*Н. М. **Рогановский**, член-корреспондент Академии образования Республики Беларусь, доктор педагогических наук, профессор кафедры методики преподавания математики Могилёвского государственного университета имени А. А. Кулешова;*
*Е. Н. **Рогановская**, кандидат педагогических наук, доцент кафедры методики преподавания математики Могилёвского государственного университета имени А. А. Кулешова*

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ И ВЕРОЯТНОСТЕЙ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ: НОВЫЙ ЭТАП

1. Научно-методические особенности комбинаторики как учебной темы

Современное поколение учителей не получало по данной теме необходимую методическую подготовку. Поэтому цель настоящей статьи состоит в том, чтобы оказать учителю актуальную методическую помощь в его самообразовании. Часть предлагаемого учебного материала может быть использована в основном курсе, большая часть — на факультативных занятиях или при организации учебно-исследовательской деятельности учащихся.

Простейшие сведения по комбинаторике были известны ещё древнегреческим математикам. Первоначальной основой возникновения и развития сведений по комбинаторике и вероятности послужили азартные игры [13]. В настоящее время комбинаторика — раздел дискретной математики, включающий в себя комбинаторную геометрию, комбинаторный анализ, комбинаторную теорию групп и др. [2; 13; 20]. Она широко применяется в теории вероятностей, теории управляющих систем, математической статистике, информатике, генной инженерии, при решении экономических и технических вопросов [16; 19; 20; 22]. Исключительная и возрастающая роль комбинаторики в математике, различных приложениях и, что особенно важно в педагогическом отношении, в развитии мышления, служила стимулом неоднократных попыток включения её в школьный курс [1; 3; 4; 8; 10]. Комбинаторная тематика постоянно оставалась популярной для факультативных занятий, внеклассной работы, подготовки олимпиадников [5–7; 9; 11; 12; 21; 23; 24]. Перегруженность школьного курса, слабая связь комбинаторики с его традиционным содержанием, отнесение приоритетов к другим новым темам служили причиной исключения этой темы. Тем не менее, перспективность комбинаторики для школьного курса никогда не подвергалась сомнению. Надеемся, что применение комбинаторики при решении простейших задач теории вероятностей повысит устойчивость данной темы. На изучение комбинаторики ранее отводилось сравнительно небольшое количество времени — обычно 10–12 ч. На школьном уровне самым распространённым видом комбинаторных задач являются задачи на подсчёт числа различных соединений. Некоторое внимание уделяется тождественным преобразованиям комбинаторных выражений, простейшим комбинаторным уравнениям и неравенствам [3; 4; 6; 8; 10–12; 14; 17; 18; 21–24].

2. Методическая схема изучения комбинаторики

Комбинаторика формирует своеобразный тип мышления — комбинаторное мышление. Своеобразие требует определённой пропедевтики, внимания к развитию интуиции [21]. Это возможно, учитывая, что простейшие комбинаторные задачи, решаемые с помощью всего двух комбинаторных правил — сложения и умножения, — доступны уже дошкольникам [14].

С учётом сказанного, **общая методическая схема изучения комбинаторики** может быть следующей:

1) рассмотрение пропедевтических комбинаторных задач, решаемых с помощью правил сложения и умножения на первой и второй ступенях обучения;

2) крупноблочное введение основных видов простейших комбинаторных соединений на третьей ступени обучения, ознакомление с алгоритмом их распознавания;

3) индуктивное обоснование формул числа соединений без повторения и с повторением элементов, решение задач на непосредственное их применение;

4) решение более сложных задач с организацией процесса поиска решения, проверкой правильности решения путём обращения к аналогичной задаче с небольшими числовыми данными, допускающей непосредственное составление и подсчёт числа соединений;

5) введение формулы бинома Ньютона;

6) классическое определение вероятности и применение комбинаторики к нахождению вероятности событий.

В целом данная методическая схема уже использовалась ранее в предшествующей школьной практике и оправдала себя. В настоящее время она характеризуется: а) стремлением к раннему ознакомлению с элементами комбинаторики начиная с начальных классов; б) более «продвинутым» увязыванием комбинаторики с её существенным применением — на примере решения задач на нахождение вероятности событий; в) возможностью избежать перегрузки школьного курса за счёт распределения комбинаторных задач различной трудности между основным курсом и факультативными занятиями.

3. Основные определения

1. Простейшими **комбинаторными** называют задачи на определение числа конечных подмножеств, обладающих определёнными свойствами, которые можно образовать из элементов данного конечного множества.

Такие подмножества называются **соединениями**. Соединения бывают **без повторения** и **с повторением** элементов. Основные виды соединений: *размещения, перестановки* и *сочетания*. Решение простейших комбинаторных задач сводится к определению вида соединений и подсчёту их числа, к упрощению комбинаторных выражений, решению комбинаторных уравнений и неравенств.

2. Пусть A — конечное множество, состоящее из элементов $a_1, a_2, ..., a_n$. Из элементов множества A можно образовывать различные подмножества. Если в каждое подмножество входит одно и то же число элементов m ($m \leq n$), то такие подмножества называются **соединениями из n элементов по m в каждом.**

В зависимости от того, входят ли в соединение элементы без повторений или с повторениями, входят все элементы множества A или только часть их, учитывается ли порядок элементов или не учитывается, рассматривают три вида соединений (без повторений и с повторениями): размещения, перестановки и сочетания.

3. Соединения из n элементов по m, отличающиеся друг от друга или составом элементов, или их порядком, называются **размещениями из n элементов по m.** Число таких размещений без повторения элементов обозначают символом A_n^m, с повторениями — символом $\overline{A_n^m}$.

4. Соединения, в каждое из которых входят все n элементов множества A и которые отличаются только порядком, называются **перестановками из n элементов.** Число таких перестановок без повторения обозначают символом P_n, с повторениями — символом $\overline{P_n}$. Перестановки являются частным случаем размещений.

5. Соединения из n элементов по m, отличающиеся друг от друга по меньшей мере одним элементом (порядок элементов в соединении не учитывается), называются **сочетаниями из n элементов по m.** Число сочетаний без повторения обозначают символом C_n^m, с повторениями — символом $\overline{C_n^m}$.

4. Алгоритм распознавания соединений

При решении комбинаторных задач сначала надо определить вид соединения. При этом можно руководствоваться следующим алгоритмом распознавания (рис. 1), который подсказывает, что прежде всего необходимо выяснить: допускается ли повторение элементов в соединениях, учитывается ли порядок элементов, содержат ли соединения все элементы исходного множества или только часть этих элементов:

Рисунок 1

Задание 1. Определите вид соединений в следующих задачах:

Задача 1. Пусть требуется найти число четырёхзначных чисел, записанных с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, причём эти цифры: а) не повторяются; б) повторяются.

Решение. а) Каждое такое четырёхзначное число представляет собой соединение из девяти элементов по четыре. Существенную роль играет порядок элементов: четырёхзначные числа, записанные с помощью одних и тех же цифр, взятых в различном порядке, — различные числа. Поэтому имеем дело с размещениями из девяти элементов по четыре, в каждом из которых цифры не повторяются. Число их равно A_9^4.

б) В этом случае соединения отличаются от предыдущих только тем, что допускают повторение цифр в записи числа (например, возможны такие четырёхзначные числа: 1111, 1112, 2324 и т. д.). Число их равно $\overline{A_9^4}$. В число размещений с повторениями входят все размещения без повторений: $\overline{A_9^4} > A_9^4$.

Задача 2. Пусть теперь требуется найти число девятизначных чисел, записанных с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, которые в записи числа: а) не повторяются; б) повторяются.

Решение. а) Порядок элементов, как и в предыдущем примере, имеет значение. Имеем дело с размещениями из девяти элементов по девять, т. е. с перестановками из девяти элементов (без повторения элементов). Число таких перестановок P_9.

б) При рассмотрении перестановок с заданным числом повторений прежде всего надо указать, какие элементы повторяются и сколько раз. Пусть элемент 1 повторяется 2 раза, а остальные элементы идут без повторений (повторяются по 1 разу). Примеры таких перестановок: (1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), (1, 1, 3, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9) и т. д. Как видно, перестановки получаются из 10 элементов. Число таких перестановок $\overline{P}(2, 1,1,1,1,1,1,1,1)$.

Заметим, что нельзя утверждать, что перестановки без повторений составляют часть перестановок с повторениями — это разные перестановки, состоящие из различного числа элементов.

Задача 3. Пусть даны числа 11, 12, 13 и 14. Требуется узнать, сколько можно составить произведений из трёх данных чисел, причём: а) сомножители различны (не повторяются); б) сомножители могут повторяться.

Решение. а) Имеем дело с соединениями из четырёх элементов по три. Порядок элементов роли не играет, так как перестановка сомножителей не приводит к новому произведению. Каждое произведение состоит из трёх различных чисел. Поэтому эти соединения являются сочетаниями без повторений из четырёх элементов по три. Число их равно C_4^3.

б) В этом случае приходим к сочетаниям с повторениями. Число их $\overline{C_4^3}$. В это число входят все сочетания C_4^3 без повторений. Ниже покажем, что $\overline{C_4^3} > C_4^3$.

Задание 2. В приводимых ниже задачах вид соединений определил ученик. Проверьте, правильно ли он сделал.

Задача	Допускается ли повторение элементов в соединении?	Учитывается ли порядок?	Все ли элементы входят в соединение?	Вид соединений
Задача 4. Туристический маршрут должен пройти через 9 городов. Укажите число всех возможных таких маршрутов.	Не допускается	Учитывается	Все	P_9
Задача 5. Сколько существует вариантов зачёркивания 6 клеток в карточке «Спортлото», состоящей из 49 клеток?	Не допускается	Не учитывается	Не все	C_{49}^6
Задача 6. В пространстве находятся n точек, при этом никакие три точки не лежат на одной прямой. Сколько существует различных треугольников с вершинами в данных точках?	Не допускается	Не учитывается	Не все	C_n^3
Задача 7. Сколько трёхзначных чисел можно составить из нечётных цифр, если каждую цифру в записи числа можно использовать только один раз?	Не допускается	Учитывается	Не все	A_5^3
Задача 8. Дано множество цифр {1, 2, 3, 4}. Требуется составить размещения из $n = 4$ по $m = 3$ с повторением элементов.	Допускается	Учитывается	Не все	$\overline{A_4^3}$

5. Примеры непосредственной записи соединений и подсчёта их числа

Задача 9. Пусть дано трёхэлементное множество {1, 2, 3}. Требуется записать: а) размещения из этих трёх элементов по два (без повторений элементов и с повторениями); б) перестановки из трёх элементов без их повторения; в) перестановки элементов 1, 2, 3 с двукратным повторением элемента 1 и без повторений элементов 2 и 3 (с однократным их повторением); г) сочетаний из этих трёх элементов по два (без повторений элементов и с повторениями).

Решение.

	Соединения без повторений	**Соединения с повторениями**
Размещения	(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 1), (3, 1), (3, 2). Всего получилось 6 размещений: $A_3^2 = 6$.	(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 1), (3, 1), (3, 2), (1, 1), (2, 2), (3, 3). Всего получилось 9 размещений с повторениями: $\overline{A_3^2} = 9$.
Перестановки	(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1). Получилось 6 перестановок: $P_3 = 6$.	По условию цифра 1 в каждом соединении встречается 2 раза, а цифры 2 и 3 по 1 разу. Перестановки получаются из 4 элементов. Пример одной такой перестановки: (1, 1, 2, 3). Запишем все такие перестановки. Начиная с цифры 1, можно записать 6 перестановок: (1, 1, 2, 3), (1, 1, 3, 2), (1, 2, 1, 3), (1, 2, 3, 1), (1, 3, 1, 2), (1, 3, 2, 1). Начиная с цифры 2 можно записать всего 3 перестановки: (2, 1, 1, 3), (2, 3, 1, 1), (2, 1, 3, 1). Точно так же можно записать 3 перестановки, начиная с цифры 3. Всего получилось 12 перестановок из трёх элементов с двукратным повторением элемента 1: $\overline{P}(2, 1, 1) = 12$.
Сочетания	{1, 2}, {1, 3}, {2, 3}. Получилось 3 сочетания: $C_3^2 = 3$.	{1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 1}, {2, 2}, {3,3}. Получаем 6 сочетаний: $\overline{C_3^2} = 6$.

6. Комбинаторные правила умножения и сложения

Простейшие комбинаторные задачи обычно решаются с помощью двух правил: умножения и сложения. Особенно большие применения имеет правило умножения.

Правило умножения. Число вариантов выбора упорядоченных наборов из n элементов $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, каждый из которых содержит m элементов, равно произведению числа вариантов выбора каждого из этих элементов. Число вариантов выбора последующего элемента может зависеть от числа выбора предыдущего элемента или оставаться без изменения.

Задача 10. Сколько трёхзначных чисел можно составить из нечётных цифр, если каждую цифру в записи числа можно использовать только один раз?

Решение. Выше был установлен вид соединения — это размещения из 5 элементов по 3: A_5^3 (5 — число всех нечётных цифр, 3 — число

Правило сложения. Пусть даны несколько конечных непересекающихся множеств, число элементов которых соответственно равно $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$, и производится выбор одного какого-либо элемента. Общее число вариантов выбора одного элементца в таком случае равно сумме числа элементов данных множеств: $k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_n$.

Задача 11. В чашке на столе лежит 5 яблок и 6 груш. Сколько возможно вариантов выбора одного фрукта: или яблока, или груши?

Решение. Существует 5 вариантов выбора яблока и 6 вариантов выбора груши. Общее число вариантов выбора одного фрукта равно $5 + 6 = 11$.

цифр в каждом соединении). Для выбора первой цифры имеются 5 вариантов, для выбора второй — 4 варианта (выбор совершается из оставшихся четырёх нечётных цифр), третьей цифры — 3 варианта. Общее число вариантов образования трёхзначных чисел из нечётных цифр равно произведению $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

7. Формулы числа размещений, перестановок и сочетаний

Соединения без повторений	Соединения с повторениями
1. $A_n^m = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)$.	4. $\overline{A_n^m} = \underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{m \text{ множителей}} = n^m$.
2. $P_n = n!$	5. $\overline{P}(k_1, k_2, \ldots, k_p) = \dfrac{(k_1+k_2+\ldots+k_p)!}{k_1!k_2! \ldots k_p!}$.
3. $C_n^m = \dfrac{A_n^m}{P_m} = \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m!}$.	6. $\overline{C_n^m} = C_{n+m-1}^m = \dfrac{(n+m-1)!}{(n-1)!m!}$

Доказательства.

1. Доказательство с помощью правила умножения. Пусть мы имеем множество, состоящее из n элементов и из этих элементов образуем упорядоченные подмножества, каждое из которых содержит m элементов. Выясним, сколько таких соединений можно образовать. Для выбора первого элемента соединения существует n вариантов (может быть выбран любой из n элементов данного множества). В данном множестве (чтобы не допустить повторения элементов в соединении) осталось $n-1$ элементов, поэтому для выбора второго элемента соединения существует $n-1$ вариантов. После этого в данном множестве осталось $n-2$ элементов, поэтому для выбора третьего элемента соединения существует $n-2$ вариантов и т. д. Выбор m-го элемента соединения совершается из $n - m + 1$ оставшихся элементов данного множества, поэтому число вариантов его выбора равно $n - m + 1$. Общее число вариантов выбора соединений из n элементов по m находим по правилу умножения: $A_n^m = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)$. Это доказательство может быть проведено методом математической индукции.	**4. Доказательство также может быть проведено с помощью правила умножения.** Пусть мы имеем множество, состоящее из n элементов и из этих элементов образуем упорядоченные подмножества, каждое из которых содержит m элементов. Выясним, сколько таких соединений с повторениями можно образовать. Для выбора первого элемента соединения существует n вариантов (может быть выбран любой из n элементов данного множества). В случае первой формулы мы говорили, что в данном множестве осталось $n-1$ элементов. Сейчас этого сказать нельзя: при повторении элементов каждый раз мы снова имеем дело с n элементами. Поэтому для выбора второго, третьего, m-го элемента соединения каждый раз существует n вариантов. Поэтому $\overline{A_n^m} = \underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{m \text{ множителей}} = n^m$.

2. Имеем: $P_n = A_n^n = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 1 = n!$	**5.** Пусть даны перестановки из элементов, в каждую из которых входит k элементов a, k_2 элементов b, k_3 элементов c и т. д., всего элементов в перестановке (с учётом повторений) равно $k_1 + k_2 + k_3 + \ldots = n$; найдём число всех *перестановок из n элементов с указанными повторениями элементов a, b, c* и т. д. Если бы все n элементов были различными, то число перестановок равнялось бы $n!$ Учтём, что, меняя местами одинаковые элементы друг с другом, мы не получим новую перестановку; значит, число $n!$ уменьшится за счёт k_1 повторений элемента a в $k_1!$ раз, за счёт k_2 повторений элемента b в $k_2!$ раз и т. д. В итоге приходим к формуле: $\overline{P}(k_1, k_2, \ldots k_n) = \dfrac{(k_1+k_2+\ldots+k_n)!}{k_1!k_2!\ldots k_n!}$
3. Пусть образованы все сочетания из n элементов по m, если в каждом из этих сочетаний произвести все возможные перестановки элементов, то, очевидно, получим все размещения из n элементов по m. Поэтому $A_n^m = C_n^m P_m$. Тогда $C_n^m = \dfrac{A_n^m}{P_m} = \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m!}$	**6.** В сочетание из n элементов по m входит m элементов, причём один и тот же элемент может повторяться в каждом сочетании любое число раз, но не более m. Число таких сочетаний находится по формуле $\overline{C_n^m} = C_{n+m-1}^m = \dfrac{(n+m-1)!}{(n-1)!m!}$ (С доказательством можно ознакомиться по источнику [18].)

Замечание. По определению соединений предполагается, что $1 \le m \le n$. В вычислениях удобно придерживаться следующих **дополнительных определений:** а) $m > n \Rightarrow$ $\Rightarrow A_n^m = C_n^m = 0$; б) $A_n^0 = C_n^0 = 1$.

Задача 12. Проведём вычисления для задачи 1: а) $A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)$. Имеем: $A_9^4 = 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6 = 3\,024$; б) $\overline{A_9^4} = 9^4 = 6\,561$.

Задача 13. Выполним вычисления для задачи 2: а) воспользуемся формулой $P_n = n!$. Имеем: $P_9 = 9! = 362\,880$; б) Имеем: $\overline{P}(2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) = \dfrac{10!}{2!} = 181\,440$.

Задача 14. Выполним вычисления для задачи 3: а) воспользуемся формулой

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m!}.$$

Имеем $C_4^3 = \dfrac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3} = 4$;

б) $\overline{C_4^3} = \dfrac{(4+3-1)!}{1!3!} = 120$.

Приведём ещё некоторые свойства соединений.

Следствия. Для соединений выполнимы следующие равенства: 1. $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$.

2. $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$. 3. $C_n^m = C_n^{n-m}$.

Доказательства следствий. **1.** Преобразуем правую часть равенства в левую:

$$\frac{n!}{(n-m)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-m)(n-(m+1))(n-(m+2))\cdot\ldots\cdot(n-1)n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-m)} =$$

$$= (n-(m+1))(n-(m+2))\cdot\ldots\cdot(n-1)n = A_n^m.$$

2. Применим приём, аналогичный предыдущему (начнём с правой части):

$$\frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-m)(n-(m-1))\cdot\ldots\cdot(n-2)(n-1)n}{(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot m)(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-m))} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m!} = C_n^m.$$

3. Воспользуемся следствием 2:

$$C_n^{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!(n-(n-m))!} = \frac{n!}{(n-m)!m!}.$$

Задача 15. Дано множество цифр {1, 2, 3, 4}, для которого $n = 4$. Требуется составить размещения из $n = 4$ по $m = 3$ с повторением элементов и определить их число.

Решение. В соединениях по 3 элемента каждый элемент может повторяться 3, 2, 1, 0 раз. Непосредственный перебор даёт 64 перемещения:

111	112	121	211	113	131	311	114	141	411	123	132	124	142	134	143
222	221	212	122	322	223	232	224	242	422	213	231	234	243	214	241
333	331	313	133	332	323	233	334	343	433	312	321	314	341	324	342
444	441	414	144	442	424	244	443	434	344	412	421	413	431	423	432.

Такое же количество получаем и по формуле: $\overline{A_4^3} = 4^3 = 64$.

Задача 16. Сколько перестановок с повторениями можно получить из букв слова «папа».

Решение. Количество повторений элементов в соединении задаётся самим данным словом: и первая, и вторая буквы повторяются два раза. Если считать все буквы различными (например, одну писать жирным шрифтом, а другую — обычным), то всего перестановок будет $P_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. В этом случае каждое из соединений «папа», «ппаа» и т. д. даёт 4 перестановки. На самом деле, не учитывая начертание шрифта, в каждой такой четвёрке перестановок все они будут одинаковыми. В итоге различных будет в 4 раза меньше: 24 : 4 = 6. Получаем 6 перестановок: папа, ппаа, паап, аппа, апап, аапп.

Такое же количество получаем и по формуле:

$$\overline{P_n} = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_p!} = \frac{4!}{2!2!} = 6.$$

Задача 17. Сколько можно составить наборов из двух сортов пирожных, чтобы в каждом наборе было 4 пирожных?

Решение. Из двух сортов пирожных ($n = 2$) требуется составить наборы из четырёх пирожных ($k = 4$). Обратим внимание на то, что ограничение указано на количество сортов, а не на количество пирожных. Так как $k > n$, то в наборе некоторые сорта пирожных должны повторяться. В каком порядке пирожные помещены в наборе значения не имеет. Приходим к сочетаниям с повторениями из двух элементов по четыре. Непосредственный подсчёт показывает, что число их равно 5: 1222, 1122, 1112, 1111, 2222. Такое же количество получаем и по формуле:

$$\overline{C_n^k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!} = \frac{(2+4-1)!}{(2-1)!4!} = \frac{5!}{1!4!} = \frac{120}{24} = 5.$$

8. Задания для выполнения творческих заданий по комбинаторике

В некоторых случаях рекомендуется не ограничиться подсчётом числа соединений по формулам, а непосредственно составить эти соединения.

Комбинаторные правила сложения и умножения

1. а) Имеются 2 ручки, 4 карандаша и 1 пенал. Сколькими способами можно выбрать 1 предмет? б) На полке стоит 12 книг одного писателя, 7 книг другого и 5 книг третьего. Сколькими способами можно выбрать 1 книгу? в) На раздаточном столике в столовой стоит 8 стаканов кофе, 10 стаканов чая, 7 стаканов компота и 3 стакана с киселём. Сколько способов выбора одного напитка? г) Дима в магазине перебрал 14 вариантов покупки ручек, карандашей и пеналов. В итоге купил 2 ручки, 1 пенал и несколько карандашей. Сколько Дима купил карандашей?

2. а) Из города A в город B ведут 6 дорог, из города B в город C — 7 дорог. Сколько маршрутов, начинающихся в городе A, проходящих через город B и заканчивающихся в городе C, можно составить? б) Сколько различных полных обедов можно составить, если в меню имеется 3 первых, 4 вторых и 5 третьих блюд? в) Сколько различных трёхзначных чисел можно составить из нечётных чисел? г) Сколько различных трёхзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 5 и 6? д) Сколькими способами из 7 членов месткома можно избрать председателя, заместителя и секретаря? е) Из города A в город B ведут 6 дорог. Несколько дорог ведут из города B в город C. Турист, живя в городе A и желая посетить города B и C, наметил 30 маршрутов. Сколько дорог ведут из города B в C?

Размещения

3. Чему равно: а) A_4^2; б) $A_4^2+A_4^3$;

в) $A_3^1 \cdot A_4^2$; г) $A_4^3-A_4^2$;

д) $A_4^4 : A_4^2$; е) $A_4^1 \cdot A_4^2 \cdot A_4^3 \cdot A_4^4$?

4. а) Докажите, что $A_n^{n-1}=A_n^n=n!$;

б) Найдите n, если: $A_n^4=24$; $A_n^4=120$; $A_n^3=60$;

в) Найдите m, если: $A_5^m=20$; $A_5^m=60$; $A_5^m=120$; $A_{35}^m=1\ 190$.

5. Решите неравенство: а) $A_5^m>20$;

б) $A_5^m<60$; в) $A_5^m>120$;

г) $1\ 000 \le A_{35}^m \le 1190$.

6. а) Сколько можно образовать из четырёх букв множества {К, Л, М, Н} упорядоченных подмножеств (буквы не повторяются): 1) по два элемента в каждом; 2) по три элемента в каждом? б) Сколько различных шестизначных натуральных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, если в записи числа каждая из данных цифр входит один раз? в) Решите предыдущую задачу в предположении, что из тех же цифр составляются не шестизначные, а пятизначные натуральные числа. г) Сколько существует двузначных чисел, в которых цифры единиц и десятков обе нечётные? д) Музыкальные синтезаторы могут иметь 49, 61, 76, 88 клавиш. Сколько различных музыкальных фраз можно составить в каждом из них из 7 нот, если исключить повторения уже встречавшихся звуков? е) Сколько различных шестизначных телефонных номеров, в которых ни одна из цифр не повторяется?

Перестановки

7. а) Найдите P_n, если n равно: 1) 4; 2) 6; 3) 7; б) найдите n, если P_n равно: 1) 24; 2) 120; 3) 720; в) Сколько перестановок можно составить из элементов множества M, если: 1) M = {А, Б, В, Г}; 2) M = {3; 4; 5; 6; 7}? г) Сколькими способами можно: 1) составить список из 7 учащихся? 2) рассадить 6 гостей по 6 стульям за столом? 3) распределить 15 проводников по 15 вагонам пассажирского поезда? д) Сколько соединений получится путём перестановки букв в слове «лиса»? Какие из этих «слов» имеют определённое смысловое значение?

8. а) Сколько различных трёхцветных флагов с тремя горизонтальными полосами можно получить, используя три цвета: белый, синий и красный? б) Хромосому можно представить как цепочку, состоящую из генов. Свойства хромосомы зависят не только от состава генов, но и от последовательности их расположения в хромосоме. Какое количество хромосом можно получить из данной, состоящей из n генов?

Сочетания

9. а) Найдите C_n^m, если а) $n=6$, $m=4$; б) $n=7$, $m=5$; в) $n=6$, $m=6$.

б) Решите уравнения: 1) $C_{35}^m=6\ 545$; 2) $C_n^3=6\ 545$.

в) Докажите равенства: 1) $C_n^m=C_n^{n-m}$; 2) $C_5^0+C_5^1+C_5^2=C_5^3+C_5^4+C_5^5$.

10. а) В кошельке имеется по одной денежной купюре достоинством 5 р., 10 р., 20 р., 50 р. и 100 р. Сколькими способами их можно разложить по трём карманам? б) Из 50 различных цветков надо составить букеты так, чтобы в каждый из них входило 5 цветков. Сколько букетов можно составить? в) В слове «аскно» зашифровано несколько трёхбуквенных слов. Сколько надо составить трёхбуквенных слов, чтобы среди них найти в с е зашифрованные слова? г) 1) Из 20 рабочих надо составить бригаду из 7 рабочих. Сколько вариантов возможно? 2) Из 8 человек надо выбрать в президиум собрания 3 человека. Сколько вариантов возможно?

11. а) Сколько можно провести: 1) прямых через 7 точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой; 2) хорд через 7 точек, лежащих на окружности? б) На отрезке AB взято 7 точек. Сколько различных отрезков получилось? в) Пусть даны числа 11, 12, 13 и 14. Сколько можно составить произведений из трёх таких различных множителей?

Размещения с повторениями

12. На фасаде здания требуется установить 3 крепления ($n = 3$) для флажков красного и синего цвета ($m = 2$). В каждое крепление вставляется определённый флажок. Сколько возможно различных вариантов размещения флажков при любом повторении их в соединении по 2 флажка с сохранением указанной очерёдности цветов? *Указание.* Обратите внимание на то, что креплений 3, а цветов всего 2. Поэтому повторения одноцветных флажков неизбежны. Имеет значение также порядок размещения флажков. По формуле $\overline{A_n^m} = n^m$ получаем: $3^2 = 9$ возможных вариантов. Изобразите эти варианты на рисунке.

13. Сколько двузначных чисел можно составить, пользуясь цифрами 1, 3, 5? Проверьте ответ непосредственным составлением списка таких двузначных чисел.

Перестановки с повторениями

14. а) На фасаде здания требуется установить 4 крепления для 4 флажков ($n = 4$), из которых 3 флажка должны быть красными и 1 флажок синим в каждом соединении ($n = m = 4$, $k_1 = 3$ и $k_2 = 1$). Сколько возможно различных вариантов размещения флажков по 4 в каждом соединении? *Указание.* Имеем дело с размещениями. Так как $n = m$, то размещения являются перестановками. Их число:

$$\frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_p!} = \frac{4!}{3!1!} = 4.$$

Изобразите эти варианты на рисунке.

б) Зал украшается 4 флагами, из которых 1 синий, 1 красный и 2 зелёных. Сколькими способами их можно расположить?

Сочетания с повторениями

15. Имеется 4 флажка красного и синего цвета ($n = 4$). На фасаде здания имеются 3 крепления ($k = 3$). Сколько возможно различных соединений из 4 по 3, допускающих любые повторения флажков в соединении? *Указание.* Имеем дело с сочетаниями:

$$\overline{C_n^k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!} = \frac{(4+3-1)!}{(4-1)!3!} = \frac{6!}{3!3!} = 20.$$

Изобразите эти варианты на рисунке.

Дополнительные задания

Размещения

16. а) Сколько словарей надо издать, чтобы можно было бы непосредственно выполнять переводы с любого из четырёх языков: русского, белорусского, украинского, польского на любой другой из этих четырёх языков? б) Сколькими способами 8 шахматистов могут разбиться на пары? в) Туристическая группа состоит из 12 человек. Сколько существует способов образования хозяйственной команды, состоящей из 3 человек, если в ней каждый должен выполнять только определённый вид работы? г) В чемпионате страны участвуют 15 команд. Сколько существует вариантов составления тройки призёров? д) Флаг состоит из четырёх полос разного цвета. Сколько различных флагов можно образовать из семи цветов радуги?

17. а) Сколько размещений из n элементов по m начинается с первого элемента? б) Сколько можно составить трёхзначных чисел из четырёх разных цифр: 0, 1, 2, 3? в) Составлены размещения из 4 элементов по 3 элемента. Сколько из этих размещений будут содержать: 1) первый элемент; 2) второй и третий элементы? г) Составлены размещения из 10 элементов по 6 элементов. Сколько из этих размещений не будут содержать: 1) первый элемент; 2) второй и третий элементы?

18. а) Сколько существует способов раскраски диаграммы из четырёх столбцов четырёхцветной шариковой ручкой, если каждый столбец должен быть окрашен в определённый цвет? б) Укажите, сколько существует способов размещения 15 книг на книжной полке, которая может вместить все эти книги. в) Сколькими способами можно выстроить очередь из 16 человек? г) Сколько можно составить четырёхзначных чисел из цифр 1, 2, 3 и 4, если требуется, чтобы эти цифры в записи числа не повторялись? д) Сколько можно составить слов из букв слова «число»? (Под словом будем понимать любой набор неповторяющихся букв.)

19. а) Сколько можно образовать различных комиссий по три человека из десяти человек? б) Сколько прямых можно провести через n точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой? в) Из 15 рабочих нужно выделить 5 человек для работы в поле. Сколько способов существует? г) Из коллектива в 40 человек нужно выбрать 4 делегата на конференцию. Сколько вариантов существует? д) Сколько диагоналей имеет выпуклый семиугольник? е) Сколько диагоналей имеет выпуклый n-угольник? ж) Сколько различных плоскостей можно провести через n точек пространства, из которых никакие четыре не лежат в одной плоскости, если каждая плоскость проходит через три из данных точек? з) Из цифр 1, 2, 3, 4 составили всевозможные трёхзначные числа. Сколько из них начинается с 34? 20? а) Решите неравенства: 1) $P_n < 900$; 2) $P_n > 400$; 3) $C_n^4 > C_n^5$; б) Сравните: 1) A_5^2 и P_4; 2) A_5^5 и P_5; 3) C_n^3 и $\frac{1}{5}C_{n+2}^4$; 4) $C_n^m + C_n^{m+1}$ и C_{n+1}^{m+1}.

9. Вероятность. Применение комбинаторики к вычислению вероятности

9.1. Классическое определение вероятности

Некоторые задачи по комбинаторике и вероятности интересовали ещё древнегреческих математиков. Большинство комбинаторных фактов в их связи с понятием вероятности было получено в XVII–XVIII вв. Паскалем, Лейбницем, Якобом Бернулли и другими математиками [13].

Теория вероятности изучает **массовые события**, проявляющиеся **в испытаниях**, исходы которых заранее предвидеть нельзя. Такие события называются **случайными**. Например, контролёр проверяет качество детали — это испытание, деталь стандартная или нестандартная — это исходы испытания; участие в лотерее — это испытание, выпадение выигрыша или проигрыша — это исходы испытания. Примеры случайных событий: выигрыш в лотерее, ошибочный набор телефонного номера и т. д. Случайное событие обычно происходит при **выборе наудачу**. Исходы, при которых получается желаемый (интересующий исследователя) результат, называются **благоприятными**. Наиболее распространённой задачей в данной теме является нахождение вероятности благоприятного исхода. При классическом определении вероятности случайного события она характеризуется частотой его появления в массовом опыте, как отношение $\frac{m}{n}$, в котором m — число испытаний с благоприятным исходом, а n — общее число испытаний. Если $m = n$, то $P = 1$, событие в таком случае называется **достоверным** (оно имеет место в каждом испытании). Если $m = 0$, то $P = 0$, событие в таком случае называют **не достоверным** (оно не имеет места ни в одном испытании). Так как $0 \le m \le n$, то $0 \le P \le 1$. Выпускники вуза знают, что наряду с классическим определением вероятности (возникшим в математике первоначально) существует и статистическое определение. В обоих этих подходах при достаточно большом числе испытаний вероятности имеют примерно одинаковые значения (закон больших чисел). Наряду с определением в данной теме используются правила сложения и умножения вероятностей. Своеобразие и непривычность «вероятностных» рассуждений предполагает формирование не только формальных знаний, но необходимой интуиции, применение элементов поиска решения задач, тщательный подбор задач, обеспечивающий постепенное наращивание сложности и трудности задач. Приведём основное определение.

Определение	Примеры
Вероятностью события называется отношение числа благоприятных исходов к общему числу несовместных равновозможных исходов. Пусть P — вероятность события A, m — число благоприятных исходов, n — общее число исходов. Тогда в соответствии с определением вероятности можно записать: $P=\frac{m}{n}$.	**1.** Туристические маршруты проходят через 3 страны, причём допускается различная очерёдность посещения этих стран. Допустим, что все маршруты выписаны на карточках и помещены в урну, турист выбирает один из них наудачу. Какова вероятность такого события? Решение. Всего маршрутов равно $P_3=1\cdot 2\cdot 3=6$. В данном случае $n=6$, $m=1$, $P=\frac{1}{6}$. **2.** В мешке находится 20 шаров, различающихся только по цвету (10 белых, 6 зелёных и 4 синих). Вынимается наугад один шар. Какова вероятность того, что этот шар окажется: а) белым; б) зелёным; в) синим? Решение. Число исходов, благоприятных для извлечения шара определённого цвета, равно числу шаров этого цвета. Поэтому $m_б=10$, $m_з=6$, $m_с=4$. Учитывая, что $n=20$, находим искомые вероятности: $P(б)=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$, $P(з)=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$, $P(с)=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$.

9.2. Правила сложения и умножения вероятностей

При введении этих правил воспользуемся сравнением.

Выясним «Какова вероятность того, что наугад извлечённый шар (в примере 2) окажется зелёным **или** синим?»
Исходы несовместные: при одном исходе шар не может оказаться одновременно зелёным и синим. Число благоприятных исходов
$m_з+m_с=6+4=10$; поэтому искомая вероятность $P(з\ \textit{или}\ с)=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}=50\ \%$.

К этому ответу можно прийти иначе:

$P_з=\frac{6}{20}$, $P_с=\frac{4}{20}$, $\frac{6}{20}+\frac{4}{20}=\frac{10}{20}$

Получаем, что

$$P(з\ или\ с)=P_з+P_с.$$

Приходим к **правилу сложения вероятностей:** *вероятность того, что произойдёт несколько несовместных событий (на это указывает союз* ***или****), равна сумме вероятностей данных событий.*

Другой вопрос: «Одновременно подбрасываются два игральных кубика (например, встряхиваются в одной банке). Какова вероятность события: «На одном кубике выпадет 5» **и** «На другом кубике выпадет 6»?
Число независимых, равновозможных исходов $n=6\cdot 6=36$ (по комбинаторному правилу умножения); возможен только один благоприятный исход ($m=1$); поэтому $P(«5»\ \textit{и}\ «6»)=\frac{1}{36}\approx 3\ \%$

К этому ответу можно прийти иначе:

$P_{«5»}=\frac{1}{6}$, $P_{«6»}=\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$. В этом случае получаем, что

$$P(«5»\ и\ «6»)=P_{«5»}\cdot P_{«6»}.$$

Приходим к **правилу умножения вероятностей:** *вероятность того, что произойдёт одновременно несколько независимых друг от друга событий (на это указывает союз* ***и****), равна произведению вероятностей этих событий.*

9.3. Примеры решения типичных задач на вычисление вероятности события

Задача 18. На карточках написаны числа от 1 до 12 включительно. Наудачу извлекаются две карточки. Какова вероятность того, что произведение чисел, записанных на этих карточках, равно 36?

Решение. Определяем вид соединений: соединения без повторения (повторяющихся карточек нет), порядок расположения карточек в комплекте также не играет роли (в силу коммутативности умножения); это означает, что соединения являются сочетаниями без повторений; воспользуемся формулой $C_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!m!}$; поэтому число всех возможных исходов $n = C_{12}^2 = \dfrac{12!}{2!10!} = 66$.

Благоприятных исходов всего два (они имеют место, когда вынимаются карточки 3, 12 и 4, 9), поэтому $m = 2$. Искомая вероятность $P = \dfrac{2}{66} \approx 3\ \%$.

Задача 19. В ящике имеется 5 карточек с буквами *о, п, р, с, т*. Карточки вынимаются по одной и каждая последующая прикладывается к предыдущей. Какова вероятность того, что получится слово «спорт»?

Решение. 1) Определяем вид соединений: соединения без повторения элементов, порядок букв имеет значение, причём количество букв не меняется — соединения являются перестановками. Слово «спорт» является одной из возможных перестановок, составленных из данных букв. 2) По смыслу задачи благоприятным является только один исход: $m = 1$. 3) Общее число исходов $n = P_5 = 5! = 120$. 4) Поэтому искомая вероятность $P = \dfrac{1}{120} \approx 0{,}8\ \%$.

Задача 20. Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наугад. Какова вероятность того, что набраны нужные цифры?

Решение. Общее число исходов по набору двух последних цифр можно найти с помощью комбинаторного правила произведения: для набора первой из них существует 10 вариантов, для набора второй — 9; поэтому общее число исходов $n = 10 \cdot 9 = 90$. Его можно найти также с помощью размещений без повторений: $A_{10}^2 = 90$. Благоприятным является один исход: $m = 1$. Отсюда $P = \dfrac{1}{90} \approx 0{,}011 \approx 1{,}1\ \%$.

Задача 21. Каждый из шести играющих пишет на карточке одну цифру — какую пожелает. При этом с удивлением обнаруживают, что получение комплекта, в котором все цифры разные если возможно, то в крайне редком случае. Решили выяснить, какова вероятность того, что в комплекте из шести карточек не окажется одинаковых цифр. Вот их решение. Правильно ли оно? (Под комплектом будем понимать неупорядоченный набор элементов.)

Решение. Определяем вид соединений: соединения с повторением (разные игроки могут записывать одни и те же цифры); не предполагается, что в комплекте карточки упорядочиваются (приходим к сочетаниям с повторениями). Тогда общее число возможных комплектов из шести карточек можно найти по формуле

$$\overline{C_n^m} = \frac{(n+m-1)!}{(n-1)!m!};$$

$$\overline{C_{10}^6} = \frac{(10+6-1)!}{(10-1)!6!} = \frac{15!}{9!6!} = 5\,005.$$

Находим общее число благоприятных исходов с помощью сочетаний без повторений (согласно условию задачи):

$$C_{10}^6 = \frac{10!}{6!4!} = 210.$$

Тогда искомая вероятность $P = \dfrac{210}{5\,005} \approx$ $\approx 0{,}0419 \approx 0{,}042 \approx 4{,}2\ \%$.

Задача 22. Из коробки, содержащей шесть карточек с буквами *б, о, о, п, с, с*, извлекают одну за другой карточки и располагают их в порядке извлечения. Какова вероятность того, что получится слово «способ»?

Решение. Набор из шести карточек можно рассматривать как перестановку из шести букв, причём с повторениями (повторяются буквы *о* и *с*). Поэтому общее число исходов $n = \bar{P}(2, 2, 1, 1) = \frac{6!}{2!2!} = 180$. Благоприятным является только один исход (получение именно слова «способ»): $m = 1$. Поэтому искомая вероятность $P = \frac{1}{180} \approx 0{,}6$ %.

Задача 23. Пассажир ждёт автобуса **№ 5 или** № 10 возле остановки, у которой останавливаются автобусы пяти маршрутов: № 2, 5, 8, 9 и 10. Считая, что автобусы всех маршрутов появляются в среднем одинаково часто, найдите вероятность того, что первый подошедший к остановке автобус будет нужного пассажиру маршрута.

Решение. Вероятность того, что первым подойдёт к остановке автобус № 5, равна $\frac{1}{5}$; такая же вероятность того, что первым подойдёт автобус № 10. Искомая вероятность находится по правилу сложения вероятностей: $P_{№\,5 \text{ или } №\,10} = P_{№\,5} + P_{№\,10} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5} = 40$ %.

Задача 24. На заводе 98 % изделий признается пригодными (событие А); из каждой сотни годных изделий 80 оказываются первого сорта (событие В). Найдите вероятность того, что изделие, изготовленное на этом предприятии, окажется первого сорта.

Решение. Общее количество изделий примем за 100 %. Нетрудно найти вероятности событий A и B: $P_A = \frac{98}{100} = 0{,}98$, $P_B = \frac{80}{100} = 0{,}8$. Так как события A и B связаны союзом «и» (совершаются одновременно), то искомая вероятность находится по правилу произведения вероятностей: $P_{A \text{ и } B} = P_A \cdot P_B = 0{,}98 \cdot 0{,}8 = 0{,}784 \approx 78$ %.

9.4. Материал для выполнения творческих заданий на нахождение вероятности событий

1. На карточках написаны натуральные числа от 1 до 14 включительно. Наугад извлекаются три карточки. Какова вероятность того, что сумма цифр, записанных на них, будет равна 10?

Решение. Определяем вид соединения: так как повторяющихся карточек не будет, то имеем дело с соединениями без повторений; так как речь идёт о цифрах и их сумме, то порядок извлечения карточек и их расположение в комплекте также роли не играют; это означает, что соединение является сочетанием без повторений; воспользуемся формулой $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$; поэтому число всех возможных исходов $n = C_{14}^3 = \frac{14!}{3!11!}$. Благоприятных исходов всего четыре (они имеют место, когда вынимаются карточки 1, 2, 7; 1, 3, 6; 1, 4, 5; 2, 3, 5), поэтому $m = 4$; Искомая вероятность $P = \frac{4}{C_{14}^3} = \frac{4 \cdot 3!11!}{14!} = \frac{1}{91} \approx 0{,}011 \approx 1{,}1$ %.

2. На карточках написаны натуральные числа от 1 до 12 включительно. Наугад выбираются две карточки. Какова вероятность того, что произведение чисел, написанных на этих карточках, будет равно 36?

Решение. 1) Определяем вид соединения: соединения без повторения (повторяющихся карточек нет), порядок извлечения карточек не играет роли (в силу коммутативности умножения); это означает, что соединение является сочетанием без повторений. 2) Воспользуемся формулой $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$. Поэтому число всех возможных исходов $n = C_{12}^2 = \frac{12!}{2!10!} = 66$. 3) Благоприятных исходов всего два (они имеют место, когда вынимаются карточки 3, 12 и 4, 9), поэтому $m = 2$. 4) Искомая вероятность $P = \frac{2}{66} \approx 3$ %.

3. В мешке находится 18 шаров трёх цветов (9 белых, 5 чёрных и 4 зелёных). Наугад вынимается один шар. Какова вероятность того, что он окажется: а) чёрным или зелёным; б) чёрным, или зелёным, или белым; в) чёрным или коричневым?

4. а) В двух мешках находится по 18 шаров трёх цветов (по 9 белых, по 5 чёрных и по 4 зелёных). Два участника, каждый из своего мешка, наугад вынимают по одному шару. Какова вероятность того, что шары в один и тот же момент могут одновременно оказаться: 1) оба чёрными; 2) один чёрным, другой зелёным; 3) один чёрным, другой коричневым? б) На книжной полке случайным образом расставлены 5 книг по алгебре, 4 — по геометрии и 3 — по элементарной математике. Какова вероятность того, что все книги по одному предмету окажутся рядом?

Решение. Общее число исходов $n = P_{12} = (5 + 4 + 3)! = 12!$ При подсчёте благоприятных исходов учтём, что книги по алгебре, расположенные рядом, могут быть переставлены 5! способами, аналогично по геометрии 4! способами, по элементарной математике 3! способами. По комбинаторному правилу умножения число таких способов равно 5!4!3!. Все они дают благоприятные исходы. Кроме того, благоприятные исходы получаются при перестановке комплектов книг. Таких комплектов 3, а способов перестановки равно $P_3 = 6$. Общее число благоприятных исходов $m = 5!4!3!6$. Тогда искомая вероятность $P = \frac{m}{n} = \frac{5!4!3!6}{12!} = \frac{1}{4620} \approx 0{,}000216 \approx 0{,}02\ \%$.

5. На книжной полке случайным образом расставлены 5 книг по алгебре, 4 — по геометрии и 3 — по элементарной математике. Какова вероятность того, что все книги по одному предмету окажутся рядом, причём комплект из книг по алгебре окажется на первом месте?

Решение. Как и в предыдущей задаче, общее число исходов $n = P_{12} = 12!$ При подсчёте благоприятных исходов, как и выше, учтём, что число способов, получаемых путём перестановки книг в одном комплекте, равно 5!4!3!. Все они дают благоприятные исходы. Но благоприятных исходов, получающихся при перестановке комплектов книг, уже только 2. Общее число благоприятных исходов $m = 5!4!3!2$. Тогда искомая вероятность $P = \frac{m}{n} = \frac{5!4!3!2}{12!}$.

6. а) Наудачу выбираются 3 отрезка из пяти данных, равных 2, 3, 5, 6, 7 см. Какова вероятность того, что из трёх выбранных отрезков можно построить треугольник? б) Слово «точка» составлено из букв разрезной азбуки. Наугад извлекаются по одной три карточки, которые последовательно складываются. Какова вероятность того, что получится слово «ток»? в) Каждый из пяти играющих пишет на бумажке одну цифру, какую пожелает. Какова вероятность того, что в комплекте из пяти цифр не окажется одинаковых? г) Из коробки, содержащей карточки с буквами *и, к, м, у, р*, извлекают одну за другой три карточки и располагают их в порядке извлечения. Какова вероятность того, что получится слово «мир» или слово «рим»?

Решение. Нас интересуют упорядоченные соединения из 5 букв по 3; это размещения, число их $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$; поэтому общее число испытаний $n = 60$. Благоприятных испытаний с получением слова «мир» всего одно, со словом «рим» также одно. Соответствующие им вероятности равны $\frac{1}{60}$. По правилу сложения вероятностей $P_{\text{мир или рим}} = \frac{1}{60} + \frac{1}{60} = \frac{1}{30}$.

7. Из двух коробок, первая из которых содержит карточки с буквами *и, к, м, у, р*, вторая — карточки с буквами *и, м, у, р*, одновременно двумя участниками извлекаются три карточки и располагаются в порядке извлечения их, отдельно друг от друга. Какова вероятность того, что одновременно получатся слова «мир» и «рим»?

Решение. Первый участник имеет дело с упорядоченными соединениями из 5 букв по 3, т. е. с размещениями, их число $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$; поэтому общее число испытаний, выполняемых первым участником, $n = 60$. Вероятность появления слова «мир» $P_1 = \frac{1}{60}$. Аналогично вероятность появления слова «рим» $P_2 = \frac{1}{24}$. По правилу умножения вероятностей $P_{\text{мир и рим}} = \frac{1}{60} \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{1440}$.

8. а) Пассажир ждёт автобуса № 1 или № 9 возле остановки, у которой останавливаются автобусы маршрутов № 1, 5, 7, 9. Считая, что автобусы всех маршрутов проходят примерно одинаково часто, найдите вероятность того, что первый подошедший к остановке автобус будет нужного пассажиру маршрута. б) Группа туристов из 10 юношей и 6 девушек выбирает хозяйственную команду из 4 человек. Какова вероятность, что в ней окажется 2 юношей и 2 девушки? в) Сколько четырёхзначных чисел можно записать, используя обе цифры 2 и 3? Какова вероятность, что в записи числа окажется одна цифра 2 и три цифры 3? Выпишите непосредственно числа, составляющие общее число исходов и число благоприятных исходов. Убедитесь, что $n = \overline{A_2^4} - 2$, $m = \overline{A_4^1}$. д) Вероятность попадания в мишень первого стрелка равна 0,8, а второго — 0,9. Стрелки сделали по одному выстрелу. Какова вероятность: 1) попадания в мишень обоих стрелков; 2) промахов первого стрелка; 3) промахов второго стрелка; 4) промахов обоих стрелков?

Примеры геометрической вероятности

9. а) Внутри прямоугольника со сторонами 5 см и 6 см помещён круг, радиус которого равен 2 см. Внутри прямоугольника наугад отмечается точка. Найти геометрическую вероятность попадания точки в круг. (Определение геометрической вероятности таково: пусть фигура F включается в фигуру Φ. **Вероятность попадания точки в фигуру меньшей площади (или объёма)** по определению есть отношение площади (или объёма) меньшей фигуры к площади (или объёму) большей фигуры.) б) Внутри прямоугольника со сторонами 5 см и 6 см помещён круг некоторого радиуса. Внутри прямоугольника наугад отмечается точка, вероятность попадания которой в круг равна 0,42. Найдите радиус круга. в) Внутри некоторого прямоугольника помещён круг радиуса 2 см. Внутри прямоугольника наугад отмечается точка, вероятность попадания которой в круг равна 0,42. Найдите площадь прямоугольника. г) Внутри прямоугольника со сторонами 5 см и 6 см помещён круг, радиус которого равен 2 см. Внутри прямоугольника наугад отмечается точка. Найти геометрическую вероятность попадания точки в ту часть прямоугольника, которая не имеет общих точек с кругом. д) Составьте задачу на нахождение геометрической вероятности для случая, когда внутри круга содержится квадрат.

Рекомендуемая литература

1. Алгебра и начала анализа : учебное пособие для 9-го класса средней школы / под ред. А. Н. Колмогорова. — М. : Просвещение, 1975. — 222 с.

2. *Андерсон, Д.* Дискретная математика и комбинаторика / Д. Андерсон. — М. : Вильямс, 2004. — 960 с.

3. *Баженов, М. А.* Из опыта преподавания теории вероятностей / М. А. Баженов // Математика в школе. — 1972. — № 2. — С. 49–53.

4. *Вейц, Б. Е.* Элементы теории вероятностей и комбинаторика / Б. Е. Вейц // Математика в школе. — 1968. — № 2. — С. 63-72.

5. *Виленкин, Н. Я.* Комбинаторика / Н. Я. Виленкин, А. Н. Виленкин, П. А. Виленкин. — М. : МЦНМО, 2006. — 400 с.

6. Дополнительные главы по курсу математики 10 класса для факультативных занятий : пособие для учащихся : сборник статей / составитель З. А. Скопец. — М. : Просвещение, 1970. — 256 с.

7. *Ежов, И. И.* Элементы комбинаторики / И. И. Ежов, А. В. Скороход, М. И. Ядренко. — М. : Наука, 1977. — 80 с.

8. *Журбенко, А. Н.* Введение в теорию вероятностей и комбинаторику / А. Н. Журбенко // Математика в школе. — 1968. — № 2. — С. 35–42.

9. *Колмогоров, А. Н.* Введение в теорию вероятностей. Библиотечка «Квант» / А. Н. Колмогоров, И. Г. Журбенко, А. В. Прохоров. — М. : Наука, 1982. — 155 с.

10. *Колмогоров, А. Н.* Теория вероятности и комбинаторика / А. Н. Колмогоров // Математика в школе. — 1968. — № 2, 3.

11. *Лидский, В. Б.* Задачи по элементарной математике / В. Б. Лидский, О. В. Овсянников, А. Н. Тулайков, М. И. Шабунин. — М. : Наука, 1969. — 416 с.

12. *Лютикас, В. С.* Факультативный курс по математике. Теория вероятностей / В. С. Лютикас. — М. : Просвещение, 1999. — 160 с.

13. *Майстров, Л. Е.* Развитие понятия вероятности / Л. Е. Майстров. — М. : Наука, 1980. — 270 с.

14. *Мальцева, И. В.* Логика для дошкольников. Комбинаторика. / И. В. Мальцева. — М. : Клевер-Медиа-Групп, 2015. — 16 с.

15. *Новоселов, С. И.* Специальный курс элементарной алгебры / С. И. Новоселов. — М. : Советская наука, 1951. — 548 с.

16. *Панюкова, Т. А.* Комбинаторика и теория графов / Т. А. Панюкова. — М. : Гостехиздат, 2014. — 216 с.

17. Пособие по математике для поступающих в вузы / под ред. Г. И. Яковлева. — М. : Наука, 1985. — 480 с.

18. *Рогановский, Н. М.* Элементарная математика : в 4-х книгах. Книга I. Числа : учебное пособие для студентов / Н. М. Рогановский, Е. Н. Рогановская. — Минск: Дизайн ПРО, 2000. — 208 с.

19. *Савельев, Л. Я.* Комбинаторика и вероятность / Л. Я. Савельев. — М. : Наука, 1975. — 424 с.

20. *Сачков, В. Н.* Введение в комбинаторные методы дискретной математики / В. Н. Сачков. — М. : МЦНМО, 2004. — 324 с.

21. *Фадеев, Д. К.* Элементы высшей математики для школьников / Д. К. Фадеев, М. С. Никулин, И. Ф. Соколовский. — М. : Наука, 1987. — 336 с.

22. *Шахмейстер, А. Х.* Комбинаторика. Статистика. Вероятность / А. Х. Шахмейстер. — М. : МЦНМО, 2015. — 296 с.

23. *Шклярский, Д. О.* Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии / Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом. — М. : Наука, 1974. — 384 с.

24. *Яковлев, И. В.* Комбинаторика для олимпиадников / И. В. Яковлев. — М. : МЦНМО, 2016. — 80 с.