

С. М. Чернов

ОБЩАЯ ФИЗИКА

**ФИЗИКА ЯДРА И
ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ**



Могилев 2014

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«МОГИЛЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени А.А. КУЛЕШОВА»

С. М. Чернов

ОБЩАЯ ФИЗИКА

ФИЗИКА ЯДРА И
ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ



Могилев 2014

Электронный аналог печатного издания

Чернов С.М.

Общая физика : физика ядра и элементарных частиц. –
Могилев : МГУ имени А.А. Кулешова, 2014. – 52 с. : ил.

Представлены материалы для практических занятий по курсу «Физика атомного ядра и элементарных частиц» для специальности «Физика. НПД». К каждой теме приведены общая теория и рабочие формулы, а также перечень вопросов для самоконтроля, примеры решения задач, а также задачи для самостоятельного решения.

Издание может быть рекомендовано также для проведения практических занятий по курсу общей и теоретической физики для других специальностей университетов физико-математического профиля.

УДК 539.1

ББК 22.36

Чернов С.М. Общая физика : физика ядра и элементарных частиц . –
Электр. данные. – Учебно-методические материалы. – Могилев : МГУ
имени А.А. Кулешова, 2014. – Загол. с экрана.

212022, г. Могилев,

ул. Космонавтов, 1

Тел.: 8-0222-28-31-51

E-mail: alexpzn@mail.ru

<http://www.msu.mogilev.by>

© Чернов С.М., 2014

© МГУ имени А.А. Кулешова, 2014

© МГУ имени А.А. Кулешова,
электронный аналог, 2014

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время можно с уверенностью сказать, что не существует такой области человеческой деятельности, в которой не использовались бы идеи, методы и результаты, полученные в ядерной физике. Поэтому изучение явлений в области микромира на субатомном уровне имеет не только огромное практическое и мировоззренческое значение, но и составляет общую культуру Человеческого общества.

В ядерной физике изучаются явления, происходящие на очень малых расстояниях ($r_0 \leq 10^{-10}$ м) и при очень высоких энергиях, приходящихся на одну частицу ($E \approx 10^{10}$ эВ). Временные масштабы ядерных процессов могут достигать величин порядка 10^{-24} с. Разумеется, изучение физических процессов в таких пространственно-временных и энергетических масштабах требует огромных интеллектуальных и финансовых затрат.

Не менее сложной является задача преподавания дисциплины «Физика атомного ядра и элементарных частиц». Это обстоятельство связано с тем, что изучение этой дисциплины требует определенных знаний как в области классической физики (механики и электродинамики), так и основ специальной теории относительности и квантовой механики.

Данное методическое пособие является попыткой рассмотрения некоторых ядерных явлений на примере решения простейших (но не простых!) задач, моделирующих свойства стабильных и радиоактивных ядер и элементарных частиц на уровне общего курса физики.

Для практических целей в каждой рассматриваемой теме приведены краткие сведения по теории и рабочие формулы. Эти сведения не являются полными и требуют предварительного знакомства с данным вопросом по учебникам или в лекционной части курса. Проверкой уровня понимания материала могут служить ответы на вопросы для самоконтроля, указанные к каждой теме. На практических занятиях или самостоятельно следует рассмотреть примеры решения задач по указанной теме и самостоятельно решить предложенные задачи, к большинству которых даны ответы или методические указания.

С современным состоянием субатомной физики можно познакомиться по научным монографиям, учебникам и журнальным публикациям, неполный перечень которых приведен в конце пособия.

Тема 1

РАЗМЕРЫ АТОМНЫХ ЯДЕР

I. Общая теория и рабочие формулы

Вопрос о размерах и форме атомных ядер не является тривиальным. Так как нуклоны подчиняются квантовым законам, то эти "размерные" характеристики следует понимать в квантово-механическом смысле, в частности, плотность распределения электрического заряда и массы внутри ядра следует определять соотношениями:

$$\begin{aligned}\rho_{зар}(\mathbf{r}) &= Ze|\Psi_p(\mathbf{r})|^2 = Ze\rho_{po}(\mathbf{r}); \\ \rho_{массы}(\mathbf{r}) &= M_я|\Psi_N(\mathbf{r})|^2 = M_я\rho_{N0}(\mathbf{r}),\end{aligned}\quad (1)$$

где Ψ_p и Ψ_N – волновые функции протонов и нуклонов ядра, удовлетворяющие условию нормировки:

$$\int \rho_0(\mathbf{r})dV = 1. \quad (2)$$

В дальнейшем будем рассматривать, главным образом, электромагнитные плотности распределения протонов, нормированные условием (2).

Для наглядности часто вводят интегральные характеристики:

Среднеквадратичный электромагнитный радиус ядра $R_{эл}$:

$$R_{эл}^2 = \int \rho_0(\mathbf{r})r^2 dV, \quad (3)$$

либо эквивалентный радиус ядра R_0 (радиус равномерно заряженного шара, совпадающего с $R_{эл}$). Различают две группы экспериментов по исследованию структуры ядра: электромагнитные и ядерные.

I. Электромагнитные методы:

1. Рассеяние быстрых электронов (e^-) и мюонов (μ^-) с энергиями $E \geq 100$ МэВ ядрами.
2. Измерение рентгеновских спектров излучения μ -мезоатомов.
3. Анализ кулоновских энергий зеркальных ядер.

Указанные процессы дают информацию о распределении электрического заряда в ядрах и следовательно определяют электромагнитные радиусы ядер.

II. Ядерные методы:

1. Рассеяние нуклонов и α -частиц, а также некоторых мезонов (π , K) на ядрах с энергиями $E \geq 10$ МэВ.
2. Измерение энергетических спектров α -распадов тяжелых ядер.
3. Исследование зависимости энергии связи ядер от массового числа A и заряда Z .

Эти эксперименты с сильно взаимодействующими частицами фактически несут информацию о размерах области действия ядерных сил, определяющие распределение массы внутри ядра, т.е. ρ и n .

Результаты, полученные разными методами, оказались близкими. Таким образом, можно считать, что в атомных ядрах распределение массы и электрического заряда практически совпадают. Учитывая данное обстоятельство, при исследовании структуры ядра будем рассматривать лишь более простые и более точные электромагнитные методы (ядерные методы будут рассмотрены в других темах).

1. Упругое рассеяние быстрых электронов на ядрах.

В опытах по электронному рассеянию экспериментально измеряют дифференциальное сечение рассеяния σ , которое определяется как отношение числа частиц, рассеянных в секунду и телесной угол $d\Omega$ к первоначальному потоку падающих частиц. Расчеты показывают, что сечение рассеяния имеет вид:

$$\sigma(\theta) = \sigma_M(\theta) F^2(\mathbf{q}). \quad (4)$$

Здесь $F(\mathbf{q})$ – электрический форм-фактор, связанный с $\rho(\mathbf{r})$ обратным Фурье-преобразованием:

$$F(\mathbf{q}) = \int \rho(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} dV; \quad (5)$$

$\sigma_M(\theta)$ – сечение рассеяния Мотта, определяющее рассеяние релятивистского электрона на точечном ядре, которое в ультрарелятивистском приближении

($E \ll m_e c^2$) имеет вид:

$$\sigma_M(\theta) = \left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 2E} \right)^2 \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}, \quad (6)$$

где E – энергия электронов в с.д.м.; θ – угол рассеяния; $\hbar\mathbf{q}$ – вектор передачи импульса электроном ядру:

$$q = \frac{2E}{\hbar c} \sin \frac{\theta}{2}. \quad (7)$$

Экспериментально измеренное сечение рассеяния (или форм-фактор $F(\mathbf{q})$) позволяют определить плотность распределения протонов в ядре с помощью прямого Фурье-преобразования:

$$\rho(\mathbf{r}) = \int F(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d^3q. \quad (8)$$

2. Рентгеновские спектры излучения μ -мезоатомов.

В природе существует элементарная частица – мюон (μ^-) (старое, ошибочное название μ -мезон), которая также как и электрон не участвует в силь-

ных взаимодействиях, имеет массу $m_\mu = 105,7 \text{ МэВ} = 206,7 m_e$ с временем жизни $\tau = 2,2 \cdot 10^{-6} \text{ с}$. Мюон, попавший в вещество, за счет электромагнитных сил может быть захвачен ядром и образует связанную систему, подобную обычным атомам. Такая система называется мезоатомом. Как правило, захват мюона происходит на возбужденные уровни с временем жизни порядка 10^{-8} с . При переходе мезоатома в основное состояние испускается квант энергии порядка МэВ (область жесткого рентгеновского диапазона). Как и любое излучение, оно несет информацию о структуре энергетических уровней атома. Однако в отличие от обычных (электронных) атомов, энергетический спектр мезоатома в большей степени зависит от размеров ядра. Измерение энергии квантового перехода позволяет определять $R_{Эл}$.

3. Анализ кулоновских энергий зеркальных ядер.

Изобарные ядра ($A=\text{const}$) называются зеркальными, которые отличаются заменой протонов на нейтроны. Примерами пар зеркальных ядер являются: $({}^3_1\text{H} \div {}^3_2\text{He})$; $({}^7_3\text{Li} \div {}^7_4\text{Be})$; $({}^{17}_8\text{O} \div {}^{17}_9\text{F})$. Опыт показывает, что энергии связи зеркальных ядер различны, причем эта разность $\Delta E_{св}(A)$ растет с ростом массового числа A . Например: $\Delta E_{св}(3) = 0,8 \text{ МэВ}$; $\Delta E_{св}(17) = 3,6 \text{ МэВ}$.

Если предположить, что нуклоны в ядре ведут себя одинаковым образом по отношению к ядерному взаимодействию, то указанная разность энергий связи определяется дополнительным кулоновским отталкиванием "лишнего" протона в поле остальных протонов и, следовательно, имеет чисто электромагнитное происхождение. В простейшем предположении однородного распределения электрического заряда внутри шара радиуса R_0 кулоновская энергия взаимодействия протона с полем шара заряда Ze равна:

$$\Delta E_{св} = \Delta E_{кул} = \frac{3}{5} \cdot \frac{Z^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 R_0}. \quad (9)$$

Измеряя экспериментально $\Delta E_{св}$, можно определить R_0 .

Приведенные методы измерения размеров ядра приводят к близким значениям R_0 , которые связаны с массовым числом A приближенным условием:

$$R_0 = r_0 A^{1/3}, \quad (10)$$

где эмпирическая постоянная $r_0 = (1,2 \div 1,5) \text{ Фм}$ (1 Ферми = 1 Фм = 10^{-15} м).

II. Вопросы для самоконтроля

1) Что следует понимать под "размером ядра"? Чем это понятие отличается от соответствующего классического параметра?

2) Ядро может находиться в различных квантовых состояниях. Отличаются ли размеры ядра, находящегося в основном или возбужденном состояниях?

3) Дать определение среднеквадратичного электромагнитного и эквивалентного радиуса ядра. Найти связь между $R_{эл.}$ и R_0 .

4) Указать способы экспериментального определения размеров атомных ядер. Оценить достоинства и недостатки каждого метода. Какую информацию можно получить в рамках электромагнитных и ядерных методов?

5) Указать связь электрического форм-фактора $F(\mathbf{q})$ с плотностью распределения электрического заряда $\rho(\mathbf{r})$. Оценить недостатки методики определения $\rho(\mathbf{r})$, описанной в п. 1. Предложить способы устранения возможных недостатков.

6) Найти связь величины передачи импульса электроном ядру с энергией E и углом рассеяния ϑ при упругом рассеянии в ультрарелятивистском случае (формула (7)).

7) Используя результаты боровской теории атома, оценить преимущества способа "измерения" радиусов ядер по спектрам излучения μ -мезоатома по сравнению с электронными атомами.

8) Дать определение понятия "зеркальные" ядра. Указать причину различия энергий связи зеркальных ядер.

9) Указать эмпирическую связь радиуса ядра R_0 с массовым числом A . Оценить плотность ядерной материи $\rho_я$ и протона. Сравнить полученную оценку с плотностью воды. Объяснить причину этой разницы. Зависит ли $\rho_я$ от массового числа ядра A ?

10) Оценить радиус нейтронной звезды, имеющей массу, равную массе Земли $M_0 = 5,88 \cdot 10^{24}$ кг.

11) Почему для исследования структуры ядра в опытах по электронному рассеянию необходимо использовать ультрарелятивистские электроны с энергиями $E \geq 100$ МэВ?

III. Примеры решения задач

Задача 1. Оценить энергию электронов и протонов, которые рассеиваются атомными ядрами и способны нести информацию о его размерах ($R = 2 \cdot 10^{-14}$ м). Рассмотреть движение протона в нерелятивистском приближении, а электрон как ультрарелятивистскую частицу.

Решение:

Для достаточно заметного рассеяния необходимо, чтобы длина волны де Бройля λ рассеиваемой частицы не превышала радиус ядра. Выразим это

условие через энергию частицы. Длина волны де Бройля $\lambda = \frac{h}{p}$. Считая протон нерелятивистским, для его кинетической энергии имеем:

$$E_p = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda^2} = \frac{(hc)^2}{2(mc^2)\lambda^2}.$$

Для численных оценок учтем, что для протона $mc^2 = 938.3 \text{ МэВ}$, а также $hc = 1.24 \cdot 10^{-12} \text{ МэВ} \cdot \text{м}$. Тогда

$$E_p = \frac{8.18 \cdot 10^{-28}}{\lambda^2} \text{ (МэВ)} \quad (1.1)$$

Для ультрарелятивистских электронов:

$$E_e \approx h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1.24 \cdot 10^{-12}}{\lambda} \text{ (МэВ)} \quad (1.2)$$

Для оценок возьмем $\lambda = 2 \cdot 10^{-14} \text{ м}$, тогда окончательно получаем: $E_p \approx 2 \text{ МэВ}$ и $E_e \approx 60 \text{ МэВ}$.

Ответ: $E_p \approx 2 \text{ МэВ}$; $E_e \approx 60 \text{ МэВ}$.

Задача 2.

2.1. Вычислить электрический форм-фактор для ядра с зарядом Ze и сферически симметричным распределением заряда $\rho(\mathbf{r}) = Ze\rho_0(\mathbf{r})$, где $\rho_0(\mathbf{r})$ – нормирована условием (2);

2.2. Найти связь электрического форм-фактора $F(q)$ со среднеквадратичным радиусом ядра R (3) при малых $qR \ll 1$.

2.3. Электрон с энергией 100 МэВ упруго рассеялся на протоне под углом $\vartheta = 60^\circ$. При этом измеренный форм-фактор оказался равным $F = k \cdot e$, где e – элементарный заряд, а $k = 0,9725$. Вычислить по этим данным среднеквадратичный радиус протона R .

Решение:

2.1. В сферических координатах с полярной осью вдоль вектора \mathbf{q} в соответствии с (5), имеем:

$$\begin{aligned} F(q) &= \int \rho(r) e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} dV = Ze \int \rho_0(r) e^{-iqr \cos \theta} \sin \theta d\theta d\varphi r^2 dr = \\ &= Ze \cdot 2\pi \int_0^\infty \rho_0(r) r^2 dr \int_0^\pi e^{-qr \cos \theta} \sin \theta d\theta = Ze \frac{4\pi}{q} \int_0^\infty \rho_0(r) r \sin qr dr. \end{aligned} \quad (2.1)$$

2.2. При $qr \leq qR \ll 1$ можно воспользоваться разложением $\sin x$ в ряд Маклорена:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \approx x - \frac{x^3}{6}.$$

Подставляя это разложение в формулу (2.1) с учетом соотношений (2) и (3), получаем:

$$\begin{aligned} F(q) &= Ze \frac{4\pi}{q} \int_0^\infty \rho_o(r) r \left(qr - \frac{q^3 r^3}{6} \right) dr = \\ &= Ze \left[\int_0^\infty \rho_o(r) 4\pi r^2 dr - \frac{q^2}{6} \int_0^\infty \rho(r) r^2 4\pi r^2 dr \right] = \\ &= Ze \left[\int \rho_o(r) dV - \frac{q^2}{6} \int \rho_o(r) r^2 dV \right] = Ze \left(1 - \frac{1}{6} q^2 R^2 \right). \end{aligned} \quad (2.2)$$

2.3. Оценим численно параметр q (7): $q = \frac{2E}{\hbar c} \sin \frac{\theta}{2}$.

По условию задачи $\theta = 60^\circ$, $E = 100 \text{ МэВ} = 1,6 \cdot 10^{-11} \text{ Дж}$, и учтем значения мировых постоянных $\hbar = 1,054 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$, $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$. Тогда $q = 0,508 \cdot 10^{15} \text{ м}^{-1}$ и из соотношения (2.2) окончательно получаем:

$$R = \frac{1}{q} \sqrt{6(1-k)} = \frac{\sqrt{6(1-0,9725)}}{0,508 \cdot 10^{15}} = 0,8 \cdot 10^{-15} \text{ м} = 0,8 \Phi\text{м}.$$

Заметим, что использование приближенной формулы (2,2) оправдано, т.к. $qR = 0,4$; $\frac{1}{6}(qR) = 10^{-3}$; $\frac{1}{5!}(qR)^5 = 1,3 \cdot 10^{-5}$.

Ответ:

$$2.1. F(q) = Ze \frac{4\pi}{q} \int_0^\infty \rho_o(r) r \sin qrd r; 2.2. F(q) = Ze \left(1 - \frac{1}{6} q^2 R^2 \right); 2.3. R = 0,8 \Phi\text{м}.$$

Задача 3. Считая, что плотность электрического заряда внутри протона описывается формулой вида:

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_o \exp\left(-\frac{\mathbf{r}^2}{a^2}\right),$$

найти параметры ρ_o и a . Вычислить электрический форм-фактор протона $F(q)$. Среднеквадратичный радиус протона $R = 0,8 \Phi\text{м}$.

Замечание: При вычислениях учесть интегралы вида:

$$J_1 = \int_0^{\infty} x^{2n} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) dx = \sqrt{\pi} \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}} a^{2n+1};$$

$$J_2 = \int_0^{\infty} x \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) \sin qx dx = \sqrt{\pi} \frac{qa^3}{4} \exp\left(-\frac{q^2 a^2}{4}\right).$$

Решение:

Найдем ρ_0 из условия нормировки:

$$e = \int \rho(r) dV = 4\pi\rho_0 \int_0^{\infty} dr r^2 \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right) = (\sqrt{\pi}a)^3 \rho_0.$$

Откуда получаем:
$$\rho_0 = \frac{e}{(\sqrt{\pi}a)^3}.$$

Для среднеквадратичного радиуса протона R имеем:

$$R^2 = \frac{\int \rho(r) r^2 dV}{\int \rho(r) dV} = \frac{4\pi\rho_0}{e} \int_0^{\infty} dr r^4 \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right) = \frac{3}{2} a^2$$

или $a = \sqrt{2/3}R$. Учитывая, что $R = 0,8 \cdot 10^{-15}$ м и $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, численно получаем: $a = 0,653$ Фм; $\rho_0 = 10^{-19}$ Кл.

Электрический форм-фактор протона можно вычислить по формуле (2.1) с учетом значения интеграла J_2 :

$$F(q) = \frac{4\pi}{q} \int_0^{\infty} \rho(r) r \sin(qr) dr = \frac{4\pi}{q} \frac{e}{(\sqrt{\pi}a)^3} \int_0^{\infty} dr r \sin(qr) \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right) = e \cdot \exp\left(-\frac{q^2 a^2}{4}\right).$$

Заметим, что при малых передачах импульса ($qa \ll 1$), используя разложение $e^x \approx 1+x$, мы приходим к приближенному соотношению (2.2):

$$F(q) \approx e \left(1 - \frac{1}{4} q^2 a^2\right) = e \left(1 - \frac{1}{4} q^2 \cdot \frac{2}{3} R^2\right) = e \left(1 - \frac{1}{6} q^2 R^2\right).$$

Ответ: $a = 0,653$ Фм; $\rho_0 = 10^{-19} \frac{\text{Кл}}{\text{м}^3}$; $F(q) = e \cdot \exp\left(-\frac{q^2 a^2}{4}\right).$

Задача 4. В рамках полуклассической теории Бора в модели точечного ядра оценить расстояния между мюоном и ядром, а также энергии основного и первого возбужденного состояния мезоатома ${}_{92}^{238}\text{U}$. Сравнить результат с размером ядра урана. Вычислить энергию квантового перехода мезоатома из возбужденного в основное состояние.

Решение:

Для неподвижного точечного ядра с зарядом Ze и круговых орбит мюонов основными уравнениями боровской теории является система вида:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}; \quad (4.1)$$

$$mvr = n\hbar, \quad (n=1,2,\dots); \quad (4.2)$$

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (4.3)$$

Из этих уравнений легко получить радиусы орбит мюонов r_n и уровни энергии мезоатома E_n :

$$r_n = a_0 \frac{n^2}{Z}; \quad E_n = -E_0 \frac{Z^2}{n^2}, \quad (4.4)$$

где первый боровский радиус a_0 и модуль энергии основного состояния атома водорода E_0 ($Z=1, n=1$) равны:

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2}; \quad E_0 = \frac{me^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 2\hbar^2}. \quad (4.5)$$

В случае "электронного" атома водорода ($m=m_e$):

$$a_e^0 = 0,528 \cdot 10^{-10} \text{ м}; \quad E_e^0 = 13,6 \text{ эВ}. \quad (4.6)$$

Для мезоатома водорода ($m=m_\mu=206,7m_e$):

$$a_\mu^0 = 2,55 \cdot 10^{-13} \text{ м}; \quad E_\mu^0 = 2,81 \text{ КэВ}. \quad (4.7)$$

Подставляя значения (4.7) в формулы (4.4) в случае мезоатома урана ($Z=92$) для основного ($n=1$) и первого возбужденного состояния ($n=2$), получаем окончательные оценки радиусов орбит r_1 и r_2 , а также соответствующих значений энергий E_1 и E_2 :

$$r_1 = 2,78 \text{ ФМ}; \quad r_2 = 11,1 \text{ ФМ}; \quad (1 \text{ ФМ} = 10^{-15} \text{ м}) \\ E_1 = -23,8 \text{ МэВ}; \quad E_2 = -5,9 \text{ МэВ}. \quad (4.8)$$

Из условия частот Бора можно оценить энергию квантового перехода $E_2 \rightarrow E_1$: $\hbar\omega = E_2 - E_1 = 17,8 \text{ МэВ}$, что соответствует жесткому рентгеновскому диапазону.

Для сравнения оценок (4.8) с радиусом ядра ${}_{92}^{238}\text{U}$ воспользуемся формулой (10): $R = r_0 A^{1/3} = 7,31 \text{ Фм}$, где мы учли, что $r_0 = 1,2 \text{ Фм}$; $A = 238$. Отсюда видно, что, по крайней мере, первая мюонная орбита основного состояния мезоатома лежит внутри атомного ядра, и мезоатом напоминает модель атома Томсона.

Ответ: $r_1 = 2,78 \text{ Фм}$; $r_2 = 11,1 \text{ Фм}$; $E_1 = -23,8 \text{ МэВ}$; $E_2 = -5,9 \text{ МэВ}$; $R = 7,31 \text{ Фм}$; $\hbar\omega = 17,9 \text{ МэВ}$.

Задача 5. Оценить энергию и размеры мезоатома урана ${}_{92}^{238}\text{U}$ для основного состояния с учетом конечных размеров ядра. Считать ядро шаром, равномерно заряженным по объему.

Решение:

Рассмотрим модель ядра в виде шара радиуса R , равномерно заряженного по объему с плотностью $\rho_0 = \frac{3Ze^2}{4\pi R^3}$. Используя теорему Остроградского-

Гаусса $\left(\oint_{\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho d\mathbf{V} \right)$, не сложно вычислить напряженность электрического поля внутри и вне шара:

$$E = \begin{cases} \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 R^3} r, & (r \leq R); \\ \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & (r \geq R). \end{cases} \quad (5.1)$$

Сила, действующая на мюон со стороны ядра, равна:

$$F = -eE = \begin{cases} -kr, & (r \leq R); \\ -k \frac{R^3}{r^2}, & (r \geq R), \end{cases} \quad (5.2)$$

где введено обозначение: $k = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R^3}$. (5.3)

Заметим, что внутри шара мюон движется под действием квазиупругой силы с коэффициентом упругости k , совершая колебательное движение с частотой $\omega = \sqrt{k/m}$. Интересно отметить, что коэффициент упругости ядерной материи не зависит от массового числа и заряда ядра. Действительно, в области

трансурановых элементов $A=1,6Z$ и согласно (10) $R = r_o A^{1/3} = r'_o Z^{1/3}$,
 $r'_o = \sqrt[3]{1,6} r_o \approx 1,62$ Фм. Таким образом:

$$k = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_o R^3} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_o r'_o{}^3} \approx 5,4 \cdot 10^{16} \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2}.$$

Для сравнения: типичные металлы имеют $k \sim 10^2 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2}$

Потенциальная энергия мюона внутри шара:

$$U(r) = -\int_r^\infty \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_r^R F dr = -k \int_r^R r dr - kR^3 \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{kr^2}{2} - \frac{3}{2} kR^2 \quad (5.4)$$

представляет собой потенциал трехмерного гармонического осциллятора в виде параболы, смещенной вниз на величину $\frac{3}{2} kR^2$. Из квантовой механики известно, что энергия такой системы равна:

$$E_n = -\frac{3}{2} kR^2 + \hbar \sqrt{\frac{k}{m}} \left(n + \frac{3}{2} \right), n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.5)$$

Подставляя параметры нашей задачи, для основного состояния ($n=0$) получаем $E_o = -10,3$ МэВ, что вдвое отличается от боровской теории ($E_1 = -23,8$ МэВ). Это приводит и к уменьшению величины кванта излучаемой энергии $\hbar\omega = 4,4$ МэВ.

Линейные размеры области движения осциллятора или "размеры" мезоатома r_o можно оценить из условия $U(r_o) = E_o$:

$$\frac{kr_o^2}{2} = \hbar \frac{3}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow r_o = \sqrt{\frac{3\hbar}{\sqrt{km}}} = 9,9 \text{ Фм}. \quad (5.6)$$

Разумеется, полученные оценки носят ориентировочный характер, так как условием применимости решения следует считать требование $R \gg r_o$, или

$$Z \gg \left(\frac{1}{r'_o} \sqrt{\frac{3\hbar}{\sqrt{km}}} \right)^3 \approx 228, \quad (5.7)$$

что не соответствует реальным ядрам.

Ответ: $E_o = -10,3$ МэВ; $R = 9,9$ Фм.

Задача 6. Показать, что при равномерном распределении заряда по объему шара радиуса R и заряда Ze энергия кулоновского отталкивания протонов определяется формулой (9). Оценить радиусы зеркальных ядер ${}^{17}_8\text{O}$ и ${}^{17}_9\text{F}$, если энергии связи этих ядер равны соответственно $E_{\text{св}}^{\text{O}} = 131,8$ МэВ и $E_{\text{св}}^{\text{F}} = 128,2$ МэВ.

Решение:

Объемная плотность электростатической энергии равна $w = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$.

Энергия кулоновского отталкивания протонов равна полной электростатической энергии поля шара. Тогда, используя результаты задачи 5 (5.1), получаем:

$$\Delta E_{\text{кул}} = \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\int_{r \leq R} E_1^2 dV + \int_{r \geq R} E_2^2 dV \right) = 2\pi\varepsilon_0 \left(\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0} \right)^2 \left[\frac{1}{R^6} \int_0^R r^4 dr + \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} \right] = \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R}.$$

По условию задачи $\Delta E_{\text{св}} = \Delta E_{\text{кул}} = 3,6$ МэВ.

$$\Delta E_{\text{св}} = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R} [(Z+1)^2 - Z^2] = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R} (2Z+1). \quad (6.1)$$

Отсюда находим радиусы зеркальных ядер:

$$R = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(2Z+1)}{\Delta E_{\text{св}}}. \quad (6.2)$$

В нашем случае $\Delta E_{\text{св}} = 3,6$ МэВ, $Z = 4$, тогда $R = 6,5$ Фм.

Ответ: $R = 6,5$ Фм.

IV. Задачи для самостоятельного решения

№ 1. Протон имеет однородное распределение электрического заряда:

$$\rho(\mathbf{r}) = \begin{cases} \rho_0, & 0 \leq r \leq R; \\ 0, & r \geq R, \end{cases}$$

где $R = 0,8$ Фм. Определить ρ_0 . Вычислить электрический форм-фактор $F(q)$ в этой модели и связать его с R для $qR \ll 1$.

Ответ: $\rho_0 = \frac{3e}{4\pi R^3}$; $F(q) = \frac{3e}{q^3 R^3} (\sin qR - qR \cos qR) \approx e \left(1 - \frac{1}{10} q^2 R^2 \right)$.

№ 2. Плотность распределения электрического заряда в ядре определяется формулой:

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_0 e^{-\frac{r}{a}}.$$

Определить среднеквадратичный радиус ядра R и его электрический форм-фактор $F(q)$.

Ответ: $R = a\sqrt{12}$; $F(q) = \frac{\rho_0}{(1 + a^2 q^2)^2}$.

№ 3. Идентифицировать ядро, у которого $Z=N$, а радиус в 1,5 раза меньше радиуса ядра ${}_{13}^{27}\text{Al}$.

Ответ: ${}_{4}^{8}\text{Be}$.

№ 4. Определить заряд ядра, спектр излучения мезоатома которого не зависит от размеров ядра. Оценки провести в рамках боровской теории.

Ответ: $Z \leq 44$.

№ 5. Ядро ${}_{14}^{27}\text{Si}$ переходит в зеркальное ядро ${}_{13}^{27}\text{Al}$ путем позитронного распада. Максимальная энергия позитронов равна 3,48 МэВ. Оценить параметр r_0 в формуле $R = r_0 A^{1/3}$ по указанным экспериментальным данным.

Ответ: $r_0 = 2,52$ Фм.

Тема 2

ЭНЕРГИЯ СВЯЗИ И МАССА АТОМНЫХ ЯДЕР

I. Общая теория и рабочие формулы

Как известно, все стабильные и долгоживущие атомные ядра ($\tau \geq 10^{10}$ с) состоят из протонов и нейтронов (нуклонов). Для дальнейших численных расчетов укажем массы нуклонов и электронов:

Таблица 1. Массы нуклонов и электронов

Частица	Масса (m_0)			
	кг	в единицах m_e	а.е.м.	$m_0 c^2$ (МэВ)
Протон (p)	$1,6726 \cdot 10^{-27}$	1836,15	1,007276	938,279
Нейтрон (n)	$1,6749 \cdot 10^{-27}$	1838,68	1,008665	939,573
Электрон (e)	$9,1105 \cdot 10^{-31}$	1	$5,48 \cdot 10^{-4}$	0,511

В таблице указана одна внесистемная единица измерения массы микро-частиц – атомная единица массы (а.е.м.). За 1 а.е.м. принимается 1/12 часть массы нейтрального атома изотопа углерода $^{12}_6\text{C}$: $1 \text{ а.е.м.} = 1,6605 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 931,502 \text{ МэВ}$. Важнейшим параметром ядра ^A_ZX , характеризующим его прочность, является энергия связи $E_{\text{св}}(Z, A)$.

Энергией связи ядра (относительно всех нуклонов) называется минимальная энергия, которую необходимо сообщить ядру, чтобы расщепить его на составляющие нуклоны. Для стабильных ядер $E_{\text{св}} \geq 0$. Заметим, что внутренняя энергия ядра отличается от энергии связи знаком $E_{\text{вн}} = -E_{\text{св}}$. Знание энергий связи ядер позволяет рассчитать энергетический баланс не только для процесса полного расщепления, но и для любых процессов распадов и взаимных превращений ядер. Например, для выбивания из ядра α -частицы необходимо затратить энергию $E = E_{\text{св}}(Z, A) - E_{\text{св}}(Z-2, A-4) - E_{\text{св}}(2, 4)$.

В силу известного соотношения между энергией и массой ($E = Mc^2$) $E_{\text{св}}$ можно записать в виде:

$$E_{\text{св}} = [Zm_p + Nm_n - M_{\text{я}}(Z, A)]c^2, \quad (1)$$

где масса выражена в кг. Из соотношения (1) следует, что масса стабильного ядра ($E_{\text{св}} \geq 0$) меньше суммы отдельных нуклонов на величину $E_{\text{св}}/c^2$, которая определяется путем введения понятия дефекта массы ядра.

Дефектом массы ядра в ядерной физике называется разность между массой ядра, выраженной в а.е.м., и соответствующим массовым числом:

$$\Delta(Z, A) = M_{\text{я}}(Z, A) - A. \quad (2)$$

В частности, из таблицы 1 дефекты масс p и n (а также α -частицы) равны:

$$\Delta_p = 0,07276 \text{ а.е.м.} = 6,77761 \text{ МэВ};$$

$$\Delta_n = 0,008665 \text{ а.е.м.} = 8,07146 \text{ МэВ};$$

$$\Delta_\alpha = 0,001506 \text{ а.е.м.} = 1,40284 \text{ МэВ}.$$

Связь энергии связи с дефектами масс можно записать по аналогии с (1) в виде:

$$E_{св} = Z\Delta_p + N\Delta_n - \Delta(Z, A). \quad (3)$$

Например, для α -частицы имеем:

$$E_{св} = 2 \cdot (0,007276 + 0,008665) - 0,001506 = 0,003 \text{ а.е.м.} = 28,38 \text{ МэВ}.$$

Важнейшей задачей ядерной физики является получение зависимости $E_{св}(Z, A)$ из всей совокупности ядерно-физических данных. Наиболее прозрачная зависимость получается в жидко-капельной модели ядра:

$$E_{св}(Z, A) = a_1 A - a_2 A^{2/3} - a_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_4 \frac{(A - 2Z)^2}{A} + a_5 \frac{\delta}{A^{1/3}}, \quad (4)$$

где $a_1 = 15,75 \text{ МэВ}$; $a_2 = 17,80 \text{ МэВ}$; $a_3 = 0,71 \text{ МэВ}$; $a_4 = 23,70 \text{ МэВ}$; $a_5 = 12,0 \text{ МэВ}$;

$$\delta = \begin{cases} -1, & (\text{нечетно} - \text{нечетные ядра}), \\ 0, & (\text{нечетные } A), \\ +1, & (\text{четно} - \text{четные ядра}). \end{cases}$$

Зависимость (4) называется полуэмпирической формулой Бете-Вайцеккера (Б.В.).

II. Вопросы для самоконтроля

- 1) В каких единицах измеряется масса атомных ядер и элементарных частиц?
- 2) Дать определения изотопов, изобаров, изотонов и зеркальных ядер.
- 3) Дать определение энергии связи (удельной энергии связи) ядра.
- 4) Привести аргументы в пользу жидко-капельной модели ядра. Указать основные результаты, полученные в этой модели.
- 5) Привести аргументы в пользу постоянства удельной энергии ядер. Объяснить возможность получения энергии в процессах деления тяжелых ядер и реакциях термоядерного синтеза легких элементов.
- 6) Объяснить физический смысл каждого члена формулы Бете-Вайцеккера.

Какие экспериментальные данные лежат в основе формулы (4)? Какие проблемы ядерной физики можно решать с помощью формулы (4)?

7) В справочниках обычно приводятся не массы ядер, а массы (дефекты массы) нейтральных атомов, которые больше массы ядер на массы электронных оболочек. Определив дефекты нейтральных атомов соотношением $\delta(Z, A) = M_{ат}(Z, A) - A$, показать, что формула (3) сохраняет прежний вид путем замены Δ на δ .

8) Дать определение дефекта массы ядер. Указать причину "пропажи" массы при образовании ядра из нуклонов. Почему этот эффект является пренебрежимо малым в атомной физике?

9) Оценить в % вклад каждого члена формулы Бете-Вайцзеккера в полную энергию связи ядер: ${}^4_2\text{He}$; ${}^{48}_{20}\text{Ca}$; ${}^{238}_{92}\text{U}$.

III. Примеры решения задач

Задача 1. Используя формулу Б.В. (4), оценить коэффициент поверхностного натяжения σ ядерной матери.

Решение:

Для оценки σ воспользуемся формулой, связывающей радиус ядра R с массовым числом A :

$$R = r_0 A^{1/3} \quad (r_0 = 1,2 \text{ Фм}). \quad (1.1)$$

Считая ядро шаром радиуса R , поверхностную энергию ядра можно записать в виде:

$$E_{пов} = -\sigma S = -4\pi R^2 = -4\pi\sigma r_0^2 A^{2/3}. \quad (1.2)$$

С другой стороны, из формулы Б.В. (4) $E_{пов} = -a_2 A^{2/3}$, где $a_2 = 17,8 \text{ МэВ} = 2,85 \cdot 10^{-13} \text{ Дж}$. Отсюда для σ имеем:

$$\sigma = \frac{a_2}{4\pi r_0^2}. \quad (1.3)$$

Численно σ равно: $\sigma = \frac{2,85 \cdot 10^{-13}}{4 \cdot 3,14 \cdot 1,44 \cdot 10^{-30}} \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2} = 1,57 \cdot 10^{17} \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2}$.

Для сравнения, вода имеет $\sigma = 7,3 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2}$. Объяснить качественно разницу полученных результатов.

Ответ: $\sigma = 1,57 \cdot 10^{17} \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2}$.

Задача 2. Считая деформированное ядро симметричным относительно вращения вокруг оси Z , а координаты точек на его поверхности в полярных координатах описываются функцией $\mathbf{R}(\theta)$. Представив разложение функции $R(\vartheta)$ в ряд по полиномам Лежандра $P_n(\cos \theta)$ в виде:

$$\mathbf{R}(\theta) = R_0 [1 + \beta_0 P_0(\cos \theta) + \beta_1 P_1(\cos \theta) + \beta_2 P_2(\cos \theta) + \beta_3 P_3(\cos \theta) + \dots], \quad (2.1)$$

где R_0 – радиус недеформированного ядра – шара,

$$P_0(\cos \theta) = 1;$$

$$P_1(\cos \theta) = \cos \theta;$$

$$P_2(\cos \theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2 \theta - 1) = \frac{1}{4}(3\cos 2\theta + 1); \quad (2.2)$$

$$P_3(\cos \theta) = \frac{1}{2}(5\cos^3 \theta - 3\cos \theta) = \frac{1}{8}(5\cos 3\theta + 3\cos \theta),$$

выяснить физический смысл каждого члена разложения (2.1).

Ответ: P_0 – описывает небольшое увеличение радиуса ядра по всем направлениям без изменения формы; P_1 – не описывает деформацию, а определяет лишь смещение центра ядра вдоль оси Z , без изменения его формы; P_2 – определяет малые квадрупольные деформации, которые могут вызвать деление ядра на 2 осколка; P_3 – характеризует процессы деления ядра на 3 осколка и т.д.

Задача 3. Пусть изменение энергии связи ядра происходит в результате малых квадрупольных деформаций, когда координаты точки на поверхности ядра в полярных координатах описываются функцией вида:

$$\mathbf{R}(\theta) = R_0 [1 + \beta_0 + \beta_2 P_2(\cos \theta)], \quad (3.1)$$

где R_0 – радиус сферического ядра ($R_0 = r_0 A^{1/3}$); β_0 - и β_2 - малые параметры деформации; $P_2(\cos \theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2 \theta - 1)$ – квадратичный полином Лежандра (2.2).

Найти условие того, что ядро с массовым числом A и зарядом Z начнет процесс спонтанного деления на 2 осколка.

Решение:

Математическая справка:

1. В сферических координатах (r, ϑ, φ) элемент объема тонкого сферического слоя равен:

$$dV = 2\pi r^2 dr \sin \theta d\theta \quad (3.3)$$

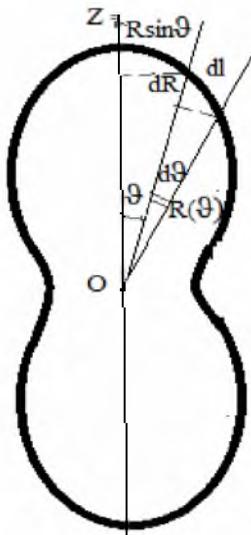


Рис. 1. Сечение деформированного ядра

2. Рассмотрим сложную фигуру, изображенную на рис. 1, координаты точек поверхности которой описывается произвольной функцией $R(\theta)$. Предполагается, что тело симметрично относительно вращения вокруг оси Z . Элемент длины dl на сечении фигуры, изображенной на рис. 1, равен:

$$dl = \sqrt{(Rd\theta)^2 + (dR)^2} = Rd\theta \sqrt{1 + \frac{1}{R^2} \left(\frac{dR}{d\theta} \right)^2}$$

При вращении отрезка dl вокруг оси Z образуется плоское кольцо площадью $dS = 2\pi R \sin\theta dl$. Следовательно, полная площадь поверхности деформированного ядра равна:

$$S = 2\pi \int_0^\pi d\theta \sin\theta R^2(\theta) \sqrt{1 + \frac{1}{R^2(\theta)} \left(\frac{dR(\theta)}{d\theta} \right)^2}. \quad (3.3)$$

3. Для дальнейшего укажем значения некоторых интегралов, которые элементарно вычисляются путем замены $x = -\cos\theta$ с учетом того, что $P_2(\cos\theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$:

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^\pi d\theta \sin\theta P_2(\cos\theta) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} dx (3x^2 - 1); \\ J_2 &= \int_0^\pi d\theta \sin\theta P_2^2(\cos\theta) = \frac{1}{4} \int_{-1}^{+1} dx (9x^4 - 6x^2 + 1) = \frac{2}{5}; \\ J_3 &= \int_0^\pi d\theta \sin\theta \sin^2\theta \cos^2\theta = \int_{-1}^{+1} dx x^2 (1 - x^2) = \frac{4}{15}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

В процессе деформации атомных ядер изменяется каждый член формулы Б.В. (4), но главную роль в этом процессе играют второй (поверхностный) и третий (кулоновский) члены. Таким образом, наша задача сводится к расчетам изменения поверхностной и кулоновской энергий деформированного ядра для выбранной модели $R(\theta)$ (3.1).

Так как ядерное вещество практически несжимаемо, то в процессе деформации его объем остается неизменным. Из этого условия можно найти связь параметров деформации β_0 и β_2 в формуле (3.1):

$$V = 2\pi \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{R(\theta)} r^2 dr = 2\pi \int_0^\pi d\theta \sin\theta \frac{1}{3} R^3(\theta) \approx \frac{4\pi R_0^3}{3} \left(1 + 3\beta_0 + \frac{3}{5}\beta_2^2 \right) = \frac{4\pi R_0^3}{3}.$$

При вычислениях мы воспользовались формулами (3.2) и (3.4) и сохранили лишь члены порядка не выше β_2^2 . Из последнего соотношения для несжимаемого ядра получаем:

$$\beta_o = -\frac{1}{5}\beta_2^2 \quad (3.5)$$

Далее вычислим изменение площади поверхности деформированного ядра. Для этого учтем формулу (3.3) и проведем приближенные расчеты, сохраняя лишь члены порядка не выше β_2^2 с учетом результата (3.5):

$$S \approx 4\pi R_o^2 \left(1 + \frac{2}{5}\beta_2^2\right). \quad (3.6)$$

Тогда поверхностную энергию деформированного ядра можно вычислить по формуле:

$$E_{нов.}^{\text{деф.}} = -\sigma S = -a_2 A^{2/3} \left(1 + \frac{2}{5}\beta_2^2\right), \quad (3.7)$$

Здесь мы воспользовались также результатами задачи 1 (соотношения (1.1) и (1.3)). Сравнивая (3.7) с поверхностным членом формулы Б.В. (4):

$$E_2 = -a_2 A^{2/3}, \quad (3.8)$$

мы видим, что эффект деформации ядра сводится к формальной замене:

$$A^{2/3} \Rightarrow A^{2/3} \left(1 + \frac{2}{5}\beta_2^2\right), \quad (3.9)$$

$$A^{-1/3} \Rightarrow \left[A^{2/3} \left(1 + \frac{2}{5}\beta_2^2\right)\right]^{-1/2} \approx A^{-1/3} \left(1 - \frac{1}{5}\beta_2^2\right).$$

Отсюда можно оценить изменение кулоновской энергии деформированного ядра (4) путем формального перехода:

$$E_{кул.}^{\text{деф.}} = -a_3 Z^2 A^{-1/3} \Rightarrow -a_3 Z^2 A^{-1/3} \left(1 - \frac{1}{5}\beta_2^2\right). \quad (3.10)$$

Тогда полное изменение энергии связи ядра, вызванное деформацией, будет равно:

$$\Delta E_{св.} = E_{\text{деф.}} - E_o = \left[-a_2 A^{2/3} \left(1 + \frac{2}{5}\beta_2^2\right) - a_3 Z^2 A^{-1/3} \left(1 - \frac{1}{5}\beta_2^2\right) \right] -$$

$$- \left[-a_2 A^{2/3} - a_3 Z^2 A^{-1/3} \right] = \frac{\beta_2^2}{5} A^{-1/3} (a_3 Z^2 - 2a_2 A). \quad (3.11)$$

Очевидно, ядро начнет спонтанно деформироваться, разделяясь на два осколка, если $\Delta E_{св.} \geq 0$. Из формулы (3.11) мы получим окончательный результат:

$$\frac{Z^2}{A} \geq 2 \frac{a_2}{a_3} \approx 50. \quad (3.12)$$

Величина $\frac{Z^2}{A}$ называется параметром деления, который играет определяющую роль в процессах спонтанного деления ядер.

Полученный результат позволяет объяснить, например, почему изотоп ${}_{92}^{235}\text{U}$ является менее стабильным относительно процессов спонтанного деления, чем изотоп ${}_{92}^{238}\text{U}$. Достаточно сказать, что в природной смеси изотопов урана ${}_{92}^{235}\text{U}$ составляет лишь 0,3%, тогда как для изотопов ${}_{92}^{238}\text{U}$ эта концентрация достигает 99,7%.

Ответ: $\frac{Z^2}{A} \geq 50$.

Задача 4. Используя формулу Бете-Вайцеккера (4), определить среди изобарных ядер заряд ядра Z_0 , стабильного относительно β -распада. Определить характер β^\pm -активности радиоактивных ядер серебра ${}_{47}^{103}\text{Ag}$, олова ${}_{50}^{127}\text{Sn}$ и цезия ${}_{55}^{141}\text{Cs}$.

Решение:

При радиоактивных β -распадах энергия связи конечного ядра возрастает, и для стабильного из группы изобарных ядер достигает максимума по параметру Z . Из формулы Б.В. (4) при $A=\text{const}$ условие экстремума функции $E_{\text{св}}(Z)$ имеет вид:

$$\frac{dE_{\text{св}}}{dZ} = -\frac{a_3}{A^{1/3}} 2Z_0 + \frac{2a_4}{A} 2(A - 2Z_0) = 0,$$

отсюда:

$$Z_0 = \frac{A}{2 + \frac{a_3}{2a_4} A^{2/3}} = \frac{A}{2 + 0,015 A^{2/3}}. \quad (4.1)$$

Если заряд ядра $Z > Z_0$, то оно будет проявлять β^+ -активность, в противном случае – β^- -активно. Очевидно, при $Z = Z_0$ ядро будет стабильно относительно β -распадов. Используя этот критерий, можно предсказать, что ядра серебра ($Z=47$) являются β^+ -активными ($Z_0=45$), тогда как ядра олова ($Z_0=54$) и цезия ($Z_0=59$) являются β^- -активными.

Ответ: $Z_0 = \frac{A}{2 + 0,015 A^{2/3}}$; ядро ${}_{47}^{103}\text{Ag}$ является β^+ -активным, ядра ${}_{50}^{127}\text{Sn}$ и

${}_{55}^{141}\text{Cs}$ – β^- -активны.

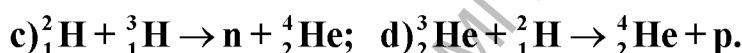
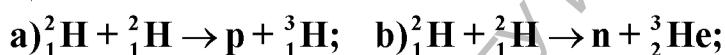
IV. Задачи для самостоятельного решения

№ 1. Показать, что в природе отсутствуют стабильные атомные ядра с массовыми числами $A = 5$ (${}^5_3\text{Li} \rightarrow {}^4_2\text{He} + \text{p}$) и $A = 8$ (${}^8_4\text{Be} \rightarrow 2 {}^4_2\text{He}$). Дефекты масс атомов ${}^5_3\text{Li}$ и ${}^8_4\text{Be}$ равны соответственно 11,680 МэВ и 4,9418 МэВ.

№ 2. Дефект массы атома ${}^9_4\text{Be}$ равен $\delta(4,9)=11,3484$ МэВ. Определить энергию связи бериллия относительно его распада на две α -частицы и нейтрон. Как можно использовать полученный результат для практических целей?

Ответ: $E_{\text{св}} = 1,573$ МэВ. Облучение бериллиевых мишеней α -частицами можно использовать для получения нейтронов.

№ 3. Используя дефекты масс $\delta(1,2)=13,1363$ МэВ, $\delta(1,3)=14,9504$ МэВ, $\delta(2,3)=14,9317$ МэВ, вычислить энергию Q , выделившуюся в следующих термоядерных реакциях:



Какая из указанных реакций является наиболее оптимальной с практической точки зрения? Почему?

Ответ: а) 4,033 МэВ; б) 3,270 МэВ; в) 17,59 МэВ; г) 18,35 МэВ.

Наиболее оптимальной является реакция в).

№ 4. Ядро ${}^{238}_{92}\text{U}$, имеющее удельную энергию связи $7,6 \frac{\text{МэВ}}{\text{нукл}}$, делится на два осколка одинаковой массы, имеющие удельную энергию связи $8,5 \frac{\text{МэВ}}{\text{нукл}}$. Определить освободившуюся при этом кинетическую энергию осколков.

Ответ: 214 МэВ.

№ 5. Ядро ${}^{238}_{92}\text{U}$ делится на два осколка. Вычислить суммарную кинетическую энергию осколков, если бы между нуклонами действовали только кулоновские силы отталкивания.

Ответ: $E_{\text{кин}} = c_3 \left(Z^2 A^{-1/3} - 2 \left(\frac{Z}{2} \right)^2 \left(\frac{A}{2} \right)^{-1/3} \right) = 0,37 c_3 Z^2 A^{-1/3} = 360 \text{ МэВ}.$

Объясните качественно разницу в результатах задач № 4 и № 5.

№ 6. Оценить максимальный заряд ядра $Z_{кр}$ (граница таблицы элементов Менделеева), стабильного относительно процессов спонтанного деления на два фрагмента. (Учесть соотношение между протонами и нейтронами в области трансурановых элементов).

Ответ: $Z_{кр} \approx 130$.

№ 7. Пусть атомное ядро построено не из отдельных нуклонов, а из α -частиц. Оценить максимальное число α -частиц в ядре (k), стабильного относительно процесса спонтанного деления на 2 фрагмента.

Ответ: $k > 50$.

№ 8. Пусть изменение энергии связи ядра происходит в результате малых деформаций, когда координаты точки на поверхности ядра обладают аксиальной симметрией и в плоскости, проходящей через центр ядра, описываются в полярных координатах функцией вида:

$$R(\theta) = R_0 [1 + \beta_0 + \beta_3 P_3(\cos\theta)],$$

где полином Лежандра $P_3(\cos\theta) = \frac{1}{2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta)$. Оценить параметр де-

формации $\frac{Z^2}{A}$, когда ядро начнет процесс деления на 3 фрагмента.

Тема 3

СВОЙСТВА ЯДЕРНЫХ СИЛ

I. Общая теория и рабочие формулы

Так как атомные ядра состоят из протонов (p) и нейтронов (n), называемые нуклонами (N), то все параметры ядерных систем целиком определяются свойствами потенциала NN -взаимодействия. (Строго говоря, потенциальный подход можно применять для процессов с энергиями частиц до 500 МэВ).

Ядерные силы составляют часть одного из фундаментального взаимодействия в природе, называемого *сильным (адронным)* взаимодействием. Основным источником экспериментальной информации о ядерных силах является, во-первых, изучение уровней энергии связанных состояний нуклонов (ядер) и, во-вторых, измерение дифференциальных сечений pp - и pn -рассеяния.

Перечислим наиболее важные свойства NN -сил, полученные в результате анализа имеющихся ядерно-физических данных:

- 1) Притяжение (*Факт существования ядер с удельной энергией связи $8 \frac{\text{МэВ}}{\text{нукл}}$*).
- 2) Величина и радиус действия (*В модели прямоугольной ямы параметры ядерного потенциала имеют порядок $r_0 \approx 2\text{Фм}$, $U_0 \approx 30\text{МэВ}$*).
- 3) Зарядовая независимость ядерных сил (*Результаты pp - и pn -рассеяния и сравнительный анализ энергий связи зеркальных ядер*).
- 4) Спиновая зависимость (*Дейтрон имеет спин $s=1$, и не существует связанной системы двух нуклонов со спином $s=0$*).
- 5) Нецентральный характер (*Наличие квадрупольного момента дейтрона и результаты рассеяния поляризованных протонов на бесспиновых ядрах мишени*).
- 6) Обменный характер (*Результаты упругого pn -рассеяния при энергиях более 100 МэВ*).
- 7) Наличие отгалькивательной сердцевины (*Результаты упругого pp -рассеяния при энергиях более 100 МэВ*).
- 8) Насыщение (*Линейная зависимость энергии связи ядра от массового числа A*).
- 9) Многочастичные силы (*Несоответствие расчетов параметров средних и тяжелых ядер с экспериментальными данными в предположении о двухчастичном характере ядерных сил*).

Качественное объяснение указанных свойств ядерных сил было дано Юкава в рамках мезонной теории. Согласно этой теории предполагалось, что

сильное взаимодействие между элементарными частицами связано с *виртуальным* обменом мезонами (прежде всего π -мезонами). Наглядно эти процессы можно изобразить в виде т.н. диаграмм Фейнмана. Примеры некоторых диаграмм Фейнмана, иллюстрирующие адронное взаимодействие между нуклонами и гиперонами, приведены на рисунке 2.

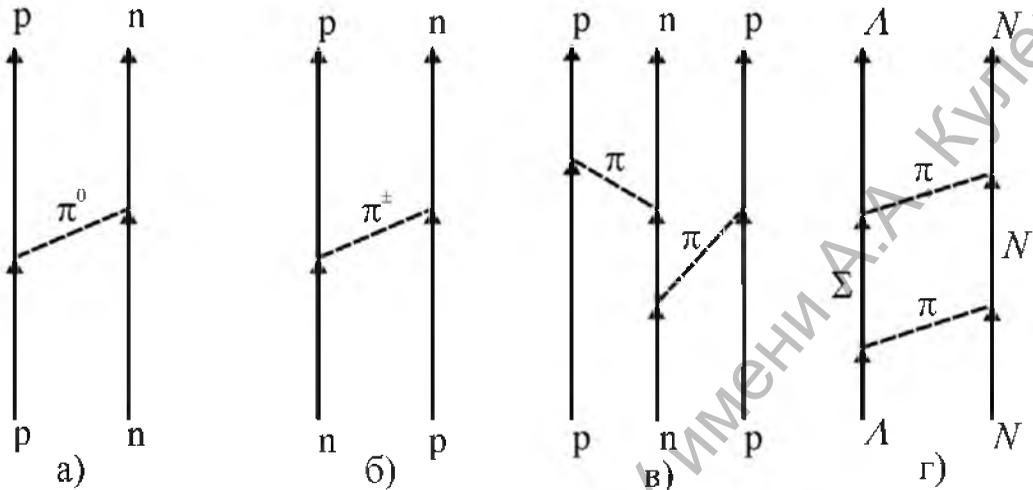


Рис. 2. Фейнмановские диаграммы адронного взаимодействия нуклонов и Λ -гиперона: (а) – упругое pp -рассеяние; (б) – обменная диаграмма; (в) – трехчастичные силы; (г) – ΛN -взаимодействие

В рамках мезонной теории показано, что ядерный потенциал, создаваемый в механизме однопионного обмена, имеет вид (потенциал Юкава):

$$V(r) = -\frac{V_0}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_0}\right), \quad (1)$$

где $r_0 = \frac{\hbar}{mc}$ – комптоновская длина волны π -мезона ($\approx \sqrt{2}$ Фм), характеризующая радиус действия ядерных сил.

Так как отсутствуют методы аналитического решения задач трех и более взаимодействующих частиц, то наибольший практический интерес представляет анализ двухнуклонной системы.

В случае центрально-симметричного ядерного потенциала динамика относительного движения двух нуклонов описывается в сферических координатах волновой функцией вида:

$$\psi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{l,m} \frac{f_l(r)}{r} Y_l^m(\vartheta, \varphi), \quad (2)$$

где орбитальное квантовое число $l = 0, 1, 2, \dots$, магнитное квантовое число $m = 0, \mp 1, \mp 2$, $Y_l^m(\vartheta, \varphi)$ – шаровая функция, а $f_l(r)$ – удовлетворяет радиальному уравнению Шредингера для ядерного потенциала $U(r)$ вида:

$$\frac{d^2 f_l(r)}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[E - U(r) - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} \right] f_l(r) = 0; \quad (3)$$

с граничным условием: $f_l(0) = 0$. В уравнении (3) приведенная масса np -системы $\mu = \frac{M_n M_p}{M_n + M_p} \approx \frac{M}{2}$, а третий член в квадратных скобках имеет смысл центробежной энергии отталкивания:

$$U_{ц.б.} = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{Mr^2}. \quad (4)$$

Связанному состоянию двух нуклонов с энергией связи ε соответствует энергия $E = -\varepsilon < 0$.

В случае инфинитного движения ($E \geq 0$) совместное действие ядерного и центробежного потенциала приводит к "набегу" т.н. фазы рассеяния δ_l , которая зависит от параметров потенциала и определяет асимптотику волновой функции вдали от рассеивающего центра. В теории рассеяния доказывается, что при упругом рассеянии частицы масс μ в центрально-симметричном поле полное сечение рассеяния σ равно:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l, \quad (5)$$

где волновое число падающей волны k равно: $k = \sqrt{\frac{2\mu E}{\hbar^2}}$. Как показывает анализ, для короткодействующих потенциалов с радиусом действия r_0 фаза рассеяния зависит от энергии E следующим образом $\delta_l \sim (kr_0)^{2l+1}$. Следовательно, при низких энергиях $kr_0 \ll 1$, основной вклад в рассеяние вносит s -фаза δ_0 ($l=0$), и формула (5) принимает вид:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0. \quad (6)$$

II. Вопросы для самоконтроля

1) Известно, что в природе существует связанная система n и p (дейтрон) с энергией связи $\varepsilon = 2,226$ МэВ и спином $S = 1$. Почему, вопреки свойству зарядовой независимости, в природе отсутствуют связанные pp - и nn -состояния?

2) Используя идеи мезонной теории (см. рис.2-г) объяснить отсутствие в природе связанной ΛN -системы. (Легчайшим гиперядром является ${}^3_{\Lambda}H$).

3) Энергии связи легчайших ядер 2H , 3H и 4He равны соответственно 2,23 МэВ; 8,5 МэВ и 28,3 МэВ. Как на основании этих данных можно сделать заключение об ограниченности области действия ядерных сил?

4) Указать экспериментальные данные, свидетельствующие о свойстве насыщения ядерных сил.

5) Привести схему эксперимента, из которого следует спин-орбитальная зависимость ядерных сил ($U_{CO} \sim \mathbf{L} \times \mathbf{S}$).

6) Оценить комптоновскую длину волны нейтрального и заряженных π -мезонов ($m_{\pi^0} = 134,96 \text{ МэВ}$; $m_{\pi^\pm} = 139,57 \text{ МэВ}$), а также K -мезонов ($m_K \approx 495 \text{ МэВ}$). Сравнить радиусы действия NN -потенциала, определяющего упругое np -рассеяние и обменное взаимодействие.

7) Основными механизмами ΛN -взаимодействия являются обмен K - и 2π -мезонами. Какой механизм виртуального обмена определяет периферийную область ΛN -потенциала?

III. Примеры решения задач

Задача 1. Считая, что ядерный потенциал имеет вид сферически-симметричной прямоугольной ямы ширины r_0 и глубины $-U_0$, найти связь между U_0 и r_0 для дейтрона с энергией связи $\varepsilon = 2,226 \text{ МэВ}$. Оценить U_0 , если $r_0 = \sqrt{2} \text{ Фм}$. Сравнить качественно ядерные силы с электромагнитным взаимодействием.

Решение:

Так как поле $U(r)$ является сферически-симметричным, то для решения задачи воспользуемся радиальным У.Ш. (3) для функции $f(r) = rR(r)$ с граничными условиями:

$$f(0) = 0; \quad f(\infty) = 0. \quad (1.1)$$

В этом уравнении положим $\mu = M/2$ (M – масса протона), $E = -\varepsilon$. Очевидно, основному состоянию дейтрона соответствует случай $l = 0$ (s -состояние). Вклад центробежной энергии с $l \neq 0$ качественно оценим ниже. Таким образом, основное уравнение (3) примет вид:

$$\frac{d^2 f(r)}{dr^2} - \frac{M}{\hbar^2} [\varepsilon + U(r)] f(r) = 0. \quad (1.2)$$

Для выбранной модели сферической прямоугольной ямы потенциал $U(r)$ имеет вид:

$$U(r) = \begin{cases} -U_0, & 0 \leq r \leq r_0; \\ 0, & r \geq r_0. \end{cases}$$

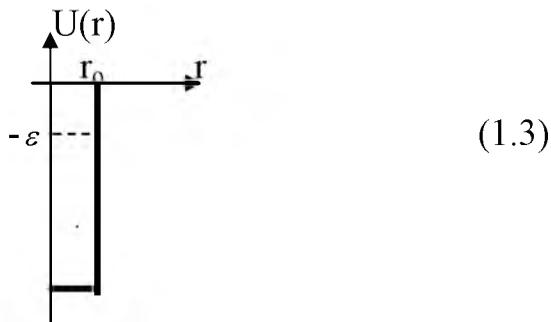


Рис. 3. Ядерные силы в модели прямоугольной ямы ($\varepsilon \ll U_0$). $-U_0$

Дальнейшие оценки подтверждают вывод о том, что $\varepsilon \ll U_0$, так что задачу можно рассматривать в *приближении нулевой энергии связи* ($\varepsilon/U_0 \rightarrow 0$).

Рассмотрим решения уравнения (1.2) в области ядерного притяжения и вне области действия ядерных сил.

$0 \leq r \leq r_0$ (область 1)	$r \geq r_0$ (область 2)
$\frac{d^2 f_1}{dr^2} + \frac{M}{\hbar^2} (U_0 - \varepsilon) f_1 = 0;$	$\frac{d^2 f_2}{dr^2} - \frac{M\varepsilon}{\hbar^2} f_2 = 0;$
$\beta \equiv \sqrt{\frac{M}{\hbar^2} (U_0 - \varepsilon)} \approx \sqrt{\frac{MU_0}{\hbar^2}}; \quad (1.4)$	$\gamma \equiv \sqrt{\frac{M\varepsilon}{\hbar^2}}; \quad (1.6)$
$\frac{d^2 f_1}{dr^2} + \beta^2 f_1 = 0;$	$\frac{d^2 f_2}{dr^2} - \gamma^2 f_2 = 0;$
$f_1 = A \sin(\beta r + \alpha);$	$f_2 = B e^{-\gamma r} + C e^{\gamma r};$
$f_1(0) = 0 \Rightarrow \alpha = 0;$	$f_2(\infty) = 0 \Rightarrow C = 0;$
$\mathbf{f_1(r) = A \sin \beta r.} \quad (1.5)$	$\mathbf{f_2(r) = B e^{-\gamma r}.} \quad (1.7)$

Для окончательного решения задачи осталось "сшить" решения (1.5) и (1.7) на границе областей 1 и 2 в точке $r = r_0$. Условия "сшивания" сводятся к равенству функций (f) и их производных по r (f') при $r = r_0$:

$$\begin{aligned} A \sin \beta r_0 &= B e^{-\gamma r_0}; \\ A \beta \cos \beta r_0 &= -B \gamma e^{-\gamma r_0}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

При наличии двух равенств типа (1.8) удобнее разделить второе уравнение на первое, т.е. приравнять *логарифмические производные* ($f'/f = (\ln f)'$) в точке $r = r_0$, что приводит к равенству:

$$\operatorname{ctg} \beta r_0 = -\frac{\gamma}{\beta}. \quad (1.9)$$

Из условий (1.4) и (1.6) следует, что отношение $\frac{\gamma}{\beta} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{U_0}} \ll 1$, и в приближении нулевой энергии связи дейтрона мы получаем:

$$\operatorname{ctg} \beta r_0 = 0; \quad \beta r_0 = \frac{\pi}{2}; \quad \Rightarrow \quad U_0 r_0^2 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{4M}. \quad (1.10)$$

Заметим, что наши расчеты зависят от характерной комбинации параметров потенциала $U_0 r_0^2$, который будем называть *эффективностью потенциала*. Для численных оценок, учтем, что из мезонной теории следует, что $r_0 = \sqrt{2}$ Фм, тогда из формулы (1.10) окончательно получаем $U_0 = 51,2$ МэВ. Важно заметить, что энергия связи дейтрона $\varepsilon = 2,226$ МэВ мала по сравнению с глубиной потенциальной ямы, следовательно, приближение нулевой энергии связи является разумным приближением.

Для сравнения ядерных сил с электромагнитным взаимодействием можно оценить, например, потенциальную энергию кулоновского отталкивания двух протонов, находящихся на расстоянии $r_0 = 1,414$ Фм:

$$U_{\text{кул}} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0} \approx 1,01 \text{ МэВ}. \quad (1.11)$$

Ответ: $U_0 r_0^2 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{4M}$; $r_0 = 1,414$ Фм, $U_0 = 51,2$ МэВ; $U_{\text{кул}} = 1,01$ МэВ.

Задача 2. Оценить "эффективные размеры" дейтрона и относительное время нахождения нуклонов в области действия ядерных сил τ ($r < r_0 = 1,41$ Фм).

Решение:

Эффективным размером дейтрона R_d можно назвать такое значение r , при котором нуклонная плотность в ядре падает в e раз. Так как нуклонная плотность на периферии ядра в соответствии с формулой (1.7) равна $f_2^2(r) = B^2 \exp(-2\gamma r)$, то в соответствии с нашим определением:

$$R_d = \frac{1}{2\gamma} = \frac{\hbar}{2\sqrt{M\varepsilon}} \approx 2,2 \text{ Фм}. \quad (2.1)$$

Следовательно, дейтрон имеет размеры, превышающие радиус действия ядерных сил, и поэтому является "рыхлой" системой. Об этом говорят и оценки относительного времени нахождения нуклонов в области действия ядерных сил τ :

$$\tau = \frac{\int_0^{r_0} f^2(r) dr}{\int_0^\infty f^2(r) dr} = \frac{\int_0^{r_0} f_1^2(r) dr}{\int_0^{r_0} f_1^2(r) dr + \int_{r_0}^\infty f_2^2(r) dr} \equiv \frac{J_1}{J_1 + J_2}, \quad (2.2)$$

где

$$J_1 = \int_0^{r_0} f_1^2(r) dr = A^2 \int_0^{r_0} \sin^2 \beta r dr = \frac{A^2}{2} \int_0^{r_0} (1 - \cos 2\beta r) dr = \frac{A^2 r_0}{2} \left(1 - \frac{\sin 2\beta r_0}{2\beta r_0} \right) = \frac{A^2 r_0}{2}; \quad (2.3)$$

$$J_2 = \int_{r_0}^{\infty} f_2^2(r) dr = B^2 \int_{r_0}^{\infty} e^{-2\gamma r} dr = \frac{B^2}{2\gamma} e^{-2\gamma r_0} = \frac{A^2 \sin^2 \beta r_0}{2\gamma} = \frac{A^2}{2\gamma}. \quad (2.4)$$

В выражении (2.3) и (2.4) учтены условия (1.8) и (1.10). Из формулы (2.2) окончательно получаем:

$$\tau = \frac{r_0}{r_0 + \frac{1}{\gamma}} = \frac{r_0}{r_0 + 2R_d} = 0,24. \quad (2.5)$$

Следовательно, в области ядерного притяжения нуклоны в среднем находятся лишь 24% времени, а вне потенциальной ямы – 76%. Этот эффект качественно объясняет малость энергии связи дейтрона ($\epsilon \ll U_0$).

Ответ: $R_d = 2.2 \text{ Фм}$; $\tau = 0,24$.

Задача 3. Показать, что связанного состояния двух нуклонов с относительным орбитальным моментом $l \neq 0$ не существует.

Решение:

Необходимым условием того, что NN -система находится в связанном состоянии, является условие отрицательности полной энергии системы ($E < 0$). Если $l \neq 0$, то из-за центробежных эффектов должны появляться силы отталкивания, потенциальная энергия которых по порядку величины равно:

$$U_{ц.б.} = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{MR_d^2} = 4l(l+1)\epsilon. \quad (3.1)$$

Здесь мы воспользовались условиями (4) и (2.1). Тогда полная энергия дейтрона будет равна:

$$E = -\epsilon + U_{ц.б.} = \epsilon [4l(l+1) - 1]. \quad (3.2)$$

Отсюда видно, что при любых $l \neq 0$ ($l = 1, 2, 3, \dots$) энергия $E > 0$, и дейтрон не имеет возбужденных уровней энергии.

Задача 4. Вычислить сечение рассеяния медленных нейтронов на протонах σ , если NN -потенциал имеет вид прямоугольной ямы, описанной в задаче №1. Сравнить теоретические оценки с экспериментом: $\sigma_{\text{эксп.}} = 20,4 \text{ барн}$ ($1 \text{ барн} = 10^{-28} \text{ м}^2$).

Решение

Будем считать, что ядерный потенциал совпадает с потенциалом, полученным в задаче дейтрона (задача № 1). Будем также предполагать, что ос-

новой вклад в сечение рассеяния при низких энергиях вносит лишь s -состояние нуклонов ($l = 0$). Так как спин дейтрона равен единице, то это соответствует триплетному NN -потенциалу. Если ядерные силы не зависят от спинов нуклонов, то сечение рассеяния на этом *триплетном* потенциале должно равняться полному сечению для неполяризованных нуклонов $\sigma_{\text{эксп}}$.

Динамика относительного движения нуклонов с энергией $E > 0$ описывается уравнением (3):

$$\frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \frac{M}{\hbar^2} (E - U(r)) f(r) = 0, \quad (4.1)$$

с граничными условиями:

$$f(0) = 0; \quad |f(\infty)| < \infty. \quad (4.2)$$

Рассмотрим решение уравнения (4.1) для области ядерного притяжения и вдали от рассеивающего центра.

$0 \leq r \leq r_0$ (область 1)	$r \geq r_0$ (область 2)
$\frac{d^2 f_1}{dr^2} + \frac{M}{\hbar^2} (E + U_0) f_1 = 0;$ $k_1 \equiv \sqrt{\frac{M}{\hbar^2} (E + U_0)}; \quad (4.3)$	$\frac{d^2 f_2}{dr^2} + \frac{ME}{\hbar^2} f_2 = 0;$ $k_2 \equiv \sqrt{\frac{ME}{\hbar^2}}; \quad (4.5)$
$\frac{d^2 f_1}{dr^2} + k_1^2 f_1 = 0;$ $f_1(r) = A \sin(k_1 r + \alpha);$ $f_1(0) = 0; \Rightarrow \mathbf{f}_1(\mathbf{r}) = \mathbf{A} \sin \mathbf{k}_1 \mathbf{r};$ (4.4)	$\frac{d^2 f_2}{dr^2} + k_2^2 f_2 = 0;$ $\mathbf{f}_2(\mathbf{r}) = \mathbf{B} \sin(\mathbf{k}_2 \mathbf{r} + \delta_0);$ (4.6)

Для нахождения фазы рассеяния δ_0 необходимо "сшить" решения (4.4) и (4.6) в точке r_0 . С этой целью приравняем логарифмические производные указанных функций при $r = r_0$:

$$k_1 \operatorname{ctg} k_1 r_0 = k_2 \operatorname{ctg}(k_2 r_0 + \delta_0). \quad (4.7)$$

Параметр k_2 , определенный условием (4.5), совпадает с волновым числом k рассеянной волны, введенный ранее в общей теории, поэтому можно положить $k_2 = k$. При низких (тепловых) энергиях нейтронов ($E \rightarrow 0$) также $k_2 = k \rightarrow 0$, кроме того, $k_1 \rightarrow \beta$, где β введено в задаче дейтрона (1.4). С учетом этих обозначений уравнение (4.7) примет вид:

$$\beta \cdot \operatorname{ctg} \beta r_0 = k \cdot \operatorname{ctg} \delta_0. \quad (4.8)$$

Далее учтем условие (1.9):

$$\beta \cdot \operatorname{ctg} \beta r_0 = -\gamma = -\sqrt{\frac{M \varepsilon_t}{\hbar^2}}, \quad (4.9)$$

где энергию связи дейтрона мы обозначили через $\varepsilon_t \equiv \varepsilon = 2,226 \text{ МэВ}$, для того, чтобы подчеркнуть *триплетный* характер ядерного потенциала в дейтроне. Тогда

$$\operatorname{ctg} \delta_0 = -\frac{\gamma}{k} = -\sqrt{\frac{\varepsilon_t}{E}}; \quad \sin^2 \delta_0 = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \delta_0} = \frac{E}{E + \varepsilon_t}. \quad (4.10)$$

Отсюда, на основании формулы (6), получаем сечение низкоэнергетического *рр*-рассеяния для *триплетной* части ядерного потенциала:

$$\sigma_t = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0 = \frac{4\pi \hbar^2}{M} \cdot \frac{1}{E + \varepsilon_t}. \quad (4.11)$$

В пределе $E \rightarrow 0$ окончательно имеем:

$$\sigma_t = \frac{4\pi \hbar^2}{M \varepsilon_t} = 2,33 \text{ барн}. \quad (4.12)$$

Заметим, что полученная оценка на порядок отличается от экспериментального значения $\sigma_{\text{эсп}} = 20,4 \text{ барн}$, измеренного в результате рассеяния неполяризованных нейтронов на протонах. В этом случае вклад в полное сечение рассеяния должно вносить не только рассеяние на *триплетном*, но и на *синглетном* потенциале, статистические веса которых составляют $\frac{3}{4}$ и $\frac{1}{4}$ соответственно:

$$\sigma = \frac{3}{4} \sigma_t + \frac{1}{4} \sigma_s. \quad (4.13)$$

Формально, сечение σ_s можно представить в виде, аналогичном σ_t (4.11), тогда:

$$\sigma = \frac{\pi \hbar^2}{M} \left(\frac{3}{E + \varepsilon_t} + \frac{1}{E + \varepsilon_s} \right). \quad (4.14)$$

Последняя формула хорошо согласуется с экспериментом, если в качестве ε_s использовать значение $\varepsilon_s = 0,07 \text{ МэВ}$. Эта энергия, однако, не отвечает како-

му-либо связанному состоянию двухнуклонной системы, поэтому этот уровень называется *виртуальным уровнем дейтрона*.

Проведенный анализ позволяет сделать общий вывод о том, что ядерные силы в значительной степени зависят от взаимной ориентации спинов нуклонов, при этом триплетный потенциал является более притягивающим, чем синглетный. Это свойство формально можно описать, представив ядерный потенциал в виде:

$$U_{NN}(r) = U_1(r) + U_2(r)\hat{S}_1\hat{S}_2. \quad (4.15)$$

Задача 5. Вводя вместо фазы δ_0 длину рассеяния (a) согласно соотношению:

$$a = -\frac{1}{k \cdot \text{ctg}\delta_0}, \quad (5.1)$$

выразить сечение рассеяния σ при низких энергиях через a . Найти связь триплетной длины рассеяния с энергией связи дейтрона ε_t . Показать, что, если длина рассеяния $a \leq 0$, то двухнуклонная система не может иметь связанных состояний.

Решение:

Из соотношения (5.1) находим:

$$\text{ctg}\delta_0 = -\frac{1}{ak}; \Rightarrow \sin^2\delta_0 = \frac{1}{1 + \text{ctg}^2\delta_0} = \frac{a^2k^2}{1 + a^2k^2}. \quad (5.2)$$

Тогда сечение рассеяния примет вид:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2\delta_0 = \frac{4\pi a^2}{1 + a^2k^2}; \quad \sigma(k \rightarrow 0) = 4\pi a^2. \quad (5.3)$$

Таким образом, длина рассеяния непосредственно определяет эффективное сечение рассеяния при нулевой энергии.

Для нахождения связи триплетной длины рассеяния с энергией связи дейтрона достаточно сравнить соотношения (4.10) и (5.2), из которых сразу получаем:

$$a_t = \frac{1}{\gamma} = \sqrt{\frac{\hbar^2}{M\varepsilon_t}} = 4,31 \text{ Фм}. \quad (5.4)$$

Для сравнения приведем результаты экспериментов по рассеянию нейтронов на параводороде, из которых можно определить как триплетную, так и синглетную длину рассеяния:

$$a_t = 5,42 \text{ Фм}; \quad a_s = -23,7 \text{ Фм}. \quad (5.5)$$

Заметим, что $a_s < 0$, и этот результат не является случайным. Покажем, что, если длина рассеяния $a < 0$, то двухнуклонная система не может иметь связанных состояний. Для этого рассмотрим поведение волновой функции вне области действия ядерных сил (4.6) при низких энергиях ($k \rightarrow 0$):

$$f_2(r) = B \cdot \sin(kr + \delta_0) = B(\sin kr \cdot \cos \delta_0 + \sin \delta_0 \cdot \cos kr) \approx$$

$$B(kr \cdot \cos \delta_0 + \sin \delta_0) = B \cdot \sin \delta_0 (1 + kr \cdot \operatorname{ctg} \delta_0) = B \sin \delta_0 \left(1 - \frac{r}{a}\right). \quad (5.6)$$

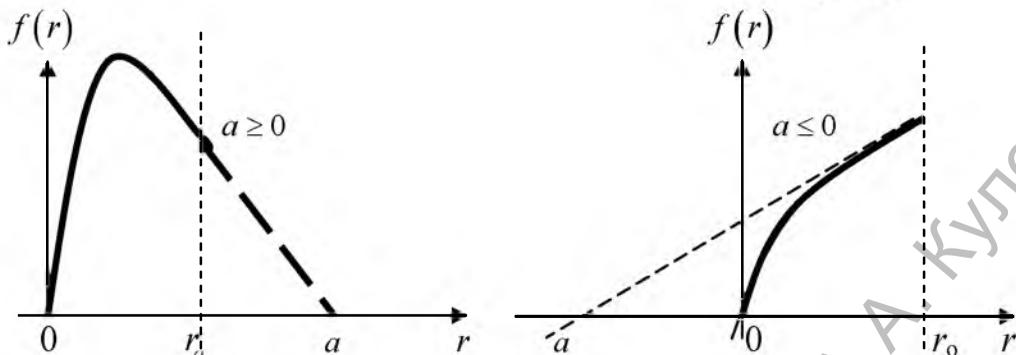


Рис. 4. Волновая функция np -системы при $k \rightarrow 0$ для различных длин рассеяния a

Из рисунка 4 видно, что ограниченная в пространстве связанная система может существовать лишь в том случае, если ядерный потенциал обеспечивает *положительную длину рассеяния* в низкоэнергетической области.

IV. Задачи для самостоятельного решения

№ 1. Оценить среднеквадратичный радиус дейтрона, используя определения и методику расчетов, предложенные в теме № 1, а также результаты задачи №1.

Ответ: $R = 3,66$ Фм. Отметим, что полученный результат почти вдвое превышает оценку (2.1). Объясните возможные причины этого расхождения.

№ 2. Рассмотреть задачу дейтрона, используя в качестве ядерного потенциала зависимость вида:

$$U(r) = -U_0 \exp\left(-\frac{r}{r_0}\right).$$

2.1. Вычислить параметр U_0 при $r_0 \approx 2$ Фм, используя точное решение уравнения Шредингера (4.1). (Путем замены $x = \exp\left(-\frac{r}{2r_0}\right)$ привести УШ к уравнению Бесселя).

2.2. Оценить энергию связи дейтрона, используя прямой вариационный метод Ритца, взяв пробную волновую функцию дейтрона в виде $\psi = A \exp\left(-\alpha \frac{r}{2r_0}\right)$, где α – вариационный параметр, и используя результаты п. (2.1). ([5], задача 75).

Ответ: (2.1) $U_0 = 37,5$ МэВ; (2.2) $\varepsilon = 2,18$ МэВ.

№ 3. Пусть ядерный потенциал представляет собой сферическую прямоугольную яму глубины $-U_0$ и ширины $r_0 = 1,2$ Фм, содержащую бесконечно отталкивающую сердцевину размером $a = 0,2$ Фм. Оценить параметр U_0 , обеспечивающий экспериментальное значение энергии связи дейтрона. ([5], задача 91).

Ответ: $U_0 = 122,9$ МэВ.

№ 4. Рассчитать длину рассеяния и низкоэнергетический предел сечения рассеяния нейтронов на протонах для потенциала с жесткой сердцевиной задачи № 3. ([5], задача 92).

Ответ: $a = 5,03$ Фм; $\sigma = 3,18$ барн.

- Заметим, что полученные результаты практически совпадают с результатами задач 4 и 5 ($a_t = 4,31$ Фм; $\sigma_t = 2,33$ барн.). Таким образом, эксперименты по *np*-рассеянию *при низких энергиях* не позволяют решить вопрос о существовании жесткой сердцевины в ядерном потенциале.

Тема 4

РАДИОАКТИВНОСТЬ АТОМНЫХ ЯДЕР

I. Общая теория и рабочие формулы

Радиоактивность – явление самопроизвольного распада ядра с испусканием одной или нескольких частиц.

В ядрах чаще всего наблюдается 4 типа радиоактивности:

- α -распад: ${}^A_Z X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2} Y + {}^4_2 He$.
- β -превращения: ${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z+1} Y + e^- + \nu_e$ (β^- -распад);
 ${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z-1} Y + e^+ + \nu_e$ (β^+ -распад);
 $e^- + {}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z-1} Y + \nu_e$ (К-захват).
- γ -распад: ${}^A_Z X^* \rightarrow {}^A_Z X + \gamma$.
- Спонтанное деление ядра: ${}^{238}_{92} U \rightarrow {}^{139}_{54} Xe + {}^{96}_{38} Sr + 3n$.

Все α - и β -радиоактивные элементы можно разделить на 4 радиоактивных ряда (радиоактивные семейства). В каждом ряду массовое число всех элементов определяются формулой:

$$A = 4n + c,$$

где c – постоянная для данного ряда величина ($c = 0, 1, 2, 3$), а n – переменное целое число ($n \leq 60$).

Ряд тория ($c = 0, A = 4n$) ${}^{236}_{92} U \rightarrow {}^{208}_{82} Pb$;

Ряд нептуния ($c = 1, A = 4n + 1$) ${}^{237}_{93} Np \rightarrow {}^{209}_{83} Bi$;

Ряд урана ($c = 2, A = 4n + 2$) ${}^{238}_{92} U \rightarrow {}^{206}_{82} Pb$;

Ряд актиноурана ($c = 3, A = 4n + 3$) ${}^{235}_{92} U \rightarrow {}^{207}_{82} Pb$.

Сформулируем необходимое условие радиоактивного распада. Пусть M_n, M_k и m_i – массы начального, конечного ядра и массы покоя вылетающих частиц. Тогда, на основании закона сохранения энергии:

$$M_n c^2 = M_k c^2 + \sum_i m_i c^2 + E,$$

где E – кинетическая энергия продуктов распада ($E \geq 0$), получим искомое условие:

$$M_n \geq M_k + \sum_i m_i.$$

При рассмотрении радиоактивных процессов необходимо иметь в виду два важных обстоятельства:

а) Радиоактивность – явление статистическое, описываемое вероятностными законами.

б) Радиоактивность – это свойство самого ядра, не зависящее от внешних условий (давления, температуры, химического и агрегатного состояний и т. д.)

Отсюда следует, что вероятность распада ядра за единицу времени (для данного ядра) является величиной постоянной λ . Тогда число распадов ядер dN за время dt целиком определяется числом радиоактивных ядер N в данный момент времени:

$$dN = -\lambda N dt .$$

Из последнего условия легко получить *основной закон радиоактивного распада*:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} .$$

Этот закон позволяет ввести следующие характеристики:

а) *Удельная активность препарата*, характеризующая скорость распада:

$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N .$$

Параметр A измеряют в Беккерелях (Бк), Резерфордах (Рд) и Кюри (Ки):

$$1 \text{ Бк} = 1 \frac{\text{расп}}{\text{с}} ;$$

$$1 \text{ Рд} = 10^6 \text{ Бк};$$

$$1 \text{ Ки} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Бк}.$$

б) *Среднее время жизни* радиоактивного ядра $\tau = \frac{1}{\lambda}$.

в) *Период полураспада* ядра $T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \tau \cdot \ln 2$ ($\ln 2 \approx 0,693$).

II. Вопросы для самоконтроля

- 1) Объяснить причины независимости процессов радиоактивного распада от внешних условий.
- 2) Почему β^- -распад сопровождается вылетом электронного антинейтрино, а при К-захвате испусканием нейтрино?
- 3) Торий ${}_{90}^{232}\text{Th}$ после ряда радиоактивных превращений образует свинец ${}_{82}^{208}\text{Pb}$. Сколько α - и β -превращений при этом произошло?
- 4) Может ли в результате α - и β -превращений в радиоактивном семействе нептуния образоваться такие химические элементы, как ${}_{84}^{213}\text{Po}$ и ${}_{83}^{211}\text{Bi}$?
- 5) Обосновать "странное" соотношение между единицами измерения удельной активности Кюри и Беккерелей.
- 6) Перечислить законы сохранения, регулирующие процессы радиоактивных превращений.
- 7) Как определяются энергии, освобождаемые при β^- -распаде, β^+ -распаде и К-захвате, если известны массы материнского и дочернего атомов и масса электрона ($M_{ам} = M_x + Zm_e$)?

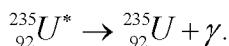
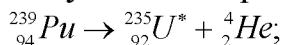
III. Примеры решения задач

Задача 1. Альфа-радиоактивный плутоний ${}^{239}_{94}\text{Pu}$ превращается в γ -активный изотоп ${}^{235}_{92}\text{U}^*$, который испускает γ -квант с энергией $E_\gamma = 0,09\text{МэВ}$. Найти скорость α -частицы. Массы ядер в а.е.м. равны:

$$M_{\text{Pu}} = 239,08 \text{ а.е.м.}; M_{\text{U}} = 235,02 \text{ а.е.м.}; M_{\alpha} = 4,001 \text{ а.е.м.}$$

Решение:

В задаче рассматриваются следующие ядерные превращения:



Энергия, выделяемая при распаде, равна:

$$E = 931,502 (M_{\text{Pu}} - M_{\text{U}} - M_{\alpha}) - E_\gamma = 55,9 \text{ МэВ} = 8,94 \cdot 10^{-12} \text{ Дж}.$$

Эта энергия переходит в кинетическую энергию продуктов распада:

$$E = E_{\text{U}} + E_{\alpha}.$$

В соответствии с законом сохранения импульса:

$$M_{\text{U}} v_{\text{U}} = M_{\alpha} v_{\alpha}$$

$$M_{\text{U}} \frac{M_{\text{U}} v_{\text{U}}^2}{2} = M_{\alpha} \frac{M_{\alpha} v_{\alpha}^2}{2}$$

$$M_{\text{U}} E_{\text{U}} = M_{\alpha} E_{\alpha}.$$

Тогда $\frac{E_{\text{U}}}{E_{\alpha}} = \frac{M_{\alpha}}{M_{\text{U}}} \approx 0,017 \ll 1$, следовательно, практически вся энергия уносится α -частицей ($E_{\alpha} = E$), т.е.

$$\frac{M_{\alpha} v_{\alpha}^2}{2} = E; \quad v_{\alpha} = \sqrt{\frac{2E}{M_{\alpha}}}.$$

Учитывая, что $M_{\alpha} = 4,001 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 6,64 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$, окончательно получаем:

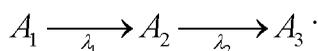
$$v_{\alpha} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,94 \cdot 10^{-12}}{6,64 \cdot 10^{-27}}} \frac{\text{м}}{\text{с}} \approx 5,2 \cdot 10^7 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Задача 2. При радиоактивном распаде ядер изотопа A_1 образуется радиоизотоп A_2 . Их постоянные распада λ_1 и λ_2 . Полагая, что в начальный момент препарат содержал только ядра изотопа A_1 в количестве N_{10} , определить:

- 1) количество ядер изотопа A_2 в момент t ;
- 2) промежуток времени, через который количество ядер изотопа A_2 достигнет максимума;
- 3) для долгоживущего материнского ядра $\lambda_1 \ll \lambda_2$ определить условия, когда активность обоих препаратов станет одинаковым (условие радиоактивного равновесия).

Решение:

Рассмотрим процессы вида:



1) Очевидно, выполняется условие: $N_1(t) = N_{10} \exp(-\lambda_1 t)$. Скорость накопления изотопа A_2 определяется уравнением:

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2.$$

Тогда

$$\frac{dN_2}{dt} + \lambda_2 N_2 = \lambda_1 N_{10} e^{-\lambda_1 t}.$$

Ищем решение последнего уравнения в виде:

$$N_2(t) = N_{10} (c_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 e^{-\lambda_2 t}).$$

Учитывая, что $N_2(0) = 0$, получим $c_2 = -c_1$ и следовательно:

$$N_2(t) = N_{10} c_1 (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}).$$

Подставляя это решение в исходное уравнение, найдем c_1 :

$$c_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Отсюда окончательно получаем:

$$N_2(t) = N_{10} \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}).$$

2) Дифференцируя последнее условие по времени и приравнявая результат нулю, легко получить результат:

$$t_0 = \frac{\ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2}}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

3) Сравним уравнения:

$$N_1(t) = N_{10} \exp(-\lambda_1 t) \quad \text{и} \quad N_2(t) = N_{10} \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}).$$

Если материнское ядро долго живущее, а дочернее быстро распадается ($\lambda_1 \ll \lambda_2$), причем время наблюдения t мало по сравнению с $\tau_1 = \frac{1}{\lambda_1}$, то $\lambda_1 t \ll 1$, и уравнения упрощаются:

$$N_1 \approx \text{const}; \quad N_2 \approx N_{10} \frac{\lambda_1}{\lambda_2} (1 - e^{-\lambda_2 t}).$$

При $t \rightarrow \infty$ $N_2 = N_2(\infty) = N_{10} \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, т.е. наступает условие радиоактивного равновесия: $N_1 \lambda_1 = N_2 \lambda_2$, когда распад дочернего ядра компенсируется увеличением их числа за счет распада материнского ядра.

Задача 3. Вычислить коэффициент проницаемости потенциального барьера при α -распаде ядра с зарядом $(Z+2)e$ в случае, когда кинетическая

энергия α -частицы $E \ll U_0$, где U_0 – высота кулоновского барьера. Найти отношение коэффициентов проницаемости для α -частиц, испущенных ядрами тория ${}^{226}_{90}\text{Th}$ с энергиями $E_1 = 6,33$ МэВ и $E_2 = 6,22$ МэВ.

Решение:

Вне ядра α -частица испытывает кулоновское отталкивание с потенциалом:

$$U(r) = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

а внутри – ядерное притяжение со стороны соседних нуклонов. Результирующее поле $U(r)$ схематически изображено на рисунке.

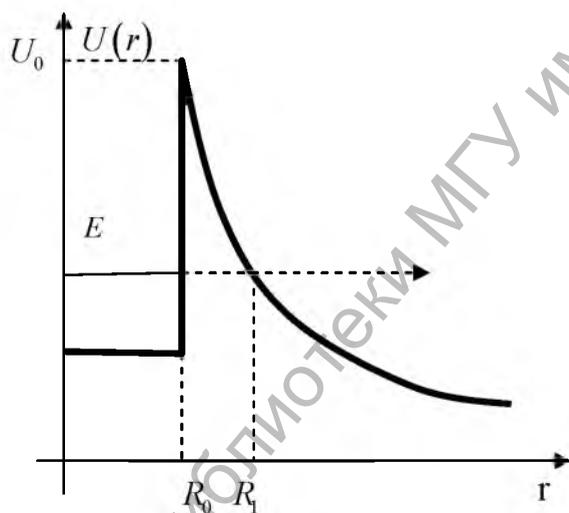


Рис. 5. Потенциальная энергия взаимодействия α -частицы с ядром

Коэффициент проницаемости барьера D равен:

$$D \equiv \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \int_{R_0}^{R_1} \sqrt{2m(U(r) - E)} dr \right\} = \exp \left\{ -\frac{2\sqrt{2mE}}{\hbar} \int_{R_0}^{R_1} \sqrt{\frac{U(r)}{E} - 1} dr \right\}.$$

Для дальнейшего удобно ввести обозначение:

$$\cos^2 \theta \equiv \frac{E}{U(r)} = \frac{4\pi\epsilon_0 E}{2Ze^2} \cdot r;$$

$$dr = -\frac{Ze^2}{\pi\epsilon_0 E} \cos \theta \sin \theta d\theta$$

Эта замена переменных приводит к изменению пределов интегрирования/

При $r = R_0$, $\cos^2 \theta = \frac{E}{U(R_0)} = \frac{E}{U_0} \ll 1 \Rightarrow \theta_0 = \frac{\pi}{2}$;

При $r = R_1$, $\cos^2 \theta = \frac{E}{U(R_1)} = 1 \Rightarrow \theta_1 = 0$.

Тогда искомый интеграл становится элементарным:

$$\int_{R_0}^{R_1} dr \sqrt{\frac{U(r)}{E} - 1} = \frac{Ze^2}{\pi \epsilon_0 E} \int_0^{\pi/2} d\theta \sin^2 \theta = \frac{Ze^2}{4\epsilon_0 E}.$$

Отсюда для D окончательно получаем:

$$D = \exp \left\{ -\frac{2\sqrt{2mE}}{\hbar} \cdot \frac{Ze^2}{4\epsilon_0 E} \right\} = \exp \left(-\frac{C}{\sqrt{E}} \right),$$

где введено обозначение:

$$c \equiv \frac{\sqrt{2m}Ze^2}{2\hbar\epsilon_0}.$$

При $Z = 88$ отношение $\frac{D_2}{D_1} = 3,5$.

IV. Задачи для самостоятельного решения

№ 1. Определить возраст древних деревянных предметов, у которых удельная активность ^{14}C составляет 0,6 удельной активности этого изотопа в только что срубленных деревьях. Период полураспада ^{14}C равен $T = 5,53 \times 10^3$ лет.

Ответ: $4,1 \cdot 10^3$ лет.

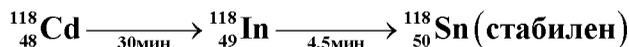
№ 2. Вычислить активность 1 г изотопа $^{226}_{88}\text{Ra}$ и время, через которое активность упадет на 10%. Период полураспада $T = 1,62 \times 10^3$ лет.

Ответ: $A = 0,975 \text{ Ки}$; $t = 243$ года.

№ 3. Оценить высоту кулоновского барьера для α -частицы, испущенной ядром $^{222}_{86}\text{Rn}$. Какова ширина барьера для α -частицы, вылетающей с кинетической энергией $E = 5,5$ МэВ.

Ответ: 29 МэВ ; $3,6 \cdot 10^{-14} \text{ м}$.

№ 4. Радиоизотоп $^{118}_{48}\text{Cd}$ испытывает превращения по цепочке:



(под стрелками указаны периоды полураспада). Считая, что в момент $t = 0$ препарат содержал только $^{118}_{48}\text{Cd}$, найти:

- 1) какая часть ядер превратится в стабильные ядра через 60 мин;
- 2) во сколько раз уменьшится активность препарата через 60 мин.

№ 5. Первый успешный эксперимент по изучению нейтрино был проведен Алленом (1942), наблюдавшим ядра отдачи в K -захвате ${}^7_4\text{Be}$.

1) Показать, что кинетическая энергия ядер отдачи ${}^7_4\text{Li}$ (при отсутствии γ -квантов) с хорошей точностью дается приближенным выражением:

$$E \approx \frac{(m_\nu c^2 + Q)Q}{M_\alpha c^2},$$

где m_ν – масса нейтрино, Q – энергия распада и M_α – масса ядра ${}^7_4\text{Li}$.

2) Вычислить ожидаемую энергию отдачи в эксперименте Аллена для значений массы нейтрино 0 ; $0,1 m_\nu$ и $0,5 m_\nu$.

Тема 5

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ФИЗИКИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

I. Общая теория и рабочие формулы

Самым важным свойством элементарных частиц является их способность к взаимопревращениям, вызванными тремя типами сил: сильным (адронным), электромагнитным и слабым взаимодействиями. При этом все многообразие таких процессов регулируется законами сохранения, связанными с какой-либо симметрией законов природы. В физике элементарных частиц все законы сохранения можно разбить на три группы:

В I группу входят точные законы сохранения, связанные с геометрией 4-мерного пространства–времени. Сюда относят законы сохранения энергии (однородность времени), импульса (однородность пространства) и момента импульса (изотропность пространства).

Ко II группе относят точные законы сохранения зарядов (электрический, барионный и лептонные заряды), которые обычно указывают в таблицах элементарных частиц (античастицы имеют заряды противоположных знаков).

В III группу входят приближенные законы сохранения, которые выполняются не всегда, а лишь для некоторых типов фундаментальных взаимодействий. Существует эмпирическое правило: чем сильнее взаимодействие, тем оно более "симметрично", и следовательно тем большее количество законов сохранения выполняется. Наиболее точными из приближенных законов сохранения являются закон сохранения четности, странности, очарования (шарма) и прелести (красоты), справедливые как для сильного, так и для электромагнитного взаимодействий, но нарушаемые слабыми силами.

Для практических целей ограничимся рассмотрением лишь законов сохранения энергии и импульса.

Энергия E и импульс \mathbf{p} релятивистской частицы с массой покоя m_0 определяются соотношениями:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad \mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (1)$$

Для покоящейся частицы ($\mathbf{v} = 0$) энергия покоя $E_0 = m_0 c^2$. Тогда естественно определить кинетическую энергию движущейся частицы в виде:

$$T = E - m_0 c^2. \quad (2)$$

Важно отметить, что из соотношений (1) следует связь между энергией, импульсом и массой:

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m_0^2 c^2, \quad (3)$$

которая не зависит от v и, следовательно, от выбора системы отсчета. Это дает нам право для системы из N частиц строить релятивистский инвариант

$$J = \frac{\left(\sum_{i=1}^N E_i\right)^2}{c^2} - \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i\right)^2, \quad (4)$$

использование которого часто является более удобным, чем применение законов сохранения энергии и импульса.

II. Вопросы для самоконтроля

1) Опираясь на законы сохранения энергии, а также электрического и барионного зарядов, объяснить стабильность электрона и протона. Перечислите все (11) стабильных элементарных частиц.

2) Перечислить законы сохранения, которые сохраняются (нарушаются) в следующих реакциях:

$$p + p \rightarrow p + \Lambda + K^+;$$

$$\Lambda \rightarrow p + \pi^-;$$

$$e^- + e^+ \rightarrow D^0 + \bar{D}^0;$$

$$D^0 \rightarrow K^+ + \pi^-.$$

3) Привести примеры превращений, в которых нарушаются законы сохранения странности, очарования и красоты.

4) Используя соотношения (1), вывести формулу (3). Записать связь между энергией и импульсом фотона.

5) Показать, что релятивистская кинетическая энергия (2) переходит в известное соотношение $\frac{m_0 v^2}{2}$ при $v \ll c$.

6) Описать свойства античастиц и частиц-резонансов. Указать способы их экспериментального наблюдения.

7) Вычислить импульсы протона, мюона и электрона, кинетические энергии которых 1,0 ГэВ.

III. Примеры решения задач

Задача 1. Пионы ($m_\pi c^2 = 140$ МэВ) и мюоны ($m_\mu c^2 = 106$ МэВ) с одинаковыми импульсами $140 \text{ МэВ}/c$ проходят сквозь прозрачное вещество. Найти диапазон значений показателя преломления этого вещества, чтобы излучение Вавилова–Черенкова давали лишь мюоны.

Решение:

Излучение Вавилова–Черенкова имеет место, когда скорость частицы превышает фазовую скорость света в данном веществе $\frac{c}{n}$, где n – показатель

преломления. Следовательно, для того чтобы лишь мюоны давали излучение Вавилова–Черенкова, необходимо, чтобы выполнялись неравенства:

$$\frac{c}{v_{\pi}} \geq n \geq \frac{c}{v_{\mu}}.$$

Скорости частиц найдем из соотношения (1):

$$v = \frac{pc}{\sqrt{p^2 + m^2c^2}}.$$

Таким образом, $v_{\pi} = \frac{c}{\sqrt{2}}$, $v_{\mu} = \frac{c}{1,26}$. Отсюда получим окончательный результат:

$$1,41 \geq n \geq 1,26.$$

Задача 2. Два протона движутся навстречу друг другу с одинаковыми кинетическими энергиями $T = 50$ ГэВ (в Л-системе). Найти кинетическую энергию T' одного протона относительно другого. Энергия покоя протона $mc^2 = 938$ МэВ.

Решение:

Энергия и импульс двух протонов в Л-системе равны:

$$E = 2E_p = 2(T + mc^2); \quad \mathbf{p} = 0,$$

следовательно, релятивистский инвариант равен:

$$J_1 = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = \frac{4(T + mc^2)^2}{c^2}.$$

Аналогичные параметры в системе отсчета, связанной с одним из протонов, равны:

$$E = mc^2 + (T' + mc^2) = T' + 2mc^2; \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}',$$

где по формуле (3) можно вычислить p' :

$$p'^2 = \frac{(T' + mc^2)^2}{c^2} - m^2c^2 = \frac{T'(T' + 2mc^2)}{c^2}.$$

Отсюда: $J_2 = 2mT' + 4m^2c^2$. Приравнявая $J_1 = J_2$, легко получаем окончательный результат:

$$T' = \frac{2T(T + 2mc^2)}{mc^2}.$$

Численно это дает $T' = 5530$ ГэВ. Возможность такого большого "выигрыша" в энергии лежит в основе метода встречных пучков.

Задача 3. Релятивистский π^0 -мезон с массой m распался на лету на два γ -кванта с энергиями E_1 и E_2 (в Л-системе). Найти угол θ между направлениями разлета этих фотонов.

Решение:

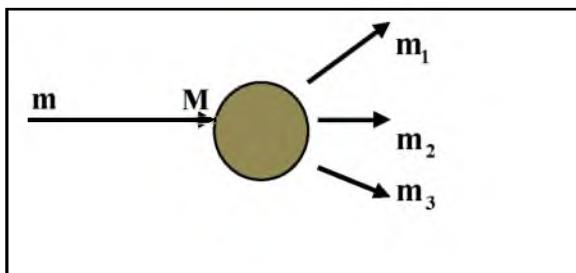
Релятивистский инвариант системы до распада равен $J_1 = m^2c^2$, а после распада в Л-системе:

$$J_2 = \frac{(E_1 + E_2)^2}{c^2} - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 = \frac{4E_1E_2}{c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

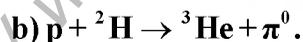
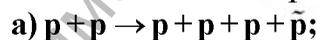
Здесь была учтена связь энергии и импульса фотонов: $p = \frac{E}{c}$. Из равенства

$J_1 = J_2$ сразу находим ответ:

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{mc^2}{2\sqrt{E_1E_2}}.$$



Задача 4. Частица массы m налетает на покоящуюся частицу массой M . В результате столкновения рождается много частиц с массами m_i . Найти пороговую кинетическую энергию налетающей частицы. Вычислить порог реакций:



Считать, что $M({}^2\text{H}) = 2m_p$, $M({}^3\text{He}) = 3m_p$, $m_p c^2 = 938 \text{ МэВ}$, $m_\pi c^2 = 135 \text{ МэВ}$.

Решение:

Обозначим энергию и импульс налетающей частицы E_0 и p_0 , где

$$p_0^2 = \frac{E_0^2}{c^2} - m^2 c^2.$$

Тогда до реакции в Л-системе имеем:

$$J_1 = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2 + M(2E_0 + Mc^2).$$

После реакции в СЦМ ($\mathbf{p} = \sum_i \mathbf{p}_i = 0$) при пороговой энергии минимальная энергия системы равна сумме энергий покоя рожденных частиц: $E = \sum_i m_i c^2$.

Следовательно, релятивистский инвариант конечного состояния равен:

$$J_2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = \frac{\left(\sum_i m_i c^2\right)^2}{c^2}.$$

Приравняв $J_1 = J_2$, легко получить выражение для полной энергии E_0 налетающей частицы:

$$E_0 = \frac{\left(\sum_i m_i c^2\right)^2 - mc^2 - Mc^2}{2Mc^2}.$$

Отсюда пороговая кинетическая энергия равна:

$$T_0 = E_0 - mc^2 = \frac{\left[\left(\sum_i m_i c^2 \right)^2 - (mc^2 + Mc^2)^2 \right]}{2Mc^2}.$$

а) Для реакции рождения протон-антипротонной пары имеем:

$$m = m_p; \quad M = m_p; \quad \sum_i m_i = 4m_p; \quad T_0 = 6m_p c^2 = 5,63 \text{ ГэВ}.$$

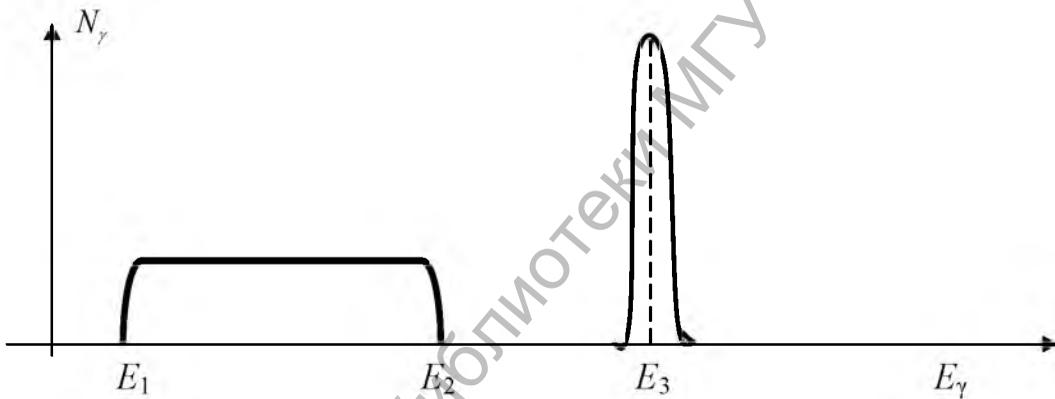
б) Для рождения пионов при протон-дейтронном столкновении получим:

$$m = m_p; \quad M = 2m_p; \quad \sum_i m_i = 3m_p + m_\pi; \quad T_0 = 0,2 \text{ ГэВ}.$$

Задача 5. При взаимодействии медленных π^- -мезонов с ядрами водородной мишени наблюдались следующие реакции:



Энергетический спектр возникающих γ -квантов изображен на рисунке:



где $E_1 = 54 \text{ МэВ}$, $E_2 = 84 \text{ МэВ}$, $E_3 = 130 \text{ МэВ}$.

а) Какому каналу реакции принадлежит каждый максимум?

б) Считая известными массы нейтрона и протона, определить массу π^- -мезона.

в) Найти массу π^0 -мезона.

Решение:

а) Узкий максимум соответствует каналу (1), широкий – каналу (2).

б) Пренебрегая импульсом π^- -мезона, запишем законы сохранения энергии и импульса для канала (1):

$$m_\pi c^2 + m_p c^2 = E_n + E_\gamma;$$

$$\mathbf{p}_n = -\mathbf{p}_\gamma,$$

где энергия нейтрона и фотона вычисляются по формулам:

$$E_\gamma = \frac{p_\gamma}{c}; \quad E_n = \sqrt{(m_n c^2)^2 + c^2 p_n^2} = \sqrt{m_n^2 c^4 + E_\gamma^2}.$$

Отсюда получаем:

$$m_\pi c^2 = E_n + E_\gamma - m_p c^2 = E_3 - m_p c^2 + \sqrt{m_n^2 c^4 + E_3^2} = 140 \text{ МэВ}.$$

в) В СЦМ для канала (2) релятивистский инвариант равен:

$$m_\pi^2 c^2 = \frac{(E_{\gamma 1} + E_{\gamma 2})^2}{c^2} - (\mathbf{p}_{\gamma 1} + \mathbf{p}_{\gamma 2})^2 = 4 \frac{E_{\gamma 1} E_{\gamma 2}}{c^2}.$$

Отсюда получаем:

$$m_{\pi^0} c^2 = 2\sqrt{E_1 E_2} = 135 \text{ МэВ}.$$

Задача 6. Определить волновую функцию нестабильной частицы. Вычислить вероятность обнаружения частицы в состоянии с данной энергией.

Решение:

В соответствии с основным законом радиоактивного распада число нестабильных частиц меняется согласно соотношению:

$$N(t) = N(0) e^{-\lambda t}.$$

Найдем связь постоянной распада λ со свойствами распадающихся частиц.

Для свободного движения волновая функция частицы равна:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(0) e^{\frac{i}{\hbar}(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}.$$

Для покоящейся частицы ($\mathbf{p} = 0$) и действительных значений E вероятность ее нахождения в данном состоянии не будет зависеть от времени, т.к.

$$|\psi(t)|^2 = |\psi(0)|^2 = \text{const}.$$

Чтобы распад частицы произошел, тогда энергия E должна быть комплексной:

$$E = E_0 - i \frac{\Gamma}{2}.$$

Тогда вероятность обнаружения частицы в таком состоянии равна:

$$|\psi(t)|^2 = |\psi(0)|^2 e^{-\frac{\Gamma}{\hbar} t}.$$

Последнее выражение согласуется с основным законом радиоактивного распада, если положить

$$\Gamma = \lambda \hbar.$$

Для нахождения распределения по энергиям воспользуемся преобразованием Фурье:

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega g(\omega) e^{-i\omega t},$$

где $g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) e^{i\omega t} dt.$

Учитывая соотношение $\omega = \frac{E}{\hbar}$ и, если распад частицы начинается в момент $t = 0$, то для $g(E)$ получаем:

$$g(E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dt e^{i\frac{E}{\hbar}t} \psi(0) e^{-i\frac{E_0}{\hbar}t} e^{-\frac{\Gamma t}{2\hbar}} = \frac{\psi(0)}{\sqrt{2\pi}} \frac{\hbar}{\Gamma/2 - i(E - E_0)}.$$

Плотность вероятности $P(E)$ обнаружения энергии E пропорциональна $|g(E)|^2$:

$$P(E) = c |g(E)|^2 = c \frac{|\psi(0)|^2}{2\pi} \frac{\hbar^2}{\Gamma^2/4 - (E - E_0)^2}.$$

Постоянную c найдем из условия нормировки:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(E) dE = 1 \Rightarrow c = \frac{\Gamma}{\hbar^2 |\psi(0)|^2}.$$

Отсюда окончательно получаем:

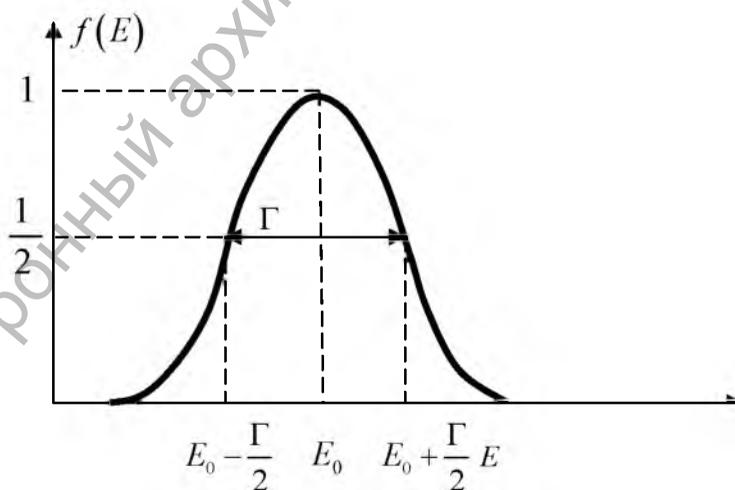
$$P(E) = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}.$$

Полученное соотношение называется формулой Брейта–Вигнера. Изобразим результат графически. Для удобства вместо $P(E)$ введем функцию $f(E)$:

$$f(E) = \frac{\pi\Gamma}{2} P(E) = \frac{\Gamma^2}{4} \cdot \frac{1}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}.$$

Заметим, что при $E = E_0$ $f(E_0) = 1$, а при $E = E^\pm = E_0 \pm \frac{\Gamma}{2}$ $f(E^\pm) = \frac{1}{2}$.

Графически функция $f(E)$ изображена на рисунке:



Из проведенного анализа можно сделать следующие выводы:

1. Энергия распадающегося состояния не имеет точного значения.
2. Мнимая добавка Γ приводит к уширению соответствующей линии спектра (естественная ширина).

3. Учитывая соотношение $\Gamma = \lambda \hbar$ и $\lambda = 1/\tau$, находим $\tau \cdot \Gamma \sim \hbar$, т.е. время жизни τ и ширина спектра Γ связаны соотношением неопределенности.

IV. Задачи для самостоятельного решения

№ 1. Гиперядро ${}^5_{\Lambda}\text{He}$ испытывает слабый распад ${}^5_{\Lambda}\text{He} \rightarrow {}^4\text{He} + p + \pi^-$. Вычислить энергию связи Λ -гиперона B_{Λ} , если его энергия распада $Q = 34,6$ МэВ (Q – суммарная кинетическая энергия частиц). Энергии покоя Λ -гиперона, протона и π -мезона равны соответственно: 1115,6 МэВ; 938,3 МэВ и 139,6 МэВ.

Ответ: 3,1 МэВ (Достаточно воспользоваться законом сохранения энергии:

$$m_{\alpha}c^2 + m_{\Lambda}c^2 - B_{\Lambda} = m_{\alpha}c^2 + m_p c^2 + m_{\pi}c^2 + Q).$$

№ 2. Показать, что рождение электрон-позитронной пары одним γ -квантом возможно, если в реакции участвует частица с массой $m_0 \neq 0$. Найти порог рождения пары.

Ответ: $T_0 = 2m_e c^2 \left(1 + \frac{m_e}{m_0}\right)$.

№ 3. Какова кинетическая энергия T_n нейтронов, если известно, что в результате облучения жидководородной мишени нейтронами, в реакции $n + p \rightarrow d + \pi^0$ могут наблюдаться γ -кванты от распада $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$, разлетающиеся в противоположных направлениях в Л-системе?

Ответ: $T_n = 300$ МэВ.

№ 4. Позитрон с кинетической энергией, равной его энергии покоя, аннигилирует на покоящемся свободном электроне. В результате возникает два γ -кванта, энергия одного из которых в два раза больше энергии другого. Вычислить угол между направлениями разлета обоих γ -квантов.

Ответ: $\theta = 120^\circ$.

№ 5. Для описания внутренней структуры адронов (барионов и мезонов) Гелл-Манн и Цвейг (1963) ввели 3 фундаментальные частицы – кварки, параметры которых указаны в таблице (в настоящее время введено 6 типов кварков):

Кварк	Z	B	S	J
u	$+\frac{2}{3}$	$+\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{2}$
d	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{2}$
s	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{3}$	-1	$\frac{1}{2}$

Здесь Z – электрический заряд (в единицах e); B – барионный заряд; S – странность; J – спин.

1) Сконструировать из трех кварков следующие барионы:

$$p, n, \Sigma^+, \Sigma^-, \Xi^0, \Xi^-, \Omega^-.$$

2) Построить из кварк-антикварковых пар следующие мезоны:

$$\pi^+, \pi^-, K^+, K^-, K^0.$$

3) Ω^- – гиперон имеет спин $\frac{3}{2}$ и странность $S = -3$, следовательно, он состоит из трех s -кварков, находящихся в одинаковых спиновых состояниях $J_z = +\frac{1}{2}$, что противоречит принципу запрета Паули. Как согласовать кварковую структуру барионов с принципом запрета Паули?

Ответ:

1) $(uud); (udd); (uus); (dds); (uss); (dss); (sss).$

2) $(u\bar{d}); (\bar{u}d); (u\bar{s}); (\bar{u}s); (d\bar{s}).$

3) Кварки имеют дополнительное внутреннее квантовое число (цвет), которое может принимать одно из трех различных значений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Широков Ю.М. Ядерная физика: учебное пособие / Ю.М. Широков, Н.П. Юдин. – М.: Наука, 1980. – 728 с.
2. Фрауэнфельдер Г. Субатомная физика / Г. Фрауэнфельдер, Э. Хенли. – М.: Мир, 1979. – 736 с.
3. Капитонов И.М. Введение в физику ядра и частиц: учебное пособие / И.М. Капитонов. – М.: Едиториал УРСС, 2002. – 384 с.
4. Иродов И.Е. Сборник задач по атомной и ядерной физике: учебное пособие / И.Е. Иродов. – М.: Атомиздат, 1976. – 232 с.
5. Флюгге З. Задачи по квантовой механике: в 2 т. / З. Флюгге. – М.: Мир, 1974. – Т. 1. – 374 с.; Т. 2. – 316 с.