ *(уласцівасць нуля пры складанні)*;
4) $a+(-a)=0$ *(уласцівасць супрацьлеглага ліку)*;
5) $a-b=a+(-b)$ *(сувязь аднімання са складаннем)*;
6) калі $a<b$, то $a+c<b+c$ *(манатоннасць складання)*.

II. Уласцівасці множання і дзялення

1) $a\cdot b=b\cdot a$ *(перамяшчальнасць множання)*;
2) $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$ *(спалучальнасць множання)*;

3) $a \cdot 1 = a$ *(уласцівасць адзінкі пры множанні)*;
4) $a \cdot 0 = 0$ *(уласцівасць нуля пры множанні)*;
5) $-a = (-1) \cdot a$ *(выяўленне супрацьлеглага ліку здабыткам)*;
6) калі $a \neq 0$, $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ *(уласцівасць адваротнага ліку)*;
7) калі $b \neq 0$, то $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$ *(выяўленне дробу здабыткам)*;
8) $a(b+c) = ab + ac$ *(размеркавальнасць множання ў дачыненні да складання)*;
9) калі $a < b$ і $c > 0$, то $a \cdot c < b \cdot c$ *(манатоннасць множання)*.

III. Уласцівасці парадку

1) калі a, b ёсць рэчаісныя лікі, то або $a < b$, або $a = b$, або $a > b$ *(лінейная ўпарадкаванасць)*;
2) калі $a < b$, то знойдзецца такі лік c, што $a < c < b$ *(шчыльнасць мноства рэчаісных лікаў)*;
3) калі $a<b$ і $b<c$, то $a<c$ *(транзітыўнасць дачынення менш)*.

IV. Архімедава ўласцівасць

Для любога рэчаіснага ліку x знойдзецца такі натуральны лік n, што $n > x$.

V. Уласцівасць непарыўнасці мноства рэчаісных лікаў

Любая сістэма паўкладаных адрэзкаў $[a_n;\ b_n]$, даўжыні якіх імкнуцца да нуля, калі n імкнецца да бясконцасці, мае адзіны агульны пункт.

Уласцівасці **I—V**, па сутнасці, складаюць поўную сістэму аксіём для рэчаісных лікаў, а ўласцівасці **I—IV** — поўную сістэму аксіём для рацыянальных лікаў. Вучні ў курсах арыфметыкі і алгебры знаёмяцца з усімі гэтымі ўласцівасцямі і выкарыстоўваюць іх, толькі ў адрозненне ад геаметрыі іх не называюць яўна аксіёмамі. На падставе ўласцівасцей **I—IV** даказваюцца правілы тоесных пераўтварэнняў выразаў, устанаўліваюцца раўназначныя пераўтварэнні ўраўненняў, іншыя сцверджанні ў змесце школьнай алгебры. Як бачым, па спосабе пабудавання школьная алгебра істотна не адрозніваецца ад школьнай геаметрыі. З аналізу школьных падручнікаў разам з гэтым можна ўгледзець і адно значнае адрозненне. Калі ў курсе алгебры асноўная ўвага надаецца практычнаму боку — рашэнню разнастайных практыкаванняў, а асновы алгебры знаходзяцца на другім плане, то ў школьнай геаметрыі на першым плане знаходзяцца менавіта *асновы геаметрыі*. Улічваючы абмежаванасць часу на вывучэнне геаметрыі — 2 тыднёвыя гадзіны, на выпрацоўку ўменняў рашаць геаметрычныя задачы часу ўжо нестае, таму не варта здзіўляцца слабым практычным навыкам вучняў. Аслабленне ўвагі да рашэння геаметрычных задач яшчэ адным сваім вынікам мае слабае валоданне вучнямі асноўнымі фактамі геаметрыі, бо, як вядома, замацаванне ў памяці таго ці іншага факта адбываецца праз шматразовае вяртанне да яго ў працэсе выкарыстання. А такое выкарыстанне якраз і адбываецца пры рашэнні адпаведным чынам складзенай сістэмы задач.

Улічваючы сказанае, нам уяўляецца мэтазгодным крыху павысіць тэарэтычны ўзровень школьнага курса алгебры, а ў курсе геаметрыі ўвагу закцэнтаваць не на глабальным яе лагічным упарадкаванні, а на лакальным упарадкаванні, праз так званыя маленькія тэорыі — тэорыю раўнабокага трохвугольніка, тэорыю прамавугольнага трохвугольніка, тэорыю трапецыі, тэорыю паралелаграма і інш. Лагічныя асновы школьнай геаметрыі і алгебры можна змястоўна абмеркаваць з вучнямі ў канцы навучання ў асноўнай школе. У гэты час вучням стане зразумелай сама пастаноўка праблемы, мэты лагічнага ўпарадкавання ўжо вядомага ім зместу.

З выкладзенага вынікае і спосаб падачы тэарэтычнага матэрыялу ў сучаснай вучэбнай кнізе для вучня — узбуйненымі адносна завершанымі дыдактычнымі адзінкамі. Прыводзім прыклад такой дыдактычнай адзінкі, прысвечаны раўнабокаму трохвугольніку.

Раўнабокі трохвугольнік

Рыс. 13

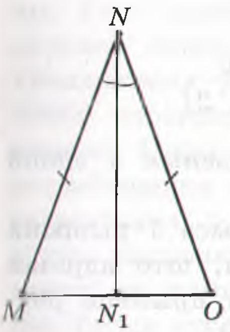
Рыс. 14

Трохвугольнік, у якім хаця б дзве стараны роўныя, называецца ***раўнабокім***.

Роўныя стораны раўнабокага трохвугольніка называюцца ***бакавымі старанамі***, а трэцяя старана — ***асновай*** раўнабокага трохвугольніка (рыс. 13).

Трохвугольнік, у якім усе стораны роўныя, называюць ***роўнастароннім*** (рыс. 14).

Тэарэма 5. Калі трохвугольнік раўнабокі, то:
а) вуглы пры яго аснове роўныя;
б) яго бісектрыса, медыяна і вышыня, праведзеныя да асновы, супадаюць.



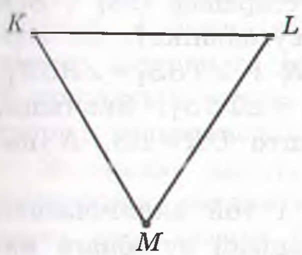
Рыс. 15

Доказ. Няхай трохвугольнік NMO раўнабокі: $MN=NO$ (рыс. 15). Пабудуем яго бісектрысу NN_1.

У трохвугольнікаў MNN_1 і ONN_1: $\angle MNN_1=\angle ONN_1$, бо NN_1 — бісектрыса; $MN=NO$ па ўмове; NN_1 — агульная старана. У адпаведнасці з першай прыметай роўнасці трохвугольнікаў заключаем, што $\Delta MNN_1=\Delta ONN_1$. Гэта азначае, што ў трохвугольнікаў роўныя ўсе адпаведныя элементы. Таму $\angle NMN_1=\angle NON_1$.

Паколькі $MN_1=N_1O$, то NN_1 — медыяна. Паколькі $\angle MN_1N=\angle ON_1N$, а разам гэтыя вуглы складаюць разгорнуты вугал, то кожны з іх роўны 90°. Значыць, NN_1 — вышыня.

Мы даказалі, што бісектрыса раўнабокага трохвугольніка, праведзеная да асновы, з'яўляецца яго медыянай і вышынёй. А паколькі да асновы можна правесці толькі адну бісектрысу, адну медыяну, адну вышыню, то і медыяна, праведзеная да асновы, з'яўляецца бісектрысай і вышынёй, як і вышыня з'яўляецца бісектрысай і медыянай.



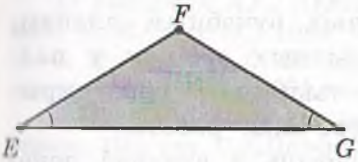
Рыс. 16

Вынік. Вуглы роўнастаронняга трохвугольніка роўныя адзін аднаму і роўныя 60°

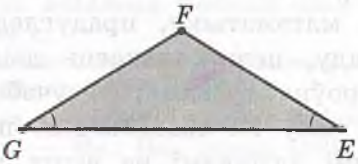
Няхай трохвугольнік KLM роўнастаронні (рыс. 16). Калі разглядаць яго як раўнабокі трохвугольнік з асновай KL, то $\angle K=\angle L$, а калі — як раўнабокі трохвугольнік з асновай LM, то $\angle L=\angle M$. Значыць, $\angle K=\angle L=\angle M$. Улічыўшы, што $\angle K+\angle L+\angle M=180^\circ$, атрымаем, што кожны з іх роўны 60°.

Тэарэма 6. Калі ў трохвугольніку два вуглы роўныя, то такі трохвугольнік раўнабокі.

Доказ. Няхай у трохвугольніку EFG вуглы E і G роўныя адзін аднаму (рыс. 17). Зробім копію трохвугольніка EFG і перавярнём яе, атрымаем трохвугольнік GFE (рыс. 18). Накладзём трохвугольнік GFE на трохвугольнік EFG. Тады старана GE накладзецца на старану EG, а прамені GF і EF трохвугольніка GFE накладуцца адпа-



Рыс. 17

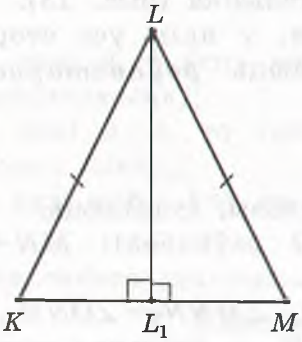


Рыс. 18

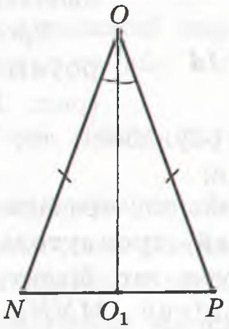
ведна на прамені EF і GF трохвугольніка EFG. Значыць, агульны пункт праменяў GF і EF супадзе з агульным пунктам праменяў EF і GF, і трохвугольнікі EFG і GFE сумясцяцца цалкам. Таму $EF = GF$, г. зн. трохвугольнік EFG раўнабокі з асновай GE.

Тэарэма 7. Калі ў трохвугольніку медыяна і вышыня, праведзеныя з адной вяршыні, супадаюць, то такі трохвугольнік раўнабокі.

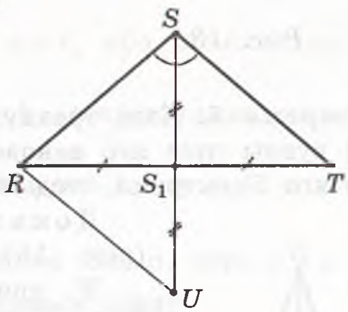
Доказ. Няхай у трохвугольніку KLM адрэзак LL_1 ёсць медыяна і вышыня (рыс. 19). Тады $KL_1 = ML_1$, а $\angle KL_1L = \angle ML_1L = 90°$. Улічыўшы, што адрэзак LL_1 ёсць агульная старана трохвугольнікаў KL_1L і ML_1L, па першай прымеце роўнасці трохвугольнікаў атрымаем, што $\Delta KL_1L = \Delta ML_1L$. Таму $KL = LM$.



Рыс. 19



Рыс. 20



Рыс. 21

Тэарэма 8. Калі ў трохвугольніку бісектрыса і вышыня, праведзеныя з адной вяршыні, супадаюць, то такі трохвугольнік раўнабокі.

Доказ. Няхай у трохвугольніку NOP адрэзак OO_1 ёсць бісектрыса і вышыня (рыс. 20). Тады $\angle NOO_1 = \angle POO_1$, а $\angle NO_1O = \angle PO_1O = 90°$. Улічыўшы, што адрэзак OO_1 ёсць агульная старана трохвугольнікаў NO_1O і PO_1O, па другой прымеце роўнасці трохвугольнікаў атрымаем, што $\Delta NO_1O = \Delta PO_1O$. Таму $NO = PO$.

Тэарэма 9. Калі ў трохвугольніку медыяна і бісектрыса, праведзеныя з адной вяршыні, супадаюць, то такі трохвугольнік раўнабокі.

Доказ. Няхай у трохвугольніку RST адрэзак SS_1 ёсць медыяна і бісектрыса (рыс. 21). На прамені SS_1 за пункт S_1 адкладзём адрэзак S_1U, роўны медыяне SS_1. Пункт U злучым з пунктам R.

Стораны SS_1 і S_1T трохвугольніка SS_1T адпаведна роўныя старанам US_1 і S_1R трохвугольніка US_1R, роўныя і вуглы SS_1T і US_1R гэтых трохвугольнікаў, як вертыкальныя. Па другой прымеце $\Delta SS_1T = \Delta US_1R$. Таму $ST = UR$ і $\angle TSS_1 = \angle RUS_1$. Паколькі па ўмове адрэзак SS_1 ёсць бісектрыса, то $\angle RSS_1 = \angle TSS_1$. Значыць, $\angle RSS_1 = \angle RUS_1$. З улікам першай часткі тэарэмы атрымаем, што $UR = RS$. А паколькі ўжо даказана, што $ST = UR$, то $RS = ST$.

Неабходнасць выкарыстання ўзбуйненых адзінак дыктуецца і той акалічнасцю, што па псіхалагічных і дыдактычных меркаваннях з пэўнай порцыяй вучэбнага матэрыялу трэба пэўны час папрацаваць з тым, каб яе змест пэўным чынам зафіксаваўся ў свядомасці. Далейшае замацаванне асноўнага з гэтай порцыі будзе адбывацца праз вяртанне да яго пры рашэнні задач. Уяўляецца, што мінімальнай часавай адзінкай работы з дыдактычнай адзінкай павінны быць 3—4 урокі, ці адзін вучэбны тыдзень пры нормах часу на матэматыку, прадугледжаных вучэбным планам. Такія разлікі прыводзяць да вываду, што колькасць дыдактычных адзінак у падручніку павінна быць прыкладна роўнай колькасці вучэбных тыдняў ці нават крыху меншай, калі ўлічыць затраты часу на абавязковыя праверачныя работы.

Пры рабоце з такімі ўзбуйненымі адзінкамі не варта развучваць з вучнямі доказы ўсіх тэарэм з тлумачальнага тэксту. Вучні павінны засвоіць самі факты, пазнаёміцца з іх доказамі, умець узнавіць некаторыя з гэтых доказаў. Запамінаць прыведзеныя доказы — не вельмі эфектыўная форма навучання разважаць, даказваць. Навучыцца даказваць можна толькі праз самастойную работу па пошуку доказаў. Таму прыводзімыя ў падручніку доказы выступаюць узорамі для вучняў, а вучыцца даказваць вучні павінны праз самастойнае рашэнне задач на доказ, праз пошукі абгрунтаванняў сваіх дзеянняў пры рашэнні іншых задач, дарэчы не толькі геаметрычных.

Пры стварэнні інтэграванага падручніка трэба вырашыць праблему паслядоўнасці вывучэння асобных тэм. Прыхільнікі незалежнага вывучэння алгебры і геаметрыі ў якасці контраргументаў вылучаюць наступнае: у інтэграваным курсе геаметрыя «растворыцца»; кожны з курсаў згубіць свае асаблівасці і структуру; якая ж гэта інтэграцыя, калі ў «інтэграваных» падручніках раздзелы захоўваюць пэўную самастойнасць; інтэграваны падручнік немагчымы, бо гэтага нікому яшчэ не ўдалася зрабіць. Але ж ці пазбаўлены гэтых «недахопаў» неінтэграваныя падручнікі, што выкарыстоўваюцца зараз, напрыклад, падручнік алгебры для 8-га класа пад рэдакцыяй С.А.Целякоўскага [3] і падручнік геаметрыі А.В.Пагарэлава [4]? Змест першага складаюць раздзелы: рацыянальныя дробы; квадратныя карані; квадратныя ўраўненні; няроўнасці; ступень з цэлым паказчыкам. Кожны з гэтых раздзелаў адносна самастойны. Гэта праяўляецца ў тым, што яны могуць вывучацца ў адвольным парадку, за адзіным выключэннем: раздзел «Квадратныя карані» павінен папярэднічаць раздзелу «Квадратныя ўраўненні». Сказанае ў такой самай ступені датычыць парадку вывучэння параграфаў курса геаметрыі 8-га класа з падручніка [3]: чатырохвугольнікі, тэарэма Піфагора, дэкартавы каардынаты на плоскасці, рух, вектары. Тут адзіным патрабаваннем з'яўляецца тое, што папярэдне павінны быць вывучаны ўласцівасці паралелаграма, у астатнім парадак вывучэння названых тэм вызначаецца толькі густам аўтара падручніка. Пэўныя сувязі паміж раздзеламі ў падручніку [3] рэалізуюцца задачамі на паўтарэнне, што прапануюцца ў кожным пункце, на якія разбіты раздзелы. Гэтыя сувязі амаль не прасочваюцца ў падручніку [4] нават на ўзроўні задач, бо пасля кожнага параграфа прапануюцца практыкаванні ў асноўным менавіта да яго.

Як бачым, «фрагментарнасць» матэрыялу — з'ява непазбежная для вучэбнай кнігі ў адрозненне ад кнігі навуковай, дзе асноўнай мэтай з'яўляецца сістэматычнае і паслядоўнае развіццё пэўнай тэорыі. Інтэграваны падручнік не павялічвае гэтую «фрагментарнасць», тым больш, што сам працэс вывучэння для вучня аб'ектыўна фрагментарны: у адзін і той жа дзень ён займаецца і матэматыкай, і фізікай, і біялогіяй, і мовамі, і літаратурай, і гісторыяй і інш. Разнароднасць зместу школьнага курса матэматыкі аб'ектыўна непазбежная; трэба меркаваць, што ў школьным курсе ў бліжэйшы час будуць адлюстраваны пытанні камбінаторыкі, тэорыі імавернасцей, статыстыкі, аптымізацыі.

Засваенне зместу, вызначанага праграмай, з'яўляецца толькі першым планам вывучэння матэматыкі, але гэтым нельга абмяжоўвацца. Вывучэнне матэматыкі можа даць значна больш: узброіць вучня пэўнымі метадамі асваення рэчаіснасці і выпрацаваць адпаведны стыль мыслення. Гэтага можна дасягнуць, калі будуць рэалізаваны аб'ектыўна існуючыя сувязі паміж алгебрай і геаметрыяй, якія прасочваюцца і па лініі зместу, і па лініі метадаў.

1. *Каспржак А.Г., Левит М.В.* Базисный учебный план и российское образование в эпоху перемен. — М.: МИРОС, 1994. — 144 с.

2. *Никольский С.* Об аксиоматике школьной математики // Математика: Еженедельная учебно-методическая газета. — 2001. — № 22. — С. 1 — 2, 32.

3. Алгебра: Падручнік для 8-га кл. сярэд. шк. / Ю.М.Макарычаў, Н.Р.Міндзюк, Н.І.Нешкаў, С.Б.Суворава; Пад рэд. С.А.Целякоўскага. — Мн.: Нар. асвета, 1991. — 239 с.

4. *Погорелов А.В.* Геометрия: Учеб. для 7—11 кл. сред. шк. — М.: Просвещение, 1990. — 384 с.