Н. М. ***Рогановский,*** *член-корреспондент Академии образования Республики Беларусь, профессор кафедры методики преподавания математики Могилёвского государственного университета имени А. А. Кулешова, доктор педагогических наук;*
Е. Н. ***Рогановская,*** *доцент кафедры методики преподавания математики Могилёвского государственного университета имени А. А. Кулешова, кандидат педагогических наук*

ФРАКТАЛЫ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ: ПЕРСПЕКТИВЫ ПРИМЕНЕНИЯ

Введение

Фрактал (лат. fractus — ‘дроблённый, разделённый’). Это понятие было предложено Бенуа Мандельбротом в 1975 г. для обозначения нерегулярных самоподобных структур [1].

Бенуа Мандельброт

(20.11.1924–14.10.2010)

Вначале Мандельброт обращается к разъяснению общего научного смысла понятия фрактала и делает это следующим образом [1, с. 3]: «Термин фрактал я образовал от латинского причастия fractus. Соответствующий глагол frangere переводится как ‘ломать, разламывать’, т. е. создавать фрагменты неправильной формы. Таким образом, разумно — и как кстати! — будет предположить, что, помимо значения “фрагментированный”, ...слово fractus должно иметь и значение “неправильный по форме” — примером сочетания обоих значений может служить слово “фрагмент”». Понятие фрактала тесно связано с понятием самоподобия фигур. Самоподобная фигура — фигура, которую: «можно было разбить на N частей, каждая из которых может быть получена из целой фигуры с помощью преобразования подобия с коэффициентом r (в сочетании со смещением или преобразованием симметрии)» [1, с. 25]. Разнообразие фрактальных объектов привело к расширенной трактовке самоподобия, его стали понимать достаточно широко как повторение фрагментов, лишь приближённо связанных с геометрическим подобием или не связанных с ним вовсе. Мандельброт приводит примеры таких объектов в математике и естествознании. Особенно они характерны в гуманитарной сфере. С учётом этого широкое распространение получила такая общенаучная трактовка фрактала: **фрактал** — это структура, состоящая из фрагментов, которые в каком-то смысле подобны целому.

Оказалось, что с помощью многократного повторения достаточно простых частей, подобных между собой, можно образовать сложные фрактальные объекты, которые далеко не всегда поддаются описанию на языке евклидовой геометрии или классического математического анализа. Больше того, обнаружилось, что всё мироздание насыщено фрактальными объектами и то, что ранее относилось к хаосу, считалось не регулярным, не предсказуемым и не поддавалось изучению, на самом деле таковым не является и может быть изучено при помощи фракталов. С позиции фрактала рассматривается броуновское движение, кривая Коха рассматривается в качестве математической модели береговой линии, отмечается, что распределение галактик и звёзд включает в себя определённые зоны самоподобия и т. д. В исследовательском плане фракталы примечательны тем, что информация о части фрактала даёт информацию о фрактале в целом. Например, по современной фотографии некоторой звёздной галактики можно описать с помощью её фрактальной модели, какой вид она имела в прошлом и как она будет выглядеть в будущем. Существенное значение имеет повторяемость подобных частей, их число, изменение размеров. Обращают внимание на себя и следующие слова в определении Мандельброта: «...в каком-то смысле подобны целому». Эти слова означают, что фрактал не обязательно связан с подобием евклидовой геометрии и, больше того, «подобие» может иметь различную математическую и нематематическую интерпретацию.

Фракталы задают новое направление в математике, естествознании, космологии, технике, медицине, живописи и т. д., по существу, — в любой области знания. Универсальность понятия фрактала столь велика, что породила настоящую революцию в науке и в настоящее время вплотную подвела к необходимости выяснения значения этого понятия для школьных курсов математики, информатики и естествознания, к необходимости разработки конкретного содержания их и методики изложения.

Предпосылки возникновения фрактальной геометрии

Несколько слов о возникновении общей идеи фрактала. Человечество с древнейших времён стремилось искать общие принципы мироздания.

К примеру, такой статус древние связывали с золотым сечением, считали, что всё то, что подчиняется золотому сечению, обладает особой, божественной силой и красотой. В частности, так устроено тело человека и различные его части: лицо, рука, кисть руки, нога, стопа и т. д. Были замечены многократные проявления золотого сечения в живой и неживой природе. Золотое сечение получило широкое применение в живописи и архитектуре. С современной точки зрения мы можем утверждать, что золотое сечение является лишь одним из примеров подобия, одним из примеров фракталов, а «самым фрактальным объектом» является сам человек. Безусловно, что связь золотого сечения с фракталами и наличие компьютерных средств моделирования оживит интерес к обоим этим феноменам.

О давних истоках общей идеи фрактала свидетельствуют и такие слова: «То, что находится внизу, аналогично тому, что находится вверху... Подобное притягивается подобным» («Изумрудная скрижаль» Гермеса Трисмегиста, воплотившего в себе черты древнеегипетского бога Тота и древнегреческого бога Гермеса). Вспомним также слова из Библии о том, что Бог создал человека по своему образу и подобию.

К настоящему времени в математике выделены геометрические, алгебраические, стохастические фракталы и мультифракталы. Математические фракталы используются для описания природных фракталов: это и упомянутое выше броуновское движение, и турбулентность жидкости, и облака, и береговая линия, и галактики, и кровеносные сосуды и многое другое — всё то, к чему традиционная математика не могла подступиться.

Примеры математических фракталов: множество Кантора, кривая Коха, функции Пеано, Больцано, Вейерштрасса и др. Широкое распространение в науке фракталы получили после их компьютерной визуализации. Красота геометрических фракталов поражает. Но ещё больше поражает возможность описания с их помощью таких процессов и объектов, которые раньше были математике не подвластны. Гений человека в лице Бенуа Мандельброта позволил совершить революционной переворот в науке в целом. Основные положения фрактальной геометрии изложены Б. Мандельбротом в книге [1], которая бесспорно заняла достойное место в достижениях современной цивилизации. Благодаря этому к ним резко возрос всеобщий интерес. Фракталы получили распространение не только в науке или в живописи, но даже на бытовом уровне — к примеру, в довольно «прозаичной» сфере — в производстве обоев для оклейки стен.

Современное состояние теории фракталов подготовлено усилиями многих учёных, работавших в 1875–1925 гг. (Кантор, Пуанкаре, Жюлиа, Хаусдорф, Фату и др.). Если обратиться к Математической энциклопедии (в 5-ти томах, гл. ред. И. М. Виноградов. — М. : Советская энциклопедия, 1977–1985), то можно обнаружить, что в ней отсутствует понятие фрактала, не употребляется и сам термин. Однако в статье «Линия» (т. 3, с. 382–387) в связи с различными обобщениями линии приводятся треугольник, квадрат и куб Серпинского, упоминается кривая Пеано. Уделяется большое внимание размерности различных объектов, в частности размерности Хаусдорфа — Безиковича (т. 5, с. 779). Именно это определение было принято Мандельбротом в уже упомянутой работе в качестве основного математического определения [1, с. 10]: «**Фракталом** называется множество, размерность Хаусдорфа — Безиковича для которого строго больше его топологической размерности».

Размерность Хаусдорфа — Безиковича представляет собой определённый числовой инвариант метрического пространства. Её можно применять как к обычным объектам евклидовой геометрии (при этом получаются обычные значения размерности: прямая и отрезок — одномерны, квадрат и окружность — двумерны, куб — трёхмерен и т. д.), так и к фрактальным объектам с дробными или целыми размерностями. Это облегчает сравнение различных размерностей и интуитивное их восприятие. Например, кривая Коха имеет размерность, равную

$$\frac{\ln 4}{\ln 3} = \log_3 4 \approx 1{,}261859\ldots$$

Полученная размерность немного больше 1, но значительно меньше 2. В силу того, что размерность Хаусдорфа применима и к обычным стандартным и к фрактальным объектам, дробную размерность кривой Коха можно истолковать так: кривая Коха по своей размерности ближе к обычным одномерным линиям евклидовой плоскости, но имеет «небольшое тяготение» к двумерным объектам. Кривая Коха при небольшом отличии по размерности от стандартных линий тем не менее существенно отличается от них в другом отношении. В самом деле. Эта линия имеет излом в каждой своей точке, иначе — ни в какой её точке нельзя провести касательную. На основе визуального рассмотрения можно сказать, что кривая Коха «пытается» заполнить собой некоторую узенькую, изломанную полоску (тогда бы она имела размерность 2), но это ей (увы!) не удаётся достичь никогда. Поэтому вполне естественно, что фрактальная размерность этой кривой больше 1, но меньше 2.

Итак, самоподобие и размерность фракталов — две существенные характеристики фракталов. Хотя эти характеристики не единственные, но знакомство с фракталами надо начинать с них. Ввиду того, что размерность фрактала имеет столь важное значение, рассмотрим это понятие отдельно, уделяя внимание прежде всего наглядному истолкованию, подкрепляя его затем необходимыми вычислениями.

Размерность Хаусдорфа — Безиковича

Самое популярное определение размерности для стандартных геометрических объектов таково: размерность пространства или объекта — это число независимых переменных (координат), которые необходимы для определения положения точки в этом пространстве или объекте. Все стандартные (и некоторые фрактальные) объекты имеют целочисленные размерности: 0, 1, 2, 3 и т. д. Например, размерность броуновского движения равна 2. Однако теперь известно и большое разнообразие объектов, размерность которых не является целой, а имеет промежуточные, дробные значения. К примеру, размерность береговой линии $D = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1{,}26$ (такая же, как у кривой Коха). Существует несколько способов подсчёта размерности фрактальных объектов. Самый простой и распространённый способ создан математиками Ф. Хаусдорфом и А. Безиковичем. Размерность фрактала, подсчитанную предлагаемым ниже способом, называют размерностью Хаусдорфа — Безиковича и обозначают буквой D.

Нахождение размерности фрактала по методу Хаусдорфа — Безиковича основано на идее **покрытия** фрактала или маленькими отрезками, или квадратами, или треугольниками, или кругами, или кубами и т. д. — что больше подходит в каждом конкретном случае. Естественно, что чем меньше будут эти небольшие фигуры, тем больше их потребуется, чтобы полностью покрыть фрактал.

Определение. Размерность Хаусдорфа — Безиковича — это число D, к которому стремится отношение

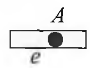
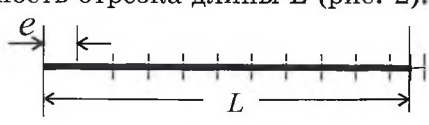
$$\frac{\ln N(e)}{\ln \frac{1}{e}} \text{ при } e \to 0,$$

где N — число фигур, с помощью которых осуществляется покрытие фрактала, e — линейный размер этих фигур.

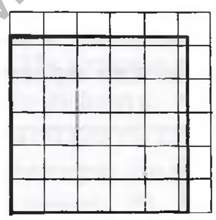
В символической форме это определение можно записать так:

число D — размерность фрактала $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln N(e)}{\ln \frac{1}{e}} \to D \text{ при } e \to 0.$$

Определение размерности стандартных объектов обычным способом	**Вычисление размерности по способу Хаусдорфа — Безиковича**
1	2
1. Точка. Её размерность равна 0, потому что для определения положения точки «внутри неё» не нужно вообще никаких переменных — точка всего одна, никаких вариантов её положения нет	Найдём размерность точки. Чтобы покрыть точку, достаточно взять один сколь угодно малый отрезок e или узенький отрезок длины e (рис. 1).  *Рисунок 1* Рассмотрим отношение, о котором говорится в определении размерности: $\frac{\ln N(e)}{\ln \frac{1}{e}} = \frac{\ln 1}{\ln \frac{1}{e}} = \frac{0}{\ln \frac{1}{e}} = 0$. Так как искомое отношение остаётся постоянным (равным 0) при любом e (в том числе и при $e \to 0$), то полученное отношение стремится к 0. Поэтому $D = 0$. Тем самым подтвердили, что размерность точки по способу Хаусдорфа — Безиковича такая же, как и при нахождении её обычным способом.
2. Отрезок. Размерность отрезка равна 1, так как для определения положения точки внутри отрезка потребуется всего одна переменная	Найдём размерность отрезка длины L (рис. 2).  *Рисунок 2*

Продолжение таблицы

1	2
	Ясно, что какое бы e мы не взяли, чтобы покрыть весь отрезок, нужно в качестве N (числа таких отрезков) взять число, не меньше $\frac{L}{e}$. Рассмотрим отношение, о котором говорится в определении размерности: $$\frac{\ln N(e)}{\ln\frac{1}{e}} = \frac{\ln\frac{L}{e}}{\ln\frac{1}{e}} = \frac{\ln L}{\ln\frac{1}{e}}+1.$$ При $e \to 0$ первое слагаемое тоже стремится к нулю, а рассматриваемое отношение стремится к 1. Получаем, что $D = 1$. Тем самым подтвердили, что размерность отрезка по способу Хаусдорфа — Безиковича такая же, как и при нахождении её обычным способом.
3. Квадрат. Размерность квадрата равна 2, так как для определения положения точки внутри квадрата необходимы уже две независимые переменные (две координаты)	Найдём размерность квадрата со стороной, равной L (рис. 3).  *Рисунок 3* Как и выше, для покрытия стороны квадрата нужно взять не меньше $\frac{L}{e}$ отрезков. Тогда для покрытия данного квадрата требуется взять не меньше $\left(\frac{L}{e}\right)^2$ квадратов со стороной, равной e. Рассмотрим отношение, о котором говорится в определении размерности: $$\frac{\ln N(e)}{\ln\frac{1}{e}} = \frac{\ln\left(\frac{L}{e}\right)^2}{\ln\frac{1}{e}} = \frac{2\ln\frac{L}{e}}{\ln\frac{1}{e}} = 2\left(\frac{\ln\frac{L}{e}}{\ln\frac{1}{e}}\right).$$ По пункту 2, дробь, на которую умножается 2, при $e \to 0$ стремится к 1, а рассматриваемое отношение стремится к 2. Получаем, что $D = 2$. Тем самым подтвердили, что способ Хаусдорфа — Безиковича и обычный способ дают одну и ту же размерность квадрата.

Методическая схема изучения геометрических фракталов

Построение геометрического фрактала

1. Задать основу фрактала — исходную геометрическую фигуру.

2. Задать некоторый закон преобразования основы, приводящий к образованию частей основы.

3. Это преобразование повторить применительно к полученным частям основы, приводящее к образованию новых частей, подобных предыдущим.

4. Данное преобразование применять всё к новым и новым частям и так (теоретически) до бесконечности.

Изучение свойств геометрического фрактала

1. (Основное свойство.) Найти размерность фрактала, сравнить его размерность с размерностью обычной геометрической фигуры или с размерностью других фракталов.

2. Если фрактал является линией, то найти длину фрактальной линии или площадь ограниченной ею фигуры для n-го шага построений, для $n \to \infty$.

3. Проверить, является ли фрактальная линия гладкой, или в каждой своей точке имеет излом.

4. Является ли фрактал ограниченной фигурой, какие размеры имеет ограничивающая его фигура (внутри которой он расположен)?

5. Возможно, представляет интерес найти расстояние между наиболее характерными точками фрактала, а также закономерность их изменения в бесконечном процессе его образования.

6. Возможно ли, изменяя данный фрактал, получить новый фрактал?

7. Выяснить, представляет ли интерес рассмотрение мультифрактала, являющегося, например, объединением двух фракталов в один фрактал. С какой целью?

Простейшие геометрические фракталы

Геометрические фракталы — это фракталы, которые строятся обычными средствами евклидовой геометрии и поэтому самые наглядные. Наиболее простое из них — множество Кантора. Принцип построения множества Кантора используется при построении многих других геометрических фракталов. Он основан на последовательном удалении по определённому правилу частей исходной фигуры (основы): вначале у данной фигуры, затем у оставшихся частей фигуры, и так до бесконечности. Последний признак и отличает их от обычных геометрических построений, которые совершаются в конечное число шагов.

1. Множество Кантора (канторова пыль). Классическое множество Кантора, или канторова пыль, названо по имени Георга Кантора, который описал его в 1883 г.

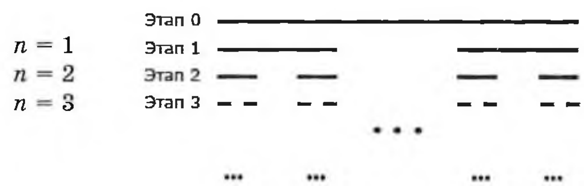


Рисунок 4

Построение фрактала. Этот фрактал (рис. 4) строится на основе отрезка, из которого на первом шаге удаляется $\frac{1}{3}$ из центра, на втором — по $\frac{1}{3}$ из оставшихся двух отрезков и т. д. до бесконечности. Объясните, почему множество Кантора является фракталом. То, что получается в результате, больше похоже на бесконечное множество изолированных друг от друга точек — «точечную пыль» (поэтому этот фрактал называют ещё канторовой пылью).

Нахождение размерности фрактала. Но и на отрезок эта пыль не похожа — в ней «дырка на дырке» — любой сколь угодно малый отрезок содержит дырку. В этой ситуации можно предположить, что размерность такого объекта лежит в промежутке между 0 и 1.

Подсчитаем размерность Хаусдорфа — Безиковича для этого фрактала. Если считать, что исходный отрезок имеет длину 1, то на 1-м этапе ($n = 1$) образуется два отрезка длины $\frac{1}{3}$, на 2-м этапе ($n = 2$) — 4 отрезка длины $\frac{1}{9}$. Вообще, на n-м этапе мы имеем 2^n отрезков, имеющих длину $\frac{1}{3^n}$. Такой же возьмём длину отрезка покрытия: $e = \frac{1}{3^n}$. Составим искомое отношение:

$$\frac{\ln N(e)}{\ln\frac{1}{e}} = \frac{\ln 2^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

Так как это отношение постоянно при любом шаге, то при $e \to 0$ оно стремится к $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ и искомая размерность множества Кантора равна $D = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0{,}63$. Как видно, размерность канторовой пыли больше 0 (правда, не настолько больше, как предполагали), но меньше 1, т. е. меньше размерности обычного отрезка.

Замечание к способу нахождения размерности. Полученный результат $D = \frac{\ln 2}{\ln 3}$ для размерности множества Кантора свидетельствует о том, что к нему можно прийти сразу на основании первого этапа (для $n = 1$). Для этого этапа число частей $N = 2$, коэффициент подобия (общий при переходе от одной части к последующей) $e = \frac{1}{3}$.

Как изменяется длина исходного отрезка? Пусть длина исходного отрезка равна 1. На первом шаге построений получаем два отрезка, сумма их длин равна $\frac{2}{3}$, на втором шаге построений получаем четыре отрезка, сумма их длин равна $\left(\frac{2}{3}\right)^2$, на третьем шаге сумма длин маленьких отрезков будет равна $\left(\frac{2}{3}\right)^3$, ..., на n шаге $\left(\frac{2}{3}\right)^n$. Сумма длин полученных отрезков неограниченно уменьшается и при $n \to \infty$ стремится к 0. Длина одного отрезка на n-м шаге построений равна $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ и при $n \to \infty$ стремится к 0. Суммарная длина выброшенных отрезков равна 1.

Дополнительные задания: а) Можно ли утверждать, что множество Кантора имеет ось симметрии? центр симметрии? б) Можно ли утверждать, что каждая точка канторовой пыли является концом какого-то из отрезков, получающегося при построении канторовой пыли? в) Несколько видоизменим канторово множество. Допустим, что на каждом шаге построений выбрасывается пятая центральная часть каждого отрезка. Получим ли мы таким образом новый фрактал? Найдите его размерность Хаусдорфа — Безиковича; г) Видоизменим процесс образования множества Кантора таким образом: вместо деления отрезка в отношении 1 : 1 : 1 воспользуемся золотым сечением φ : 1 : φ. Получим ли мы таким образом новый фрактал? Найдите его размерность Хаусдорфа — Безиковича.

2. Кривая Коха — фрактальная кривая, описанная в 1904 г. шведским математиком Хельге фон Кохом.

Построение фрактала. Построение кривой Коха показано на рисунке 5. Охарактеризуйте последовательность построений. Почему кривая Коха удовлетворяет определению фрактала?

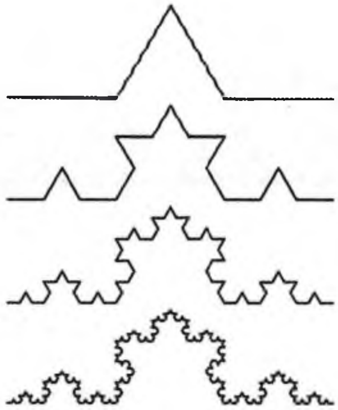


Рисунок 5

Нахождение размерности фрактала. Докажем, что размерность кривой Коха $D = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1{,}26$. Для покрытия кривой на каждом шаге её построения будем использовать отрезки, которые получаются на этом шаге. При таком покрытии просто находятся N и e из определения размерности по Хаусдорфу — Безиковичу. Для $n = 1$ получаем $N_1 = 4$, $e_1 = \frac{1}{3}$; для $n = 2$ получаем $N_2 = 4^2$, $e_2 = \frac{1}{3^2}$; для $n = 3$ получаем $N_3 = 4^3$, $e_3 = \frac{1}{3^3}$; ..., для n получаем $N_n = 4^n$, $e_n = \frac{1}{3^n}$; тогда $\frac{\ln N(e)}{\ln \frac{1}{e}} = \frac{\ln 4^n}{\ln\left(\frac{1}{1/3^n}\right)} = \frac{\ln 4}{\ln 3}$. Это отношение не зависит от n, а потому при $n \to \infty$ ($e \to \infty$) будем иметь $D = \frac{\ln 4}{\ln 3}$. Как видно, кривая Коха «оправдывает» своё название «кривая»: по размерности она ближе к обычным одномерным линиям, нежели к двумерным фигурам.

Замечание к способу нахождения размерности. Убедитесь, что к выводу размерности $D = \frac{\ln 4}{\ln 3}$ можно прийти на основании первого шага построения кривой Коха. Для этого этапа число частей $N = 4$, коэффициент подобия (общий при переходе от одной части к последующей) $e = \frac{1}{3}$.

Как изменяется длина исходного отрезка? Найдём длины ломаных при заданной длине исходного отрезка $a = 1$ и некоторого числа последовательных построений. Длина ломаной для $n = 1$ равна $\frac{4}{3}$, для $n = 2$ равна $\frac{16}{9}$, для $n = 3$ равна $\left(\frac{4}{3}\right)^3$, для произвольного n равна $\left(\frac{4}{3}\right)^n$ и при $n \to \infty$ длина ломаной $l_n \to \infty$. Это означает, что кривая Коха имеет бесконечную длину.

Для сравнения: длина побережья зависит от масштаба карты; если побережье на карте имеет мелкое изображение (рис. 6), то на нём отражаются не все детали и длина будет одним каким-то числом; если изображение более крупное, то появятся дополнительные детали, ранее не отражённые на карте (небольшие острова, полуострова, мысы, поднимающиеся, опускающиеся части и т. д.). В этом случае длина побережья увеличивается; теоретически увеличение изображения и отражение на нём все новых и новых локальных элементов побережья можно вести до бесконечности, тем самым длина побережья будет возрастать и возрастать; отсюда совсем скоро можно прийти к выводу о бесконечности длины побережья.

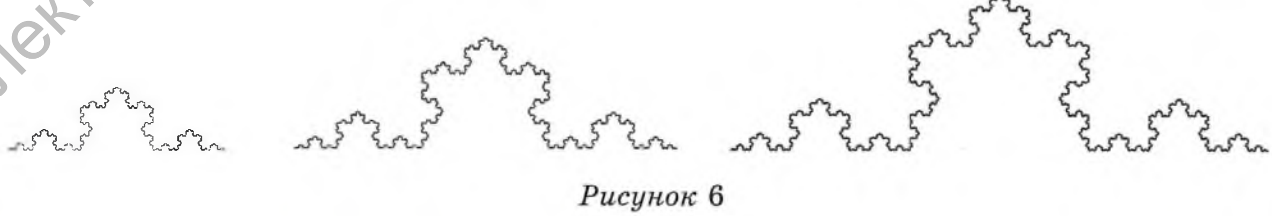


Рисунок 6

Рисунок 7

Об изломах кривой Коха. Наглядно видно, что кривая Коха «вся» состоит из изломов. Больше того, она имеет излом в каждой своей точке. Но что это значит? Ведь мы видим, что она состоит из маленьких отрезков, а в точках отрезка нет изломов. В самом деле: на каком-то шаге построений изломы будут не в каждой точке получаемой ломаной. Всё дело в том, что кривая Коха — это не ломаная, получаемая на каком-то конечном шаге её построения, а результат бесконечного процесса, когда $n \to \infty$. При этом условии, действительно, в каждой точке кривой Коха будет излом.

Дополнительные задания: а) Установите, что кривая Коха — ограниченная фигура и её можно расположить внутри прямоугольника. Найдите минимальные размеры этого прямоугольника; б) Имеет ли кривая Коха ось симметрии? в) Может ли кривая Коха иметь самопересечения? г) Если кривую Коха построить на сторонах равностороннего треугольника в его внешнюю область, то получим «снежинку Коха», постройте её; д) Несколько видоизменим процесс образования кривой Коха: вместо деления отрезка в отношении 1 : 1 : 1 воспользуемся золотым сечением φ : 1 : φ. Получим ли мы таким образом новый фрактал? Найдите его размерность Хаусдорфа — Безиковича.

3. Треугольник Серпинского — фрактал, один из аналогов множества Кантора, предложенный польским математиком Вацлавом Серпинским в 1915 г. Также известен как «салфетка Серпинского».

Построение фрактала. Построение треугольника Серпинского показано на рис. 7.

Нахождение размерности фрактала. Треугольник Серпинского — не сплошная плоская фигура (белые части выбрасываются, их будет становиться всё больше и больше, в любом сколь угодно малом чёрном треугольнике будет белая «дырка»). Можно смело предположить, что его размерность будет меньше обычного двумерного треугольника и иметь какое-то промежуточное значение между 1 и 2.

Найдём размерность Хаусдорфа для треугольника Серпинского. Пусть вначале имеем треугольник единичной площади. На первом этапе ($n = 1$) имеем 3 треугольника площадью $\frac{1}{4}$, на втором этапе ($n = 2$) — 9 треугольников площадью $\frac{1}{16}$ и т. д. Вообще, на n-м этапе мы имеем: 3^n треугольников, имеющих площадь $\frac{1}{4^n}$. Для расчёта размерности будем покрывать чёрную область фигуры треугольными плитками именно такой площади, какой получаются треугольники на каждом этапе. Данные треугольники хорошо подходят для покрытия и при стремлении номера этапа к бесконечности, их площадь стремится к 0. При этом линейный размер (длина стороны) e этих покрывающих треугольников будет пропорционален квадратному корню из их площади (для простоты, пусть e равно квадратному корню) и тоже стремиться к 0: $e = \sqrt{\frac{1}{4^n}} = \frac{1}{2^n}$. Составим искомое отношение:

$$\frac{\ln N(e)}{\ln \frac{1}{e}} = \frac{\ln 3^n}{\ln 2^n} = \frac{\ln 3}{\ln 2}.$$

Как и выше, получаем, что данное отношение не зависит от n и поэтому при $n \to \infty$ ($e \to 0$) искомая размерность $D = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1{,}58$. Итак, размерность Хаусдорфа — Безиковича для треугольника Серпинского действительно лежит в промежутке между 1 и 2, причём этот треугольник больше «тяготеет» к двумерной фигуре.

Замечание к способу нахождения размерности. Убедитесь, что к выводу размерности $D = \frac{\ln 3}{\ln 2}$ в этом случае также можно прийти на основании первого шага построения кривой Коха. Для этого этапа число частей $N = 3$, коэффициент подобия (общий при переходе от одной части к последующей) $e = \frac{1}{2}$.

Треугольники Серпинского и Паскаля. Если в треугольнике Паскаля все нечётные числа покрыть серым фоном, а чётные — белым, то образуется треугольник Серпинского (рис. 8).

4. Квадрат Серпинского — фрактал, один из двумерных аналогов множества Кантора, предложенный польским математиком Вацлавом Серпинским (рис. 9).

Построение фрактала. Исходный единичный квадрат разбивается на девять квадратов и удаляется квадрат, находящийся в центре (белые квадраты остаются, из них образуется фрактал, дырки имеют чёрный цвет); с оставшимися восьмью квадратами повторяются эти же действия и т. д.

Нахождение размерности фрактала. «Дырявый» квадрат превращается в своеобразное «геометрическое решето», но чёрные ячейки, быстро уменьшаясь, делаются настолько плотными, что по размерности квадрат Серпинского, возможно, приближается к обычной двумерной фигуре. Визуально можно заметить, что квадрат Серпинского менее «дырявый», чем треугольник Серпинского. Поэтому вправе ожидать, что его размерность будет не намного меньше размерности обычного двумерного квадрата.

Вычисления показывают, что это действительно так. Установим, что размерность Хаусдорфа — Безиковича квадрата Серпинского (рис. 9) равна: $D = \frac{\ln 8}{\ln 3} \approx 1{,}89$. Покрытие для квадрата Серпинского будем образовывать из его собственных квадратов (на каждом шаге его построения). Для $n = 1$ получаем $N_1 = 8$, $e_1 = \frac{1}{3}$; для $n = 2$ получаем $N_2 = 8^2$, $e_2 = \frac{1}{3^2}$; $n = 3$ получаем $N_3 = 8^3$, $e_3 = \frac{1}{3^3}$; ..., для n получаем $N_n = 8^n$, $e_n = \frac{1}{3^n}$; тогда $\frac{\ln N(e)}{\ln \frac{1}{e}} = \frac{\ln 8^n}{\ln\left(\frac{1}{1/3^n}\right)} = \frac{\ln 8}{\ln 3}$.

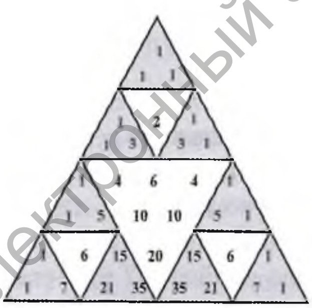


Рисунок 8

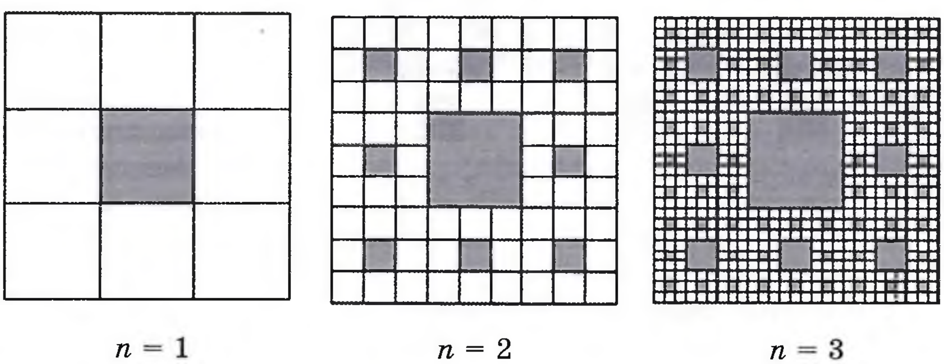


Рисунок 9

Это отношение не зависит от n, а потому при $n \to \infty$ ($e \to 0$) будем иметь $D = \frac{\ln 8}{\ln 3}$.

Замечание к способу нахождения размерности. Убедитесь, что к выводу размерности $D = \frac{\ln 3}{\ln 2}$ в этом случае также можно прийти на основании первого шага построения квадрата Серпинского. Для этого этапа число частей $N = 8$, коэффициент подобия (общий при переходе от одной части к последующей) $e = \frac{1}{3}$.

Последовательность площадей частей квадрата Серпинского. В связи с этим фракталом учащимся полезно предложить следующее задание: записать последовательность площадей остающихся частей квадрата, из которых образуется фрактал. С помощью вычислений приходим к следующей последовательности (нумерация шагов начинается с момента выполнения первой итерации): $\frac{8}{9}, \left(\frac{8}{9}\right)^2, \left(\frac{8}{9}\right)^3, \dots, \left(\frac{8}{9}\right)^n, \dots$.

Видно, что при $n \to \infty$ «остаточная» площадь квадрата $S_n \to 0$, что характерно для линии. Налицо двойственность: с одной стороны фрактал похож на линию ($S_n \to 0$), с другой стороны, его размерность близка к размерности обычной двумерной фигуры.

5. Пифагорово дерево. Впервые Пифагорово дерево построил А. Е. Босман (1891—1961) (рис. 10).

$n = 1$ $n = 2$ $n = 3$ $n = 4$

Рисунок 10

Построение фрактала. Зададим основу фрактала (в виде «домика» — квадрата и равнобедренного прямоугольного треугольника), но из неё ничего выбрасывать не будем. Напротив, эта основа повторяется до бесконечности с уменьшением её масштаба. В строящейся фигуре хорошо просматривается комбинация из прямоугольного треугольника и трёх квадратов, построенных на его сторонах. Эта комбинация называется «пифагоровыми штанами», по этой причине данный фрактал называется «дерево Пифагора».

Нахождение размерности фрактала. Можно высказать предположение, что этот фрактал сильно похож на двумерную фигуру евклидовой плоскости, составленную из квадратов и равнобедренных прямоугольных треугольников, хотя и выглядит внешне необычно. Итак, рискнём сделать предположение о том, что размерность Пифагорова дерева равна 2.

Для определения размерности воспользуемся первым этапом. Для него число частей $N = 2$ (один квадрат и один треугольник), коэффициент подобия (общий при переходе от одной части к последующей) $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (1 — сторона квадрата, а $\frac{1}{\sqrt{2}}$ — сторона катета равнобедренного прямоугольного треугольника). Предположение оправдывается:

$$D = \frac{\ln 2}{\ln\left(\frac{1}{1/\sqrt{2}}\right)} = \frac{\ln 2}{\ln\sqrt{2}} = \frac{\ln 2}{\frac{1}{2}\ln 2} = 2.$$

Замечание. Мы не представили первый фрагмент в виде «пифагоровых штанов», как это обычно делается. На наш взгляд представление его «домиком» удобнее для вычислений.

Дополнительные задания: а) Допустим, что предыдущий фрактал будем наращивать не только сверху, но и снизу (рис. 11). Останется ли он после этого фракталом? Изменятся ли его свойства? б) Установите, что существует, по крайней мере, один прямоугольник, стороны которого параллельны самому большому квадрату, охватывающий Пифагорово дерево полностью. Найдите такой прямоугольник наименьшей площади.

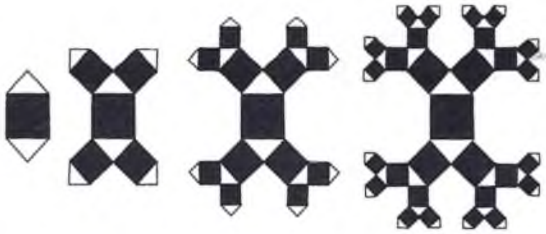


Рисунок 11

Пример алгебраического фрактала

Алгебраические фракталы названы так потому, что их получают с помощью алгебраических формул. Существует много методов получения алгебраических фракталов. Классическим примером алгебраического фрактала является **множество Мандельброта.**

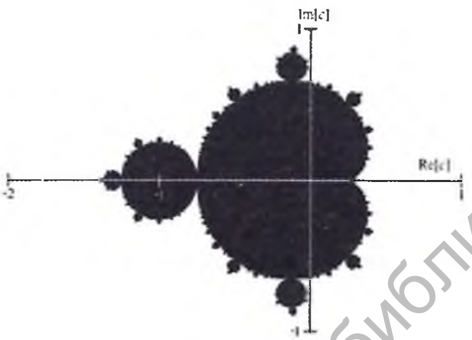


Рисунок 12

Множество Мандельброта есть множество точек c на комплексной плоскости, для которых последовательность z_n, определяемая итерациями

$$z_0 = 0,\ z_1 = z_0{}^2 + c,\ \ldots,\ z_{n+1} = z_n{}^2 + c,$$

конечна (т. е. не уходит в бесконечность). Визуально множество Мандельброта выглядит как набор бесконечного количества различных фигур, самая большая из которых называется *кардиоидой*. Кардиоида окружена всё уменьшающимися кругами, каждый из которых окружён ещё меньшими кругами, и т. д. до бесконечности. При любом увеличении этого фрактала будут выявляться всё более и более мелкие детали изображения, дополнительные ветки с более мелкими кардиоидами, кругами. И этот процесс теоретически продолжается бесконечно.

Для построения графического изображения множества Мандельброта можно использовать алгоритм, называемый *escape-time*. Суть его такова. Доказано, что всё множество целиком расположено внутри круга радиусом 2 на плоскости. Поэтому будем считать, что если для точки c последовательность итераций функции

$$f_c = z^2 + c$$

с начальным значением $z = 0$ после некоторого большого их числа N (скажем, 100) не вышла за пределы этого круга, то точка принадлежит множеству и красится в чёрный цвет. Соответственно, если на каком-то этапе, меньшем N, элемент последовательности по модулю стал больше 2, то точка множеству не принадлежит. Построение точек множества Мандельброта вручную затруднительно. В интернет-источниках существует большое число компьютерных программ для построения этого множества.

Известно, что размерность Хаусдорфа — Безиковича границы множества Мандельброта равна 2.

Пример стохастического фрактала

Рассмотренные выше примеры фракталов относятся к так называемым точным фракталам. Все они построены по определённому геометрическому или алгебраическому закону. Помимо точных фракталов, существуют ещё так называемые **случайные фракталы**. В расположении их элементов есть некоторая доля случайности. Особенно это характерно для природных объектов. Поэтому для их моделирования применяются стохастические (случайные) фракталы. Наиболее простым и типичным примером стохастических фракталов является траектория броуновского движения на плоскости или в пространстве. Случайные фракталы строятся с помощью рекурсивной процедуры, в которую на каждом шаге вводится случайный параметр.

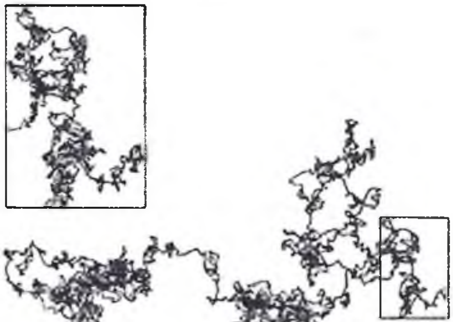


Рисунок 13 — Траектория движения броуновской частицы

Броуновское движение. Простейшим случайным фракталом является траектория частицы, совершающей броуновское движение (рис. 13). Броуновское движение — беспорядочное движение микроскопических видимых взвешенных в жидкости или газе частиц твёрдого вещества, вызываемое тепловым движением частиц жидкости или газа. Было открыто в 1827 г. Робертом Броуном. Броуновское движение наглядно подтверждает хаотическое тепловое движение атомов и молекул, являющееся фундаментальным положением молекулярно-кинетической теории. И хотя сама траектория имеет сложный и хаотичный характер, определить её фрактальную размерность очень просто. Для этого заметим, что если частица продиффундировала на расстояние R, то среднее число шагов, которое она сделала $N \approx \frac{R^2}{l^2}$, где l — характерная длина одного шага. Поэтому

$$\frac{\ln N}{\ln(1/l)} = \frac{\ln \frac{R^2}{l^2}}{\ln \frac{1}{l}} = 2\left(1 - \frac{\ln R}{\ln l}\right).$$

Учтём, что при $l \to 0$: $\ln l \to -\infty$ и R — некоторая неотрицательная величина, $\frac{\ln N}{\ln(1/l)} \to 2$. Получаем, что размерность Хаусдорфа — Безиковича броуновского движения $D = 2$. Такую же размерность имеют обычные двумерные фигуры. Этот факт говорит о том, что траектория броуновской частицы на плоскости является очень «густой».

Броуновское движение находит разнообразные практические приложения: с помощью его Мандельброт предсказал цены на шерсть, оно находит применение при создании фрактальной музыки, карт линий побережья, островов, фрактальных изображений ландшафтов.

Примеры мультифракталов

Мультифрактал — комплексный фрактал, который получается с помощью не одного какого-либо алгоритма построения, а нескольких последовательно сменяющихся

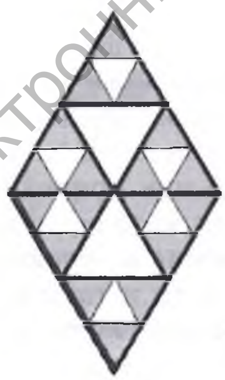


Рисунок 14

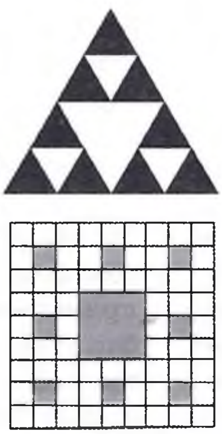


Рисунок 15

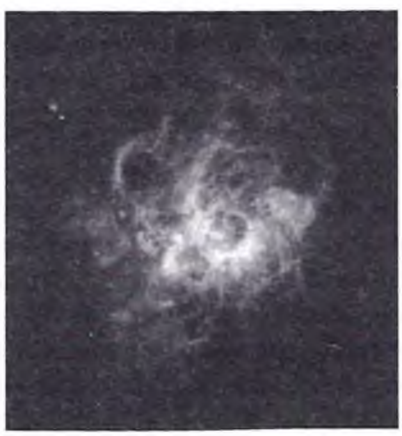


Рисунок 16

алгоритмов. Каждый фрактал, входящий в мультифрактал, может иметь свою фрактальную размерность. На рисунке 14 приведён мультифрактал, составленный из двух треугольников Серпинского, на рисунке 15 мультифрактал «дважды фрактальный домик», состоящий из двух фракталов Серпинского разной размерности. Большинство природных фракталов являются **мультифракталами. Мультифракталы** применяются при описании структуры неоднородных звёздных скоплений в астрофизике (рис. 16), при исследовании клеточных элементов крови в биологии, для характеристики усталостного разрушения материалов в физике металлов.

Некоторые выводы

Первым признаком фракталов является самоподобие, бесконечность процесса образования подобных фрагментов. Вторым признаком является размерность фракталов. Наиболее простой и доступной является размерность Хаусдорфа — Безиковича. Именно этот вид размерности принят в качестве основного в работах Б. Мандельброта. Самым наглядным и доступным видом фракталов являются геометрические фракталы. Алгебраические фракталы могут быть рассмотрены на уроках информатики с привлечением компьютерных программ их визуализации. Кроме того, может быть введено понятие стохастического фрактала (на примере броуновского движения), а также понятие мультифрактала.

В статье отобраны наиболее простые примеры фракталов, доступные учащимся старших классов средней школы. Использованы приёмы развития интуиции учащихся, связанной с фрактальными размерностями. В этих целях широко используется сравнение фрактальной размерности с обычной (топологической) размерностью. Из этих же соображений в статье больше внимания уделяется геометрическим фракталам и визуализации других видов фракталов.

Вопрос о включении фракталов в основной курс математики средней школы пока преждевременный. Фракталы дают методы решения совсем других проблем, отличных от традиционных. Если фракталы включать в школьный курс математики, то традиционному содержанию придётся потесниться. Никто к этому пока не готов. А вот ознакомление с фракталами на факультативных занятиях, спецкурсах в лицеях, для организации учебно-исследовательской работы учащихся, через вузовские курсы математики и информатики — весьма перспективно. В настоящее время к фракталам, пожалуй, больше «расположена» не математика, а информатика. Актуальной проблемой представляется разработка примеров учебного характера, показывающих конкретные результаты применения фракталов в качестве метода моделирования, метода предсказания поведения природных фрактальных объектов, разъясняющих учащимся, зачем нужны фракталы.

Отметим, что разработку фракталов в образовательных целях в Республике Беларусь ведёт доктор физико-математических наук В. А. Шлык [9–15]. Непосредственное отношение к проблемам образования имеют следующие работы этого учёного: Фракталы: первые уроки // Матэматыка : праблемы выкладання. — 2006. — № 5. — С. 55–61; Фракталы в абстрактном искусстве и дизайне // Известия Челябинского научного центра УрО РАН. — 2004. — № 1. — С. 231–244; Фрактальная геометрия: спецкурс для математиков // Математика. Компьютер. Образование : сб. науч. тр. под ред. Г. Ю. Ризниченко, М. : Прогресс-Традиция, 2000. — Вып. 7. — Ч. 1. — С. 34–41; Через фрактальную геометрию к новому восприятию мира // Матэматыка : праблемы выкладання. — 2003. — № 4. — С. 86–107.

Существуют первые предложения о включении фракталов в содержание математического образования [5; 6; 8; 11].

Для самообразования учителя приводим подробный список публикаций.

Литература

1. *Мандельброт, Б.* Фрактальная геометрия природы / Б. Мандельброт. — М. : Институт компьютерных исследований, 2002. — 656 с.

2. *Балханов, В. К.* Основы фрактальной геометрии и фрактального исчисления / отв. ред. Ю. Б. Башкуев. — Улан-Удэ : Изд-во Бурятского госуниверситета. 2013. — 224 с.

3. *Божокин, С. В.* Фракталы и мультифракталы / С. В. Божокин, Д. А. Паршин. — Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. — 128 с.

4. *Кириллов, А. А.* Повесть о двух фракталах [Электронный ресурс] / А. А. Кириллов : 2-е изд. — М. : МЦНМО, 2010. — 180 с. — Режим доступа: https://www.mccme.ru/free-books/dubna/kirillov.pdf. — Дата доступа: 02.12.2019.

5. *Колесников, А. В.* Повышение эффективности образования в вузе. Компьютеризация, когнитивный подход и организационное совершенствование : монография / А. В. Колесников. — Минск : БИП-С Плюс, 2009. — 256 с.

6. *Колесников, А. В.* Элементы фрактальной геометрии в общенаучной подготовке студентов и школьников / А. В. Колесников, С. Н. Сиренко // Информатизация образования. — 2010. — № 1. — С. 17–34.

7. *Морозов, А. Д.* Введение в теорию фракталов / А. Д. Морозов. — М.–Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2002. — 160 с.

8. *Старцева, Е. В.* Фракталы и их приложения для учащихся старших физико-математических классов [Электронный ресурс] / Е. В. Старцева. — МПГУ, кафедра физики для естественных факультетов. — Режим доступа: http://old.mpgu.edu/kafedry/fiz_est.htm. — Дата доступа: 02.12.2019.

9. *Шлык, В. А.* В защиту «Хаоса», фрактальной геометрии, Бенуа Мандельброта и Анри Пуанкаре [Электронный ресурс] / В. А. Шлык // Педагогические и информационные технологии в образовании. 2002. — № 5. — 5 с. — Режим доступа: http://scholar.urc.ru:8002/ped_journal. — Дата доступа: 02.12.2019.

10. *Шлык, В. А.* Компьютерная демонстрация связи множеств Мандельброта и Жюлиа / В. А. Шлык, А. Г. Бокова, А. С. Врублевский // Математика, компьютер, образование : материалы III Междунар. конф., Дубна, 29 янв.–2 февр. 1996 г. — М. : 1996. — С. 324–328.

11. *Шлык, В. А.* Фракталы: первые уроки / В. А. Шлык // Матэматыка : праблемы выкладання. — 2006. — № 5. — С. 55–61.

12. *Шлык, В. А.* Фракталы в абстрактном искусстве и дизайне / В. А. Шлык // Известия Челябинского научного центра УрО РАН. — 2004. — № 1. — С. 231–244.

13. *Шлык, В. А.* Фрактальная геометрия: спецкурс для математиков / В. А. Шлык // Математика. Компьютер. Образование : сб. науч. тр. под ред. Г. Ю. Ризниченко. — М. : Прогресс-Традиция, 2000. — Вып. 7. — Ч. 1— С. 34–41.

14. *Шлык, В. А.* Фрактальные формы в абстрактном искусстве / В. А. Шлык // PRO дизайн в десятый раз : альманах. — Минск : ОО «Бел. союз дизайнеров», 2004. — Вып. 10. — С. 16–18.

15. *Шлык, В. А.* Через фрактальную геометрию к новому восприятию мира / В.А. Шлык // Матэматыка : праблемы выкладання. — 2003. — № 4. — С. 86–107.

16. 3d Fractals [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http://www.fractals.nsu.ru. — Дата доступа: 02.12.2019.

17. Фрактальная геометрия природы [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http://www.multifractal.narod.ru. — Дата доступа: 02.12.2019.