УДК 517.925.42

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФУНКЦИИ ДЮЛАКА-ЧЕРКАСА ПРИ РЕШЕНИИ ПРОБЛЕМЫ КОППЕЛЯ ДЛЯ КВАДРАТИЧНЫХ СИСТЕМ 2F+S∞

Автор: Сидоренко Иван Николаевич, доцент кафедры алгебры, математического анализа и дифференциальных уравнений.

Контактная информация: тел.: (80222) 30 67 06, +375 29 746 64 70, эл.почта: sidorenkoin@tut.by.

Описание: *В работе предложен новый метод построения функции Дюлака-Черкаса в виде многочлена второй степени для оценки единственности предельного цикла. Проведен численный эксперимент, подтверждающий справедливость гипотезы Коппеля для достаточно широкого класса квадратичных систем* $2F+S_{\infty}$ *с негрубым фокусом.*

Description: *A new method of constructing functions of Dulac-Cherkas as a polynomial of second degree to assess the uniqueness of the limit cycle is proposed. The numerical experiment confirming the validity of Coppel's hypothesis for sufficiently broad class of quadratic systems $2F + S_\infty$ with a weak focus has been held.*

Область применения разработки: Образование.

Внедрение (планируемое внедрение) разработки: Учреждение образования «Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова», 2014 г.

Основные преимущества разработки: Основным преимуществом является разработка нового метода построения функций Дюлака-Черкаса в виде многочлена второй степени, который не использует решение задачи линейного программирования. Метод позволяет повысить скорость построения функции Дюлака-Черкаса и уменьшить вычислительные затраты.

Рассмотрим квадратичную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i+j=0}^{2} a_{ij} x^i y^j \equiv P(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=0}^{2} b_{ij} x^i y^j \equiv Q(x,y), \qquad (1)$$

где $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}$. В общем случае система (1) имеет 12 параметров. Класс квадратичной системы будем определять по конфигурации особых точек. Так, например, фраза «система принадлежит классу $2F + N_\infty + 2S_\infty$», означает, что квадратичная система имеет в конечной части плоскости две особые точки, которые являются фокусами ($2F$), а на бесконечности один узел (N_∞) и два седла ($2S_\infty$).

Интересной является задача выделения подкласса квадратичных систем, имеющих во всей фазовой плоскости не более одного предельного цикла. Коппелем [2] выдвинута следующая

Гипотеза. *Если квадратичная система содержит негрубую особую точку* (x_0, y_0), *т.е. особую точку, в которой* $div\,(x_0, y_0) = 0$, *то в этой системе существует не более одного предельного цикла, не окружающую эту особую точку. Причем, если такой цикл существует, то он является грубым.*

Основная цель данной работы состоит в проверке гипотезы Коппеля для квадратичных систем класса $2F+S_\infty$ с помощью построения функции Дюлака-Черкаса в виде многочлена второй степени.

Предварительные результаты и теоремы

Для точной оценки числа предельных циклов будем строить функцию Дюлака-Черкаса.

Определение. [10] *Функция* $\Psi(x,y)$ *называется функцией Дюлака-Черкаса для системы* (1) *в области* $\Omega \subset R^2$, *если существует такое* $k \in R$, $k \neq 0$, *что справедливо неравенство*

$$\Phi = k\Psi div(\mathrm{X}) + \frac{\partial \Psi}{\partial x} P + \frac{\partial \Psi}{\partial y} Q > 0(<0), \forall (x,y) \in \Omega, \qquad (2)$$

где $\mathrm{X} = (P, Q)$.

Теорема 1. [10] *Пусть в односвязной области* $\Omega \subset R^2$ *система* (1) *имеет единственную особую точку – антиседло A,* $div\, f(A) \neq 0$, $f = (P, Q)$. *Пусть также функция* $\Psi(x,y) \in C^1(\Omega)$ *при некотором значении* $k \in R$, $k < 0$, *удовлетворяет условию* (2), *при этом уравнение* $\Psi(x,y) = 0$ *определяет гнездо из q вложенных друг в друга овалов. Тогда в каждой* q–1 *из двусвязных областей, ограниченных соседними овалами, система* (1) *имеет точно один предельный цикл, а в целом в области* Ω *она имеет не более q предельных циклов.*

Для системы Льенара функцию $\Psi(x,y)$ можно искать в виде многочлена относительно y степени n-1 с коэффициентами, являющимися многочленами относительно x, такую, что соответствующая функция Ф зависит только от x. Функция Ф при этом имеет вид

$$\Phi = \Phi(x,C) = -kf\Psi_n - g\Psi_{n-1} - F\Psi'_{n-2} \quad (3)$$

и является линейной комбинацией полиномов, то есть

$$\Phi = \Phi(x,C) = \sum_{j=1}^{n} C_j \Phi_j(x). \quad (4)$$

Линейная зависимость функции Ф от дополнительных переменных C_j, j=1,…,m, позволяет находить максимин (5) с помощью решения соответствующей задачи линейного программирования [10]

$$L \to \max, \sum_{j=1}^{n} C_j \Phi_j(x_p, y_p) \geq 0, |C_j| \leq 1, \quad (5)$$

на сетке узлов (x_p, y_p), p = 1,…,N_0, взятой в области Ω.

Проблема Коппеля

Сформулируем некоторые основные результаты, известные на данный момент о гипотезе Коппеля:

1) гипотеза полностью подтверждается в случае, если квадратичная система содержит четыре особые точки [4, 5];

2) квадратичная система, имеющая сложную особую точку, в которой дивергенция равна 0, имеет, по крайней мере, один предельный цикл, не окружающий эту особую точку [9];

3) если квадратичная система имеет в конечной части плоскости точно три особые точки, две из которых являются негрубыми фокусами, то вокруг одного из этих фокусов система имеет, по крайней мере, один предельный цикл [3];

4) квадратичные системы вида $2F+2S_\infty+N_\infty$ и $2F+2S+N_\infty$, имеющие один негрубый фокус, вокруг второго фокуса имеют не более одного предельного цикла [6, 7].

Таким образом, гипотезу Коппеля остается доказать для следующих классов квадратичных систем: $F+S$; $2F+S_\infty$.

Если в квадратичной системе класса $F+S$ две особые точки являются негрубыми, то в этом случае предельных циклов нет [9]. Если же только седло негрубое, то существуют примеры подтверждения гипотезы Коппеля, однако для таких систем не всегда возможно построение функции Дюлака-Черкаса, так как седло может находиться очень близко к фокусу.

Будем рассматривать квадратичные системы $2F+S_\infty$. В общем случае, с помощью аффинных преобразований переменных и растяжения шкалы времени квадратичная система (1) может быть приведена [1] к виду

$$\frac{dx}{dt} = 1 + xy, \ \frac{dy}{dt} = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy + a_{20}x^2 + ay^2. \quad (6)$$

При выполнении условий

$$a_{00} = a_{01} + a_{11} - a_{10} - a_{20} - a, \ L = 2a - a_{01} - a_{10} - 2a_{20} > 0, \ (a_{11} + a_{01} - 2a - 1)^2 - 4L < 0,$$

$$a_{10} = -a_{20}(x_0 + 1) - a_{01}/x_0 + a(x_0 + 1)/x_0^2, \ x_0 \neq 0 \quad (7)$$

система (7) имеет в конечной части плоскости два фокуса: $A(1, -1)$ и $B(x_0, -1/x_0)$, $x_0 < 0$, дивергенция в котором равна 0.

Вместо коэффициентов системы (6) удобно взять параметры a, d, x_0 где d – дивергенция поля в фокусе $A(1, -1)$. Тогда для коэффициентов системы (6) выполняются следующие условия

$$a_{01} = \frac{dx_0}{x_0 - 1} + \frac{2a-1}{x_0(x_0+1)},\ a_{11} = -\frac{d}{x_0-1} - \frac{2a+1}{x_0},\ a_{10} = -\frac{d}{x_0-1} - a_{20}(x_0+1) - \frac{a+1}{x_0^2(x_0+1)},$$

$$a_{20} = \min\left[\frac{\left(x_0^2 d + (a+1)(x^2-1)\right)^2}{4ax_0^3(x_0-1)^2}, \frac{\left(dx_0 + (2a+1)(x_0-1)\right)^2}{4(a-1)x_0^2(x_0-1)^2}\right] - \omega, \tag{8}$$

$\omega > 0,\ 0 < a < 1,\ x_0 < 0,\ d \neq 0$.

При $d > 0$ фокус $A(1, -1)$ неустойчив, и траектории системы (6), начинаясь на прямой $x = 0$, при возрастании времени входят в полуплоскость $x > 0$. В этом случае получаем, что вокруг фокуса $A(1, -1)$ имеется нечетное количество предельных циклов. Не ограничивая общности, рассмотрим этот случай, так как при $d < 0$ система исследуется аналогично. Для доказательства единственности предельного цикла вокруг фокуса $A(1, -1)$ системы (6) с помощью преобразования

$$x = 1/\tilde{x},\ y = \tilde{x}^{(-a)}\tilde{y} - \tilde{x}$$

и растяжение шкалы времени переводит в систему Льенара, которая после замены $\tilde{x}$ на x, $\tilde{y}$ на y имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = y - F(x),\ \frac{dy}{dt} = -g(x), \tag{9}$$

где $g(x) = P_4(x)x^{2a-3}$, $P_4(x) = a_{20} + a_{10}x + (a_{00} - a_{11})x^2 - a_{01}x^3 + ax^4$,

$$f(x) = P_2(x)x^{a-2},\ P_2(x) = a_{11} + a_{01}x - (2a+1)x^2,\ F(x) = \int_1^x f(t)\,dt = \tilde{P}_2(x)x^{a-1} - \tilde{P}_2(1),$$

$$G(x) = \int_1^x g(t)\,dt = \tilde{P}_4(x)x^{2(a-1)} - \tilde{P}_4(1),\ x > 0.$$

Функции Дюлака-Черкаса для системы (9) будем искать в виде многочлена 2-ой степени [8], т.е. функция Ф(4) при $n = 3$ представима в виде

$$\Phi = \Phi_1 C_1 + \Phi_2 C_2 + \Phi_3 C_3.$$

Не ограничивая общности рассуждений, можно положить $C_3 = 1$. Для нахождения значений C_1, C_2, при которых функция Ф будет положительно определенной найдем кривую двукратных нулей функции $\Phi(x, C_1, C_2)$, для этого необходимо найти решение системы

$$\Phi(x, C_1, C_2) = 0,\ \Phi'_x(x, C_1, C_2) = 0. \tag{10}$$

Вычисления показывают, что кривая двукратных нулей функции $\Phi(x, C_1, C_2)$ имеет петлю, внутри которой функция Ф является положительной. Выберем на петле две точки ξ_1 и ξ_2, соединив которые можно найти точку $\xi^*(C_1^*, C_2^*)$ внутри петли. Таким образом, можно найти условия, при которых функция Ф будет положительной. Это замечание и доказывает единственность предельного цикла вокруг $A(1, -1)$, т. к. уравнение $\Psi(x) = 0$ определяет при $x > 0$ единственную кольцеобразную область.

По алгоритму, описанному выше, был проведен численный эксперимент и получены следующие результаты.

Теорема 2. *Квадратичные системы* (6) *при выполнении условий* (7), (8) *с* $(a, x_0, d) \in M$ *где* M *– декартово произведение множеств вида*

$$M = A \times X_0 \times D,\ A = \left\{ 1/5, \ldots, 9/5 \right\},$$

$$X_0 = \{-10, -7.5, \ldots, -1, -0.75, .., -0.1, -0.075, \ldots, -0.01\}, D = \{0.01,\ 0.025, \ldots, 5\}$$

имеют вокруг фокуса $A(1, -1)$ *единственный предельный цикл.*

В работе предложен метод построения функции Дюлака-Черкаса для оценки единственности предельного цикла квадратичной системы в виде многочлена второй степени. Причем при построении функции Дюлака-Черкаса не требуется решать задачу линейного программирования. Использование такого метода построения функции Дюлака-Черкаса позволило провести численный эксперимент, подтверждающий справедливость гипотезы Коппеля для достаточно большого набора квадратичных систем $2F+S_\infty$ с негрубым фокусом.

Список использованных источников:

1. **Artes, J. C.** Quadratic systems with limit cycles of normal size / J. C. Artes, L. A. Cherkas, J. Llibre // Buletinue Academiee de stiinte a Republicii Moldova. – 2003. – Vol. 41, N 1. – P. 31–46.

2. **Coppel, W. A.** A new class of quadratic systems / W.A. Coppel // J. Diff. Equations. – 1991. – Vol. 92. – P. 360–372.

3. **Huang, X.** On the limit cycle distribution over two nests in quadratic systems / X. Huang, J. W. Reyn // Bull. Austral. Math. Soc. – 1995. – Vol. 52. – P. 461–474.

4. **Kooij, R. E.** The distribution of limit cycles in quadratic systems with four finite singularities / R. E. Kooij, A. Zegeling // J. of Differential Equations. – 1999. – Vol. 151. – P. 373–385.

5. **Kooij, R. E.** Uniqueness of limit cycles in polynomial systems with algebraic invariants / R. E. Kooij, A. Zegeling // Bull. Austral. Math. Soc. – 1994. – Vol. 49. – P. 7–20.

6. **Pingguang, Z.** A quadratic system with weak focus and strong focus / Z. Pingguang, L. Wenhua // Ann. Differential Equations. – 1992. – Vol. 8, № 1. – P. 122–128.

7. **Pingguang, Z.** On the distribution and number of limit cycles for quadratic systems with two foci / Z. Pingguang // Qualitative theory of dynamical systems. – 2002. – Vol. 3 – P. 437–463.

8. **Сидоренко, И. Н.** О предельных циклах квадратичной системы с негрубым фокусом / И. Н. Сидоренко // XV Международная научная конференция по дифференциальным уравнения (ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–2013): тез. докладов. Гродно, 13 – 16 мая 2013 г. – Минск : ИМ НАН Беларуси, 2013. – С. 65–66.

9. **Черкас, Л. А.** Предельные циклы двумерных автономных систем с полиномиальными правыми частями : дис. … д-ра физ-мат наук: 01.01.02 / Л.А. Черкас. – Минск, 1987. – 243с.

10. **Черкас, Л. А.** Функция Дюлака полиномиальных автономных систем на плоскости / Л. А. Черкас // Дифференциальные уравнения. – 1997. – Т. 33, №5. – С. 689–699.