И. В. Марченко (г. Могилев, Беларусь)

ПОЛНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ СОБЫТИЯ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Введение раздела «Элементы теории вероятностей» в программу школьного курса математики на повышенном уровне является положительным изменением в содержании предмета, способствующим непрерывности в образовательном процессе, поддерживающим глобализацию образования, формирующему стохастическое мышление учащихся. Вместе с этим у учителей возникли определенные трудности, связанные в основном с отсутствием учебных пособий, подходящих дидактических материалов и методических рекомендаций. Частично они были решены за счет организации образовательных курсов на базе Института развития образования. В то же время многие вопросы остаются открытыми, потому что отсутствует самое главное – опыт преподавания подобного раздела учащимся.

Данный материал посвящен одной из самых интересных и особенных тем в курсе теории вероятностей. Формула полной вероятности проста и понятна, главным условием ее применения является наличие полной группы попарно несовместных гипотез, с которыми в результате эксперимента может произойти интересующее нас событие А. (В эксперименте наряду с гипотезами и событием А могут произойти и другие события, например, противоположное событию А, но в решаемой задаче о них просто не идет речь.)

Трудности возникают при использовании данной формулы на практике. Первая из них – это неумение увидеть вероятностную ситуацию с полной вероятностью. Это вызывает попытки применить другие теоремы – сложения, умножения, формулу Бернулли и т. д., что совершенно бессмысленно, так как задачи рассматриваемого класса можно решить только с помощью данной формулы. Это их основная особенность.

Дальнейшие трудности связаны с обозначением события А и гипотез H_i. При решении задач по данной теме принципиально важным становится четкая и ясная формулировка событий. В противном случае может возникнуть путаница при нахождении их вероятностей или будет получено неверное решение задачи.

После того как события определены верно, остается найти их вероятности. Учащиеся могут испытывать и здесь некоторые затруднения. В этом случае надо посоветовать прочитать события дословно, так как они сформулированы выше, и сразу станет понятно, какую вероятность требуется вычислить.

Обязательно следует сделать дополнительную проверку на правильность определения полной группы попарно несовместных гипотез. Контролем является выполнимость равенства суммы их вероятностей единице.

Для пояснения выше сказанного рассмотрим следующую задачу.

Два стрелка сделали по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,6, для второго – 0,3. После стрельбы в мишени оказалась одна пробоина. Какова вероятность того, что эта пробоина принадлежит первому стрелку? [1]

Эта задача решается с помощью формул полной вероятности и Байеса. В программу не входит изучение формулы Байеса, поэтому можно поставить вопрос задачи таким образом. Какова вероятность того, что после стрельбы в мишени оказалась одна пробоина?

Разберем решение исходной задачи, потому что гораздо интереснее, кто же из стрелков вероятнее всего попал в мишень. Из вопроса задачи ясно, что событие А – после стрельбы в мишени оказалась одна пробоина. Нахождение гипотез не такое простое задание и очень часто вызывает затруднение у учащихся. Они пытаются определять гипотезы по данным в задаче вероятностям, что совершенно неправильно. При выделении гипотез надо «забыть» числовые данные задачи и обратиться к самому эксперименту, провести анализ того, в чем он состоит. Есть два стрелка, они делают по одному выстрелу. Что может произойти в результате? Ответ приходит сразу: оба не попадут в цель, попадет только первый стрелок, попадет только второй стрелок, попадут оба стрелка. Это и есть гипотезы, которые требовалось найти. Обозначим их соответственно H_1, H_2, H_3, H_4. Причем эти события попарно несовместны и образуют полную группу событий.

Теперь запишем формулу полной вероятности:

$$P(A)=P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)+P(H_3)P(A|H_3)+P(H_4)P(A|H_4),$$

из которой видно, какие вероятности требуется найти. Определяем сразу вероятности гипотез.

$$P(H_1)=0{,}4\cdot 0{,}7=0{,}28,\ P(H_2)=0{,}6\cdot 0{,}7=0{,}42,$$
$$P(H_3)=0{,}4\cdot 0{,}3=0{,}12,\ P(H_4)=0{,}6\cdot 0{,}3=0{,}18.$$

Выполняем проверку $\sum_{k=1}^{4}P(H_k)=0{,}28+0{,}42+0{,}12+0{,}18=1$.

Вычисляем условные вероятности. Прочитаем первое событие $A|H_1$, заменив буквенные обозначения на текст. Получим событие: после стрельбы в мишени оказалась одна пробоина при условии, что оба стрелка не попали в цель. Очевидно, что вероятность этого события 0. Поступая далее подобным же образом, находим остальные вероятности.

$$P(A|H_1)=0,\ P(A|H_2)=0{,}6,\ P(A|H_3)=0{,}3,\ P(A|H_4)=0.$$

При нахождении последней вероятности исключаем возможность попадания в одну пробоину двумя стрелками.

В результате получаем, что полная вероятность события А будет

$$P(A)=0{,}28\cdot 0+0{,}42\cdot 0{,}6+0{,}12\cdot 0{,}3+0{,}18\cdot 0=0{,}288.$$

Используя формулу Байеса

$$P(H_2|A)=\frac{P(H_2)P(A|H_2)}{P(A)},$$

можно найти вероятность того, что пробоина принадлежит первому стрелку.

$$P(H_2|A)=\frac{0{,}42\cdot 0{,}6}{0{,}288}=0{,}875.$$

Список использованных источников

1. Марченко, И. В. Теория вероятностей : методические рекомендации : в 2 ч / И. В. Марченко. – Могилев : МГУ им. А. А. Кулешова, 2011. – Ч. 1. – 52 с.