Н. М. ***Рогановский****, член-корреспондент академии образования Республики Беларусь, доктор педагогических наук, профессор кафедры методики преподавания математики Могилёвского государственного университета им. А. А. Кулешова,*
Е. Н. ***Рогановская****, кандидат педагогических наук, доцент кафедры методики преподавания математики Могилёвского государственного университета им. А. А. Кулешова*

ЗАДАЧИ, РАЗРЕШИМЫЕ В НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЛАХ

МАТЕРИАЛ ДЛЯ ФАКУЛЬТАТИВНЫХ ЗАНЯТИЙ

Под задачей, разрешимой в натуральных числах, будем понимать задачу, условие и требование (ответ) которой выражаются натуральными числами. Наиболее известным примером таких задач в геометрии служат пифагоровы треугольники — прямоугольные треугольники, стороны которых x, y, z выражаются натуральными числами и для которых, в соответствии с теоремой Пифагора, выполняется равенство

$$x^2 + y^2 = z^2. \qquad (*)$$

Тройки натуральных чисел (x, y, z), удовлетворяющих равенству (*), называются *пифагоровыми тройками*. Пифагоровы тройки известны очень давно. Особое значение придавалось тройке (3, 4, 5): египтяне с её помощью строили прямые углы; Витрувий считал эту тройку высшим достижением математики, а Платон — символом супружества. Свидетельством интереса древних к пифагоровым тройкам служат пирамиды фараона Снофру (XXVII век до н. э.), построенные с использованием треугольников со сторонами 20, 21 и 29, 18, 24 и 30 десятков египетских локтей. Исследованием пифагоровых троек занимались Евклид, Пифагор, Диофант и др. Исследователи и в настоящее время находят новые теоретико-числовые закономерности и современные математические средства обоснования. Разнообразный материал по пифагоровым тройкам (иногда в несистематизированном виде) можно найти в источниках [2—6, 9—11].

В данной статье преследуется методическая цель: разработать содержание учебного материала для факультативных занятий по математике, посвящённое задачам, разрешимым в натуральных числах. С учётом этого предлагается материал, допускающий в основном элементарные методы обоснования. Частично затронут вопрос об умножении матриц (в объёме, не требующем специального изучения теории матриц) — одного из методов, с помощью которого генерируются простейшие пифагоровы тройки. Содержание материала хорошо иллюстрирует связь между элементами теории чисел и геометрии. С решениями приведены некоторые типы задач, разрешимых в натуральных числах. Часть задач приведена для самостоятельного решения. Материал может быть использован как на факультативных занятиях в X—XI классах, так и для организации учебно-исследовательской работы школьников, при подготовке к олимпиадам и конкурсам. Данная статья развивает подход к определению содержания факультативных занятий, изложенный ранее в статье [7].

Начнём с теории вопроса.

Простейшие пифагоровы тройки: основные теоремы

Пифагоровы тройки (x, y, z), не имеющие общих делителей, больших 1, называются *простейшими* (примеры см. в таблице 1).

Свойства. 1. Если (x, y, z) — пифагорова тройка, то для любого натурального k тройка (kx, ky, kz) также будет пифагоровой тройкой. Ясно, что множество пифагоровых троек — бесконечное множество. В частности, тройка чисел (333 333 333, 444 444 444, 555 555 555) является пифагоровой. Почему? Является ли она простейшей? Обратите внимание, что таких троек с повторяющимися цифрами 3, 4 и 5 можно построить сколько угодно.

2. Если пифагорова тройка простейшая, то: а) числа x, y, z попарно взаимно просты; б) только одно число может быть чётным; в) числа x и y не могут быть одновременно нечётными; г) число z всегда нечётно.

Доказательства. 1. Справедливость этого утверждения очевидна.

2. а) Допустим, что два из них, например x и y имеют простой общий делитель p, то из равенства (*) следует, что на p делится и третье число z. Это противоречит тому, что тройка — простейшая.

б) Докажите самостоятельно.

в) Если бы $x = 2n - 1$, $y = 2m - 1$, то $z^2 = x^2 + y^2 = 4(n^2 + m^2 - n - m) + 2$. Следовательно, z^2 делилось бы на 2, но не делилось бы на 4. Противоречие.

Задание. Выясните, существует ли пифагорова тройка чисел, у которой: а) $x = 1$; б) $x = 2$?

Следующие две теоремы являются основными. Теорема 1 обычно называется теоремой Евклида.

Таблица 1. **Простейшие пифагоровы тройки с $z \leq 300$**

(3, 4, 5)	(5, 12, 13)	(8, 15, 17)	(7, 24, 25)
(20, 21, 29)	(12, 35, 37)	(9, 40, 41)	(28, 45, 53)
(11, 60, 61)	(16, 63, 65)	(33, 56, 65)	(48, 55, 73)
(20, 99, 101)	(36, 77, 85)	(39, 80, 89)	(65, 72, 97)
(88, 105, 137)	(60, 91, 109)	(15, 112, 113)	(44, 117, 125)
(85, 132, 157)	(17, 144, 145)	(24, 143, 145)	(51, 140, 149)
(57, 176, 185)	(119, 120, 169)	(52, 165, 173)	(19, 180, 181)
(84, 187, 205)	(104, 153, 185)	(95, 168, 193)	(28, 195, 197)
(60, 221, 229)	(133, 156, 205)	(21, 220, 221)	(140, 171, 221)
(23, 264, 265)	(105, 208, 233)	(120, 209, 241)	(32, 255, 257)
(160, 231, 281)	(96, 247, 265)	(69, 260, 269)	(115, 252, 277)
	(161, 240, 289)	(68, 285, 293)	

Теорема 1. Если пифагорова тройка (x, y, z) простейшая, то существуют $m, n \in N$, такие, что выполняются равенства (см., например, [4])

$$x = m^2 - n^2,\ y = 2mn,\ z = m^2 + n^2,\quad m, n \in N. \qquad (**)$$

Доказательство. Установлено, что в простейшей пифагоровой тройке (x, y, z) одно из чисел x или y чётно, а число z всегда нечётно. Допустим, что y чётно, а x и z нечётны. Перепишем равенство (*) в виде $y^2 = z^2 - x^2 = (z + x)(z - x)$. Заметим, что y^2, $(z + x)$, $(z - x)$ — чётные числа. Разделив левую и правую часть полученного равенства на 4, будем иметь

$$\left(\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{z+x}{2}\cdot\frac{z-x}{2}.$$

Обозначим

$$m_1 = \frac{z+x}{2},\ n_1 = \frac{z-x}{2}.$$

Докажем, что m_1 и n_1 взаимно просты. Действительно, если d — их общий делитель, то d делит $m_1 + n_1 = z$ и $m_1 - n_1 = x$. Пришли к противоречию с тем, что z и x взаимно просты.

Аналогичным образом устанавливается, что числа m_1 и n_1 не могут иметь одинаковую чётность и, следовательно, одно из них чётное, а другое нечётное.

Воспользуемся далее тем, что если произведение двух взаимно простых чисел является квадратом, то каждое из сомножителей является квадратом. Поэтому $m_1 = m^2$, $n_1 = n^2$. Подставляя m^2 и n^2 в равенства для m_1 и n_1, будем иметь

$$m^2 = \frac{z+x}{2},\ n^2 = \frac{z-x}{2},\ m^2n^2 = \frac{y^2}{4}.$$

Отсюда получаем формулы (**).

Следующая теорема выражает достаточные условия существования троек простейших натуральных чисел.

Теорема 2 (обратная теореме 1). Если в тройке (x, y, z) натуральные числа x, y и z выражаются формулами (**), причём: а) m и n взаимно просты; б) $m > n$; в) одно из чисел m или n чётное, а другое нечётное, то (x, y, z) является простейшей пифагоровой тройкой.

Доказательство. Непосредственная проверка показывает, что для любых натуральных m и n из (**) тройка (x, y, z) является пифагоровой. Покажем, что при выполнении условий а—в) пифагорова тройка (x, y, z) — будет простейшей. Действительно, предположим, что x, y и z имеют простой общий делитель p. Делитель $p \neq 2$, так как в этом случае x и y были бы чётными, а из условия в) следует, что x нечётное. Пусть $p > 2$. Так как p (по допущению) делит $y = 2mn$ и $p > 2$, то оно должно делить m или n. Если, например, p делит m, то из равенства $x = m^2 - n^2$ и допущения, что p делит x следует, что р делит n, т. е. m и n не взаимно просты, как требует условие а).

Вывод формул (**) при помощи комплексных чисел (необходимые сведения о комплексных числах можно найти по многочисленным источникам, см., например, [10]). Рассмотрим комплексное число вида $m + ni$, где $m, n \in N$. Возведём его в квадрат (умножение выполняется аналогично, как и в множестве действительных чисел, с учётом равенства $i^2 = -1$):

$$(m + ni)^2 = (m + ni)(m + ni) = (m^2 - n^2) + 2mni.$$

Найдём модули обеих частей полученного равенства и приравняем их друг другу. Для левой части:

$$|(m + ni)^2| = |(m + ni)|\cdot|(m + ni)| = \sqrt{m^2 + n^2}\cdot\sqrt{m^2 + n^2} = m^2 + n^2.$$

Для правой части:

$$|(m^2 - n^2) + 2mni| = \sqrt{(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2}.$$

Итак,

$$m^2 + n^2 = \sqrt{(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2},$$

или

$$(m^2 + n^2)^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2.$$

Получаем пифагорову тройку (x, y, z), в которой

$$x = m^2 - n^2,\ y = 2mn,\ z = m^2 + n^2,$$
$$m, n \in N.$$

Дерево простейших пифагоровых троек и матрицы

Рассматриваемые здесь матрицы представляют собой таблицы чисел. Интересно отметить, что в математике действия выполняются не только над отдельными числами, но и над таблицами чисел.

Нетрудно установить, что при умножении матриц A, B и C справа на вектор-столбец, компоненты которого состоят из пифагоровой тройки, получается вектор-столбец, компоненты которого образуют новую пифагорову тройку [10].

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Покажем, как выполняется умножение матриц. Например:

$$A\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 1\cdot 3-2\cdot 4+2\cdot 5 \\ 2\cdot 3-1\cdot 4+2\cdot 5 \\ 2\cdot 3-2\cdot 4+3\cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \\ 13 \end{bmatrix},$$

$$B\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 1\cdot 3+2\cdot 4+2\cdot 5 \\ 2\cdot 3+1\cdot 4+2\cdot 5 \\ 2\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 20 \\ 29 \end{bmatrix},$$

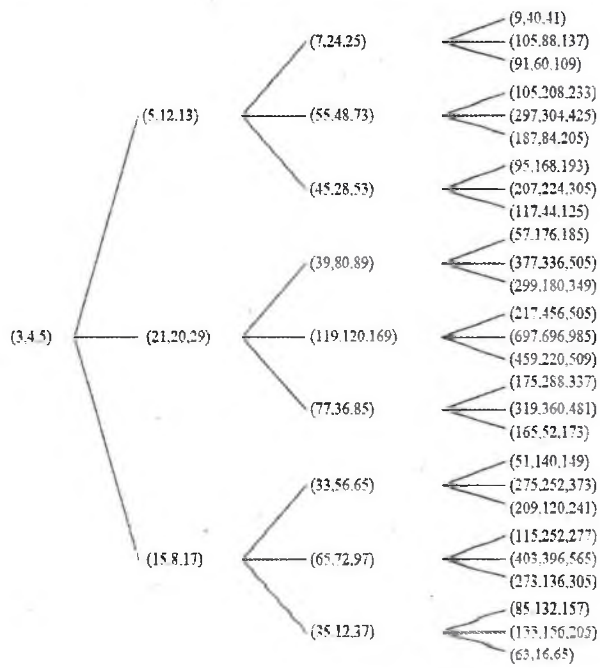
$$C\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} -1\cdot 3+2\cdot 4+2\cdot 5 \\ -2\cdot 3+1\cdot 4+2\cdot 5 \\ -2\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 8 \\ 17 \end{bmatrix}.$$

Аналогично, умножая матрицы A, B и C на векторы-столбцы из полученных пифагоровых троек, придём к новым простейшим пифагоровым тройкам.

Замечание. Предыдущие равенства могут быть записаны в обычной, нематричной форме, но это менее удобно.

Множество пифагоровых троек можно изобразить наглядно в виде дерева с корневой тройкой (3, 4, 5). Такое дерево построено норвежским математиком Берггреном (приведено по источнику [10]). На приводимом рисунке показано, что каждая пифагорова тройка порождает три новые пифагоровые тройки.

Хорошо заметны и такие закономерности (сформулируем их в геометрической форме): матрица A сохраняет отношение «гипотенуза на 1 больше большего катета» (см. тройки (3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25), (9, 40, 41), ...); матрица B сохраняет отношение «один из катетов на 1 больше



другого катета» (см. тройки (3, 4, 5), (21, 20, 29), (119, 120, 169), (697, 696, 985), ...); матрица C сохраняет отношение «гипотенуза на 2 больше одного из катетов» (см. тройки (3, 4, 5), (15, 8, 17), (35, 12, 37), (63, 16, 65), ...).

Задание. Продолжите построение приведённого дерева.

С помощью матриц A, B и C нетрудно доказать в общем виде, что каждая пифагорова тройка переводится в пифагорову тройку. Сделаем это для матрицы A.

Доказательство. Пусть тройка (x, y, z) является пифагоровой, тогда

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-2y+2z \\ 2x-y+2z \\ 2x-2y+3z \end{bmatrix}.$$

Докажем, что если $x^2 + y^2 = z^2$, то $(x - 2y + 2z)^2 + (2x - y + 2z)^2 = (2x - 2y + 3z)^2$.

Преобразуем левую и правую части доказываемого равенства:

Л. Ч. $= (x^2 - 4xy + 4y^2 + 4xz - 8yz + 4z^2) + (4x^2 - 4xy + y^2 + 8xz - 4yz + 4z^2) = 5(x^2 + y^2) - 8xy + 12xz - 12yz + 8z^2 = 13z^2 - 8xy + 12xz - 12yz$.

П. Ч. $= 4x^2 - 8xy + 4y^2 + 12xz - 12yz + 9z^2 = 13z^2 - 8xy + 12xz - 12yz$.

Получили, что Л. Ч. = П. Ч., поэтому тройка $(x - 2y + 2z, 2x - y + 2z, 2x - 2y + 3z)$ является пифагоровой.

Свойство матрицы A. Матрица A сохраняет отношение «гипотенуза на 1 больше большего катета».

Доказательство. Пусть для пифагоровой тройки (x, y, z) выполняется равенство $z = y + 1$. Проверим выполнимость аналогичного равенства для тройки $(x - 2y + 2z, 2x - y + 2z, 2x - 2y + 3z)$. Имеем:

$$(2x - y + 2z) + 1 = 2x - y + 2(y + 1) + 1 = 2x + y + 3;$$

$$2x - y + 3z = 2x - 2y + 3(y + 1) = 2x + y + 3.$$

Требуемое доказано.

Задачи 1—3, 5—12 предлагается решить самостоятельно.

Задача 1. Докажите, что матрица B: а) любую пифагорову тройку (x, y, z) переводит в пифагорову тройку $(x + 2y + 2z, 2x + y + 2z, 2x + 2y + 3z)$; б) сохраняет отношение «один из катетов на 1 больше другого катета», т. е. если $|x - y| = 1$, то $|x + 2y + 2z - (2x + y + 2z)| = 1$.

Задача 2. Докажите, что матрица C: а) любую пифагорову тройку (x, y, z) переводит в пифагорову тройку $(-x + 2y + 2z, -2x + y + 2z, -2x + 2y + 3z)$; б) сохраняет отношение «гипотенуза на 2 больше одного из катетов», т. е. если $|z - x| = 2$, то $|-2x + 2y + 3z - (-x + 2y + 2z)| = 2$.

Задача 3. Индуктивным путём найдите формулы для пифагоровых троек, у которых гипотенуза на 1 больше большего катета.

Р е ш е н и е. Путём перебора целочисленных значений двух сторон прямоугольного треугольника можно найти целые значения третьей стороны, такие как (3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25), (9, 40, 41) и т. д. Индуктивным путём находим закономерности в общем случае для x_n, y_n, z_n (см. таблицу 2).

Таблица 2. **Индуктивный вывод формул для пифагоровых троек, у которых гипотенуза на 1 больше большего катета [6]**

n	x	y	z
1	$x_1 = 3$,	$y_1 = 4$,	$z_1 = 5$,
2	$x_2 = x_1 + 2 = 5$,	$y_2 = y_1 + 8 = 12$,	$z_2 = z_1 + 8 = 13$,
3	$x_3 = x_1 + 4 = 7$,	$y_3 = y_1 + 20 = 24$,	$z_3 = z_1 + 20 = 25$,
4	$x_4 = x_1 + 6 = 9$,	$y_4 = y_1 + 36 = 40$,	$z_4 = z_1 + 36 = 41$,
....	....	....	....
n	$x_n = 3 + 2(n - 1)$	$y_n = 4 + 2(n + 2)(n - 1)$	$z_n = 5 + 2(n + 2)(n - 1)$

Особенность полученных формул для x_n, y_n и z_n состоит в том, что в них непосредственно указана связь их с египетским треугольником. С помощью этих формул можно из простейшей тройки (3, 4, 5) получить прямоугольные треугольники с целочисленными значениями сторон, у которых гипотенуза отличается от большого катета на 1.

Задача 4. а) Непосредственной проверкой убедитесь в выполнимости равенства $x_n^2+y_n^2=z_n^2$, где x_n, y_n и z_n взяты из таблицы 2; б) найдите по этим формулам стороны пифагорова треугольника для $n = 10$.

Р е ш е н и е. б) $x_{10} = 3 + 2 \cdot 9 = 21$, $y_{10} = 4 + 2 \cdot 12 \cdot 9 = 220$, $z_{10} = 5 + 2 \cdot 12 \cdot 9 = 221$. Итак, получили тройку (21, 220, 221). Эта тройка в самом деле является пифагоровой, так как $220^2 + 21^2 = 48\,400 + 441 = 48\,841 = 221^2$. Кроме того, гипотенуза на 1 больше большего катета.

Замечание. В литературе обычно приводятся такие выражения для x_n, y_n и z_n: $x_n = 2n + 1$, $y_n = 2n(n + 1)$, $z_n = 2n(n + 1) + 1$, в которых значения x_n и z_n нечётные, а y_n — чётные.

Составление пифагоровых троек из чисел Фибоначчи

Числа Фибоначчи — это натуральные числа в последовательности 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, ..., в которой $F_1 = F_2 = 1$, а при $n > 2$ каждый последующий член равен сумме двух предыдущих, т. е. $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. (Подробнее о числах Фибоначчи см. в [1].)

Убедимся, что натуральные числа x, y и z, где $x = F_n \cdot F_{n+3}$, $y = 2F_{n+1} \cdot F_{n+2}$, $z = F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2$ (***) образуют пифагорову тройку: так как если $F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$ и $F_{n+3} = F_{n+2} + F_{n+1}$, то

$$x^2 + y^2 =$$

$$=(F_{n+2}^2 - F_{n+1}^2)^2 + 4F_{n+1}^2 \cdot F_{n+2}^2 = (F_{n+2}^2)^2 + (F_{n+1}^2)^2 +$$

$$+2F_{n+1}^2 \cdot F_{n+2}^2 = (F_{n+2}^2 + F_{n+1}^2)^2 = z^2.$$

Таблица 3. **Примеры пифагоровых троек, находимых с помощью чисел Фибоначчи**

n	x	y	z
1	$1 \cdot 3 = 3$	$2 \cdot 1 \cdot 2 = 4$	12 + 22 = 5
2	$1 \cdot 5 = 5$	$2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$	22 + 32 = 13
3	$2 \cdot 8 = 16$	$2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$	32 + 52 = 34
4	$3 \cdot 13 = 39$	$2 \cdot 5 \cdot 8 = 80$	52 + 82 = 89
5	$5 \cdot 21 = 105$	$2 \cdot 8 \cdot 13 = 208$	82 + 132 = 233
6	$8 \cdot 34 = 272$	$2 \cdot 13 \cdot 21 = 546$	132 + 212 = 610

Пифагоровы тройки, получаемые с помощью чисел Фибоначчи, не все являются простейшими (см. тройку для $n = 3$). Кроме того, не каждая пифагорова тройка может быть получена таким способом. Решая систему:

$$\begin{cases} F_n F_{n+3} = 7, \\ 2F_{n+1}F_{n+2} = 24, \\ F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 = 25 \end{cases} \quad \begin{cases} F_{n+1}^2 - F_{n+2}^2 = 7, \\ 2F_{n+1}F_{n+2} = 24, \ldots, \\ F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 = 25 \end{cases}$$

получим, что $F_{n+1} = 4$, но такого числа Фибоначчи не существует. Поэтому пифагорову тройку (7, 24, 25) с помощью формул (***) получить нельзя.

Задание. Найдите пифагоровы тройки с помощью чисел Фибоначчи для $n = 7, 10$.

Примеры задач, разрешимых в натуральных числах

Задача 5. Докажите, что полупериметр и площадь пифагоровых треугольников выражаются соответственно натуральными числами $m(m + n)$, $mn(m^2 - n^2)$, где m и n берутся из равенств (**).

Задача 6. Докажите, что в следующих пифагоровых треугольниках высоты, проведенные к гипотенузам, выражаются натуральными числами: а) (15, 20, 25); б) (65, 156, 169). Найдите эти высоты.

Задача 7. Возьмите некоторые простейшие пифагоровы тройки и убедитесь в том, что высоты, проведённые к гипотенузам, не выражаются натуральными числами: а) (3, 4, 5); б) (5, 12, 13).

Задача 8. а) Докажите, что если тройка (x, y, z) является пифагоровой, то тройка (xz, yz, z^2) является пифагоровой, причём высота, проведённая к гипотенузе, равна натуральному числу xy; б) Две окружности касаются друг друга внешне и прямой в точках A и B. Сумма радиусов равна 25, а разность — 7. Не вычисляя радиусы, найдите расстояние AB; в) В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CD к гипотенузе AB. Найдите стороны треугольника (разрешается пользоваться только пифагоровыми тройками), полупериметр, высоту CD, площадь, радиусы описанной и вписанной окружностей, если $BC = 30$, $AD = 32$.

Задача 9. Докажите, что если треугольник пифагоров, то радиусы вписанной и трёх вневписанных окружностей выражаются натуральными числами, равными соответственно $n(m - n)$, $m(m - n)$, $n(m + n)$, $m(m + n)$, где m и n берутся из равенств (**).

Задача 10. Докажите, что если треугольник пифагоров, то радиусы трёх окружностей с центрами в вершинах треугольника, попарно касающихся друг друга, выражаются натуральными числами, равными соответственно $n(m + n)$, $m(m - n)$, $n(m - n)$, где m и n берутся из равенств (**).

Обобщения пифагоровых троек

1. *Треугольники Герона. Треугольник Герона* определяется как треугольник, у которого стороны и площадь выражаются натуральными числами, причём полагают, что стороны треугольника различны. Длины сторон такого треугольника образуют *тройку Герона* (a, b, c), где $a < b < c$. Ясно, что пифагоровы тройки являются тройками Герона, поскольку в пифагоровой тройке по меньшей мере один из катетов a и b является чётным числом, так что площадь треугольника $\frac{ab}{2}$ будет натуральным числом.

Не всякая тройка Герона является пифагоровой. Примеры троек Герона, не являющихся пифагоровыми тройками: (4, 13, 15) с площадью 24; (3, 25, 26) с площадью 36; (7, 15, 20) с площадью 42; (6, 25, 29) с площадью 60; (11, 13, 20) с площадью 66; (13, 14, 15) с площадью 84; (13, 20, 21) с площадью 126.

Приведём несколько задач на использование троек Герона.

Задача 11. а) Стороны треугольника равны 4, 13 и 15. Является ли он героновым треугольником? б) Две стороны треугольника и его площадь соответственно равны 3, 25 и 36. Является ли треугольник героновым? в) Даны треугольники (13, 14, 15) и (39, 42, 45). Является ли они героновыми? Сравните стороны и площади этих треугольников.

2. *Пифагоровы четвёрки.* Множество, состоящее из четырёх натуральных чисел x, y, z и d, таких, что $x^2 + y^2 + z^2 = d^2$, называется *пифагоровой четвёркой*. Геометрически числа x, y, z означают измерения прямоугольного параллелепипеда, число d — диагональ. Пифагоровы четвёрки задаются формулами

$$x = m^2 + n^2 - p^2 - q^2,\ y = 2mq + 2np,$$
$$z = 2nq - 2mp,\ d = m^2 + n^2 + p^2 + q^2,$$

так как равенство $(m^2 + n^2 - p^2 - q^2)^2 + (2mq + 2np)^2 + (2nq - 2mp)^2 = (m^2 + n^2 + p^2 + q^2)^2$ выполняется (проверьте!).

Задача 12. 1. Докажите, что следующие четвёрки являются пифагоровыми: а) (3, 4, 12, 13); б) (5, 12, 84, 85); в) (7, 24, 312, 313). 2. Самостоятельно составьте пифагоровы четвёрки: а) (1, 2, ?, 3), б) (2, ?, 6, 7).

3. *Несостоявшееся обобщение.* Одним из желанных обобщений пифагоровых троек в истории математики послужил поиск троек натуральных чисел x, y и z, таких, что $x^n + y^n = z^n$ для $n > 2$. Однако в 1637 г. Пьер Ферма высказал утверждение, что таких троек не существует. Это утверждение долгое время пытались доказать или опровергнуть многие великие математики. За правильное её решение была обещана огромная сумма: 100 000 немецких марок. Эйлер в 1797 г. доказал теорему Ферма для третьей и четвёртой степеней, Лежандр в 1823 г. — для пятой степени, Ламе и Лебег в 1840 г. — для седьмой степени, Кумер в

1849 г. — для $2 < n < 100$. Первое доказательство отсутствия таких троек для всех $n > 2$ было дано только через 357 лет в 1994 г. Уайлсом. Эти доказательства носили далеко не элементарной характер и стимулировали развитие математических методов, применяемых в теории чисел. Затраченные усилия многих выдающихся математиков свидетельствуют о том, что неслучайно утверждение, высказанное П. Ферма, стало почтительно называться «Великая теорема Ферма», или «Большая теорема Ферма».

Современные исследования пифагоровых троек

К числу таких исследований относится, например, задача Буля о пифагоровых тройках [11]: «Можно ли разделить множество всех натуральных чисел на две части таким образом, чтобы каждая часть не имела ни одной пифагоровой тройки?». В терминах раскраски эта проблема формулируется так: «Можно ли раскрасить все натуральные числа в два цвета так, чтобы ни одна пифагорова тройка не была монохромной?». В 2015 г. Джошуа Купер и Ральф Оверстрит раскрасили двумя цветами числа {1, ..., 7664}. В мае 2016 г. Марин Гейле, Оливер Кульман и Виктор Марек подтвердили эту возможность для чисел {1, ..., 7824}, а уже для чисел {1, ..., 7825} установили невозможность указанной раскраски. Задача была решена перебором с помощью 800 ядерного суперкомпьютера Stampede в компьютерном центре Техасского университета в течении двух дней. На поставленный вопрос, как видно, компьютер дал отрицательный ответ. Данный результат был представлен в виде статьи на конференции SAT 2016 в Бордо (Франция), которая была признана лучшей из числа представленных. Однако остаётся до конца неясным, как математики относятся к подобным доказательствам, признают ли они такие доказательства безоговорочно.

Методические рекомендации к проведению занятий

Приведём примерное планирование (таблица 4) и некоторые методические рекомендации об использовании математических сведений, привлекаемых при рассмотрении пифагоровых троек (комплексных чисел и матриц).

Таблица 4. **Планирование факультативных занятий по теме «Задачи, разрешимые в натуральных числах» в X классе**

Занятие 1	Понятие задачи, разрешимой в натуральных числах. Пифагоровы треугольники и пифагоровы тройки чисел. Исторические сведения о пифагоровых тройках чисел. Понятие простейших пифагоровых троек. Примеры и контрпримеры. Таблица 1 простейших пифагоровых троек для $z \le 300$. Свойства 1–2 пифагоровых троек
Занятие 2	Теоремы 1 и 2
Занятие 3	Краткие сведения о комплексных числах. Вывод формул (**) при помощи комплексных чисел
Занятие 4	Краткие сведения о матрицах. Дерево простейших пифагоровых троек
Занятие 5	Индуктивный вывод формул для пифагоровых троек, у которых гипотенуза на 1 больше большего катета
Занятие 6	Понятие о числах Фибоначчи. Составление пифагоровых троек из чисел Фибоначчи
Занятие 7	Примеры задач, разрешимых в натуральных числах (задачи 5–10)

Об использовании комплексных чисел и матриц в данной теме

Вполне достаточно ограничиться краткими сведениями о комплексных числах и матрицах, не отвлекая внимание учащихся от основной темы. При этом могут быть использованы многочисленные учебные и справочные пособия. Краткое изложение теории комплексных чисел можно найти, например, в источнике [8], а также в школьных учебниках прошлых лет. Правила выполнения действий над комплексными числами можно сообщить без доказательств, иллюстрируя их отдельными примерами.

Ещё более кратко рекомендуется сообщить сведения о матрицах и действиях над ними: матрица — это таблица, составленная из чисел; действия можно выполнять не только над отдельными числами, но и над таблицами чисел (уже эта минимальная информация имеет значительный познавательный характер). В статье показывается, как умножается матрица, состоящая из трёх строк и трёх столбцов на матрицу, состоящую из одного столбца (вектор-столбца), получается при этом в результате новый вектор-столбец: сумма произведений элементов первой (второй, третьей) строки первой матрицы на первый (второй, третий) элемент второй матрицы служит первым (вторым, третьим) элементом матрицы-столбца, являющегося произведением данных матриц.

Список использованных источников

1. *Воробьев, В. В.* Числа Фибоначчи / В. В. Воробьев. — М. : Наука, 1984. — 144 с.

2. *Игнатьев, Е. И.* Хрестоматия по математике: в царстве смекалки / Е. И. Игнатьев. — Ростов-на-Дону: Кн. изд-во, 1995. — 616 с.

3. *Курант, Р.* Что такое математика? / Р. Курант, Г. Роббинс; пер. с англ. — М. : Просвещение, 1967. — 559 с.

4. *Перельман, Я. И.* Занимательная алгебра / Я. И. Перельман. — Домодедово : ВАП, 1994. — 200 с.

5. *Радемахер, Г.* Числа и фигуры. Опыты математического мышления / Г. Радемахер, О. Теплиц; пер. с нем. — 3-е изд. — М. : Государственное изд-во физико-математической литературы, 1962. — 263 с.

6. *Рогановский, Н. М.* Геометрия. 7 класс. Многообразие идей и методов : пособие для учащихся общеобразоват. учреждений с белорус. и рус. яз. обучения / Н. М. Рогановский, Е. Н. Рогановская, О. И. Тавгень. — Минск : Аверсэв, 2011. — 239 с.

7. *Рогановский, Н. М.* Ортогональная проекция угла / Н. М. Рогановский, Е. Н. Рогановская // Матэматыка. — 2016. — № 6. — С. 55—64.

8. *Рогановский, Н. М.* Элементарная математика : в 4 кн. Книга I: Числа / Н. М. Рогановский, Е. Н. Рогановская. — Минск : Дизайн ПРО, 2000. — 208 с.

9. *Серпинский, В.* Пифагоровы треугольники / В. Серпинский. — М. : Учпедгиз, 1959. —111 с.

10. https://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=Пифагорова_тройка&oldid=75724814.

11. Википедия ru–wiki.ru>wiki/Задача Буля о пифагоровых тройках.