Развитие математических понятий в процессе обучения

А.М.Радьков,
Е.В.Кравец
(Могилёвский государственный университет им. А.А.Кулешова)

Одной из задач реформы общеобразовательной школы является совершенствование непрерывности образования и преемственности его различных ступеней. Это относится как к организационной структуре, так и к содержанию образования, методикам обучения конкретным предметам.

Современное развитие школы требует перехода на новые методики обучения, знакомства учителей с новейшими достижениями по разработке и совершенствованию уже сложившихся образовательных технологий.

Основой любой теории учебной дисциплины является её понятийный аппарат, успешность обучения находится в прямой зависимости от эффективности его усвоения. Для результативной организации учебного процесса учителю необходимо знать и использовать теоретические и практические закономерности непрерывного усвоения понятий, учитывать основные требования к их формированию, уметь определить исходную понятийную базу, которой владеют ученики, ориентироваться на особенности основных этапов развития понятия в сознании учащихся, использовать оптимальные способы его становления. Такой подход содействует созданию оптимальных условий для обеспечения разноуровневого вариативного обучения школьников с учётом их индивидуальных возможностей и способностей, что является необходимым условием совершенствования образования.

Процесс обучения математике, имеющий определённую логику построения и развёртывания, включает в качестве составной части систему формирования математических понятий, которая, в свою очередь, имеет достаточно явно выраженную структуру (логическую и психологическую).

Содержание и структура самой математической теории обусловливают специфику рассматриваемых в ней понятий. Математические понятия, как правило, идеализированы, абстрагированы от предметов действительности. Их существенные количественные и пространственные свойства и отношения также абстрагированы, причём абстракции эти бывают разных ступеней.

А.К.Сухотин отмечает, что особенность математических объектов состоит в том, что они являются отвлечением не просто свойства, а свойства свойств и поэтому представляют абстракции от абстракций, или, другими словами, «обобщающую абстракцию» [6, с. 30—31]. Связь с жизнью некоторых математических понятий чётко выражена: одни представляют собой абстракции непосредственно предметов действительности, другие же образуются путём обобщения уже идеализированных, абстрактных, ранее изученных понятий. Этот процесс продолжается неограниченно.

Сложность усвоения понятий разных ступеней абстракций различна. Это учитывает и существующая школьная программа. Так, изучение математических понятий в школе начинается с наиболее простых, связь с жизнью которых ярко выражена (натуральные числа, сумма, разность, произведение, доли, площадь, объём и т.д.). В дальнейшем видимая связь с реальностью постепенно утрачивается, понятия становятся всё более идеализированными и абстрагированными и рассматриваются часто не как предметы, отражающие явления окружающего мира, а как объекты изучения (в среднем звене: уравнение, неравенство, функция, иррациональное число и т.д.; в старшем звене: логарифм, производная, первообразная, интеграл и т.д.). Именно поэтому в формировании математических понятий, особенно высоких ступеней абстракций, часто преобладает логическая ступень познания. При усвоении этих понятий чувственно-предметная деятельность сокращается до минимума, одновременно с этим увеличивая роль интеллектуальной деятельности. (Например, в школьном курсе математики понятия, связанные с понятием «бесконечность».)

Но, тем не менее, в формировании математических понятий роль чувственного компонента достаточно велика. Он создаёт первоначальные представления о понятии и основу для применения его на практике, служит его внутренней опорой. Как показали наблюдения за процессом обучения и усвоения знаний, часто именно неразвитость чувственного компонента в формировании математических понятий является одной из причин формализма в знаниях учащихся, неумения применять понятие в различных ситуациях. Для преодоления этого необходимо развивать математическую интуицию, основой для которой служат наглядные, чувственные представления. Поэтому для оптимизации процесса усвоения понятия требуется методически продуманное и дидактически целесообразное соотношение в нём логики и интуиции.

Математические понятия не только являются абстракциями различных ступеней, одно и то же понятие в своём формировании может проходить различные ступени абстракции. Так, при формировании понятия «неравенство» ученики вначале проводят сравнение количеств конкретных предметов, затем сравнивают конкретные числа и значения числовых выражений, записывают свои ответы в виде неравенств. Следующий этап абстракции — понятие неравенства с переменной, когда вместо неизвестного ученики подставляют конкретные значения и определяют, исходя из этого, истинность неравенства. На следующую ступень абстракции дети переходят, когда они отвлекаются от конкретного значения того или иного неравенства и само это понятие становится объектом изучения. Школьники изучают свойства неравенств, решения неравенств и т. д. Таким образом, осуществляется постепенный переход от одной ступени абстракции понятия к другой, более высокой.

Хотя все математические понятия в той или иной степени представляют собой абстракции, среди них выделяют конкретные и абстрактные понятия. Это накладывает свой отпечаток на методику работы с такими понятиями, поскольку задачей учителя является показ не только связи абстрактного в абстрактном и конкретного в конкретном, но и конкретного в абстрактном, что довольно сложно и требует продуманности, отлаженности методики, поиска новых путей, направлений и методов работы.

Д.П.Горский отмечает, что математические понятия отличаются ещё и тем, что у них часто отсутствует чёткое разграничение существенных и отличительных признаков [3]. Точнее, один и тот же признак для данного понятия в одних случаях будет выступать как отличительный, а в других — являться только существенным. Так, отличив, выделив предмет в определении из некоторого класса, мы получаем возможность вывести из этого определения все остальные свойства предмета. Например, мы можем определить квадрат как ромб, который является прямоугольником, и квадрат как прямоугольник, который является ромбом. В первом случае

Александр Михайлович Радьков *закончил физико-математический факультет Могилёвского государственного педагогического института, доктор педагогических наук, профессор. Работает ректором Могилёвского государственного университета им. А.А.Кулешова.*

Основные направления научной работы — теория и методика непрерывного обучения математике.

признак «быть прямоугольником» отличительный, а признак «являться ромбом» — только существенный, во втором же — наоборот: отличительный — «быть ромбом», а существенный — «являться прямоугольником».

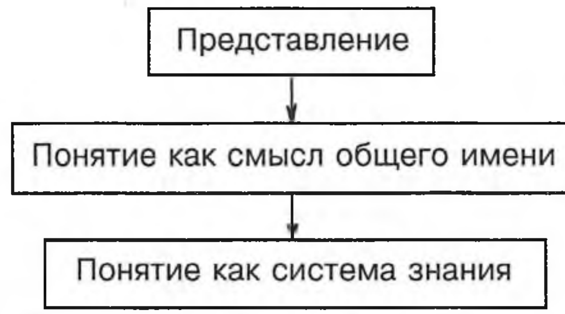
Специфика математических понятий во многом оказывает влияние на процесс их формирования в обучении. Опишем, например, как развивается понятие «треугольник».

На этапах подготовки к обучению в школе ребёнку демонстрируются различные модели треугольников, реальные предметы из жизни, имеющие треугольную форму. Понятие треугольника образовывается с помощью абстракции отождествления, когда сходные по форме предметы называются одним именем. В этом случае мы абстрагируемся от других свойств (величины, цвета и т. д.). Говоря о треугольнике, на данной ступени обучения учитель имеет в виду интуитивно употребляемое имя. Ученик может ещё не выделять существенные признаки понятия, но он легко распознаёт треугольники среди других фигур.

В дальнейшем (в начальной школе) проводится анализ выделенных предметов по их признакам. Ученики начинают понимать под треугольником результат обобщения предметов некоторого класса по указанной совокупности признаков («иметь три вершины, три стороны, три угла»). На этой стадии понятие представляет собой смысл общего имени. Треугольник при этом выступает как фигура — носитель определённых свойств. Однако эти свойства ещё логически не упорядочены, они получаются эмпирическим путём.

На последующих этапах даётся определение треугольника, выявляются его свойства, выводятся новые признаки понятия из тех, которые входят в определение. К этому процессу иногда привлекаются какие-либо дополнительные знания (например, из других разделов математики). К новым, полученным, признакам мы относим все теоремы, касающиеся треугольника, доказываемые в геометрии. На этой стадии понятие представляет собой систему знаний. Тогда понятие «треугольник» становится совокупностью известных — основных и производных — признаков треугольника, а также знанием о том, в каких конкретных формах существуют в действительности предметы, обобщаемые в понятии «треугольник».

Таким образом, в своём развитии в процессе обучения математическое понятие проходит следующие этапы:



Данный подход находит отражение в ряде философских исследований в отношении категории «понятие» [2].

В процессе обучения следует различать развитие понятия в рамках определённой теории и его развитие, связанное с изменением теории. Так, в первом случае мы имеем дело с расширением содержания понятия, его обогащением, т.е. фактически изменения понятия как такового здесь не происходит. При изменении же теории зачастую и понятия претерпевают качественные преобразования. Вновь рассмотрим пример с понятием «треугольник». В геометрии Евклида утверждается, что сумма углов треугольника равна 180°, в геометрии же Лобачевского содержится теорема о том, что сумма углов треугольника непостоянная. Однако и в этом случае определённую роль играют начальные интуитивные представления, помогающие в понимании смысла рассуждений. Таким образом, можно говорить о развитии понятия.

Представление о таком поэтапном развитии математических понятий выдвигает определённые требования и к методике их формирования. Основные из них: требование системности и структурной полноты, а также непрерывности в формировании математических понятий.

Требование системности и структурной полноты предусматривает формирование математических понятий, при котором они рассматривались бы как нечто целое, как система в совокупности своих объектов, признаков и свойств, связей и отношений между ними и в то же время как элемент более широкой системы с её уровнями и взаимосвязями. Кроме того, данное требование обеспечивает комплексное рассмотрение понятий и отношений между ними, приёмов учебной деятельности по их усвоению и применению на практике.

Усваивая математические понятия, ученик приходит к более обобщающим абстракциям. Дальнейшее образование абстракций может происходить уже на базе сложившихся путём использования как внутриматематических, так и внутрилогических закономерностей. Поэтому очень важным является формирование систем понятий, допускающих дальнейшие обобщения и абстрагирования.

В литературе выделяются различные системы понятий по степени их «широты»: локальные (в них устанавливается связь между отдельными понятиями и явлениями без их отношения к системе), ограниченно-системные (связи ограничены пределами одной темы), более широкие — внутрисистемные и, наконец, межпредметные или межсистемные, устанавливающие связи между понятиями различных предметов и систем [5].

Проводимые нами исследования [4] показали, что учащиеся школ часто не видят отношений между понятиями, не могут проводить их систематизацию, классификацию, не определяют равнозначность различных представлений и описаний одного и того же понятия. Так, например, школьники часто затрудняются в определении истинности таких высказываний, как: «Некоторые прямоугольники являются ромбами», «Все квадраты являются параллелограммами» и т.д. Зная определение квадрата как прямоугольника, у которого все стороны равны, не могут установить, являются ли верными определения: «Квадрат — это ромб, у которого один угол прямой», «Квадрат — это параллелограмм, у которого все стороны равны» и т.д. Изучение и усвоение конкретного понятия должно происходить одновременно с изучением всей системы смежных понятий, поскольку наряду с формированием новых понятий идёт углубление содержания ранее сформированных, раскрываются их новые свойства, связи и отношения, границы применения. Это требует определённой перекомпоновки, соподчинения, систематизации изучаемого материала, выявления связей и отношений между его элементами.

В процессе формирования понятий в системе новое включается не во все существующие связи и отношения, а только в те, которые относятся (непосредственно или опосредованно) к искомым качествам рассматриваемого понятия. В новых связях те же («старые») понятия выступают в ином качестве, выявляя другие свойства, которые позволяют включать их в очередные связи и отношения, таким образом формируется преемственность в протекании мыслительного процесса. Всё новое оказывается непосредственно связанным с уже известным, базируется на нём и частично из него выводится, вместе с тем далеко выходя за его пределы. Преемственность понятийного мышления обеспечивает его непрерывное протекание и постепенное или скачкообразное развитие. Так формируются направленность, избирательность понятийного мышления школьника.

Осознание логической связи между разными понятиями не только облегчает и ускоряет усвоение их учениками, но и повышает вероятность их активного использования. Учащемуся легче оперировать понятиями, внутреннюю взаимосвязь которых он видит, которые может осмысленно включить в систему уже известного, которые кажутся ему более понятными и убедительными, чем усвоенные «механически», без какого-либо понимания. К тому же только в системе понятие может приобрести осознанность и произвольность.

Даже если понятия были правильно и хорошо сформированы на одном или нескольких уроках, но у учащихся не происходит удовлетворительного развития их системы, не выявляются понятийные связи, нередко завуалированные, то эти понятия усваиваются только на короткое время и быстро забываются.

Требование непрерывности в формировании математических понятий реализуется в определённой системе связей (внутрипонятийных и межпонятийных) и предусматривает возможность развития понятия в процессе перехода от одной ступени обучения к другой.

Как правило, многие из математических понятий усваиваются на протяжении достаточно долгого промежутка времени — от математики начальной школы до вузовских математических дисциплин, что определяет содержательно-методические линии, обеспечивающие курсу математики систематичность и последовательность (числовая, функциональная, линия уравнений и неравенств и т. д.). Поэтому при усвоении понятий надо учитывать линию развёртывания рассматриваемого понятия, использовать знания, сформированные на более ранних этапах обучения или в повседневной жизни. Это способствует систематичности изучения математики, прочности и глубине усвоения материала.

Непрерывность в формировании математических понятий предполагает:

• согласованность программ различных этапов обучения в вопросе формирования понятий;

• осуществление единой линии в усвоении математических понятий: изучение и развитие основных, «сквозных», содержательных линий; пропедевтику на более ранних ступенях обучения тех понятий, которые будут изучаться в дальнейшем; понимание того, как и чем обогащаются понятия на различных этапах обучения; знакомство с тенденциями и перспективами развития понятий;

• единые нормы и критерии оценки знаний, умений и навыков;

• методическое обеспечение формирования математических понятий и т.д.

Основным отличием методики формирования математических понятий с учётом требований непрерывности от традиционной системы их усвоения мы считаем то, что целью является не столько усвоение определённого объёма знаний, сколько выработка умения учиться, позволяющего постоянно совершенствовать уровень подготовки школьников.

Понятия всегда надо рассматривать в развитии. Как отмечал А.В.Брушлинский, в умственной деятельности человека не только прошлые мыслительные процессы влияют на его последующие этапы (выступающие в виде настоящего), но и, наоборот, настоящее оказывает затем какое-то обратное влияние на прошлое. Прошедшие этапы мыслительного процесса существуют не как «вещь» абсолютно неизменная, а как динамически изменяющийся процесс, избирательно используемый по мере его включения в дальнейший ход мышления [1, с. 69]. Это справедливо и для развития понятия.

Уметь оперировать понятием, применять его при решении определённых задач означает не только умение воспользоваться построенными в сознании системами знаний, но и способность преобразовать существующую систему знаний, построив при этом новую. В этом и состоит требование непрерывности формирования понятий. Неизменяющиеся понятия без своего развития, без соответствующей перестройки в сознании учащихся ведут к неспособности рассмотреть меняющуюся ситуацию с новой точки зрения.

Однако достаточно часто непрерывности противопоставляется прерывность (дискретность), которая обеспечивает относительно самостоятельное существование элементов объекта как целого. Непрерывность и дискретность нельзя противопоставлять — только в единстве они дают целостное строение объекта. Прерывность обусловливает саму возможность сложного и неоднородного строения понятия. Непрерывность же всегда реализуется в определённой системе связей, она составляет объективный базис, благодаря которому из частей образуется целое. В формировании математических понятий непрерывность обеспечивает разумное сочетание структурности, фиксированности и стабильности понятия как системы знаний с его динамичностью и подвижностью.

***Елена Всеволодовна Кравец** закончила физико-математический факультет Могилёвского государственного педагогического института. Работает доцентом кафедры методики преподавания математики, кандидат педагогических наук.*

Основные направления научной работы — формирование математических понятий в системе непрерывного образования.

Специфика математических понятий приводит к определённой специфике математического мышления школьника, которая заключается, по мнению ряда авторов (Б.В.Гнеденко, А.Н.Колмогоров, Л.М.Фридман и др.), в особенностях не математических методов, а именно самих математических объектов, математических понятий. Л.М.Фридман под математическим мышлением понимает «предельно абстрактное, теоретическое мышление, объекты которого лишены всякой вещественности и могут интерпретироваться самым произвольным образом, лишь бы при этом сохранялись заданные между ними отношения» [7, с. 41].

Таким образом, важным условием развитого математического мышления школьника является корректно сформированный у него понятийный аппарат. И потому процессу усвоения понятий необходимо уделять серьёзное внимание как на уроках, так и во внеклассной работе по математике.

1. *Брушлинский А.В.* Психология мышления и проблемное обучение. — М.: Знание, 1983. — 96 с.

2. *Войшвилло Е.К.* Понятие как форма мышления: логико-гносеологический анализ. — М.: Изд-во МГУ, 1989. — 239 с.

3. *Горский Д.П., Ивин А.А., Никифоров А.Л.* Краткий словарь по логике / Под ред. Д.П.Горского. — М.: Просвещение, 1991. — 208 с.

4. *Радзькоў А.М., Кравец А.У.* Фарміраванне ў вучняў матэматычных паняццяў // Нар. асвета. — 1998. — № 6. — С. 123—129.

5. *Самарин Ю.А.* Очерки психологии ума. Особенности умственной деятельности школьников. — М.: Изд-во АПН РСФСР, 1962. — 504 с.

6. *Сухотин А.К.* Превратности научных идей. — М.: Молодая гвардия, 1991. — 271 с.

7. Формирование элементарных математических представлений у дошкольников: Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов / Под ред. А.А.Столяра. — М.: Просвещение, 1988. — 303 с.

8. *Фридман Л.М.* Психолого-педагогические основы обучения математике в школе. — М.: Просвещение, 1983. — 160 с.