Н.П. Морозов

О ПРИВЕДЕНИИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ СИСТЕМ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

В [1] показано, что любая полиномиальная система

$$\dot{x} = P(x, y), \dot{y} = Q(x, y)$$

может быть представлена в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial y}(x, y) + x\overline{\sigma}(x, y) \\ \dot{y} = -\dfrac{\partial H}{\partial x}(x, y) + y\overline{\sigma}(x, y) \end{cases}, \qquad (1)$$

где $H(x, y) = \sum_{k=1}^{n} H_{k+1}(x, y)$, $H_{k+1}(x, y) = \dfrac{yP_k(x, y) - xQ_k(x, y)}{k+1}$,

$\overline{\sigma}(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \overline{\sigma}_{k-1}(x, y)$, $\overline{\sigma}_{k-1}(x, y) = \dfrac{1}{k+1}\left(\dfrac{\partial P_k(x, y)}{\partial x} + \dfrac{\partial x Q_k(x, y)}{\partial y}\right)$,

$P(x, y) = \sum_{k=1}^{n} P_k(x, y)$, $Q(x, y) = \sum_{k=1}^{n} Q_k(x, y)$, $P_k(x, y)$, $Q_k(x, y)$ – однородные многочлены. В [2] изучен частный случай квадратичной гамильтоновой системы. В данной работе показано, в частности, как общий случай приводится к рассмотренному ранее. Доказано:

1) система (1) инвариантна относительно невырожденного линейного преобразования $x = \alpha u + \beta\upsilon$, $y = \gamma u + \delta\upsilon$ и приводится к виду

$$\Delta\dot{u} = \frac{\partial H}{\partial \upsilon}(u,\upsilon) + \Delta u\bar{\sigma}(\alpha u + \beta\upsilon, \gamma u + \delta\upsilon),$$

$$\Delta\dot{\upsilon} = -\frac{\partial H}{\partial u}(u,\upsilon) + \Delta\upsilon\bar{\sigma}(\alpha u + \beta\upsilon, \gamma u + \delta\upsilon), \Delta = \alpha\delta - \gamma\beta \neq 0;$$

2) коэффициенты гамильтониана после преобразования, выражаются через исходные коэффициенты и α, β, γ, δ следующим образом:

$\bar{H}(u,\upsilon) = H(\alpha u + \beta\upsilon, \gamma u + \delta\upsilon) = \sum_{k=1}^{n} \bar{H}_{k+1}(u,\upsilon)$, где $\bar{H}_{k+1}(u,\upsilon) = \frac{1}{(k+1)!}\cdot$

$\cdot\left(\bar{b}_{k0}u^{k+1} + \bar{a}_{0k}\upsilon^{k+1} + \sum_{m=1}^{p} h_m u^{k-m+1}\upsilon^m + \sum_{m=p+1}^{k} q_m \upsilon^{k-m+1}u^m\right)$, если $k = 2p - 1$ и

$\bar{H}_{k+1}(u,\upsilon) = \frac{1}{(k+1)!}\left(\bar{b}_{k0}u^{k+1} + \bar{a}_{0k}\upsilon^{k+1} + \sum_{m=1}^{p} h_m u^{k-m+1}\upsilon^m + \sum_{m=p+1}^{k} q_m \upsilon^{k-m+1}u^m\right)$, если $k = 2p$. Здесь $\bar{b}_{k0} = H_{k+1}(\alpha,\gamma)$, $\bar{a}_{0k} = H_{k+1}(\beta,\delta)$, $h_m = \frac{1}{m}\left(\beta\frac{\partial}{\partial\alpha} + \delta\frac{\partial}{\partial\gamma}\right)^m H_{k+1}(\alpha,\gamma)$,

$q_m = \frac{1}{m}\left(\alpha\frac{\partial}{\partial\beta} + \gamma\frac{\partial}{\partial\delta}\right)^m H_{k+1}(\beta,\delta)$;

3) в частности, линейное преобразование $x = \alpha u + k\left(\frac{\mu_{00}}{2}\alpha + a_{01}\gamma\right)\upsilon$,

$y = \gamma u + k\left(b_{10}\alpha - \frac{\mu_{00}}{2}\gamma\right)$, $\Delta = -2kH_2(\alpha,\gamma) \neq 0$, с произвольными α, γ, преобразует $H_2(x,y) = \frac{1}{2}(-b_{10}x^2 + \mu_{00}xy + a_{01}y^2)$ к виду $\bar{H}_2(u,\upsilon) = \frac{1}{2}(u^2 + (signD)\upsilon^2)$,

$D = -\frac{1}{4}\mu_{00}^2 - a_{01}b_{10} \neq 0, k = -\frac{1}{\sqrt{|D|}}$. Произвол в выборе α и γ можно использовать для некоторых упрощений $\bar{H}(u,\upsilon)$.

Литература

1. *Морозов, Н.П.* Об одном преобразовании полиномиальных систем / Н.П. Морозов // Материалы научно-методической конференции преподавателей и сотрудников по итогам научно-исследовательской работы в 2009 г. (3-4 февраля 2010 г.). – Могилев: УО "МГУ им. А.А. Кулешова", 2010. – С. 123–124.

2. *Морозов, Н.П.* Об одном подходе к исследованию полиномиальных систем / Н.П. Морозов // Тезисы докладов Международной конференции Пятые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – Минск, 2010. – С. 36–37.