УДК 517.925.42

ТОЧНАЯ ОЦЕНКА ЧИСЛА ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ СИСТЕМ ЛЬЕНАРА С ЧЕТЫРЬМЯ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ

И. Н. Сидоренко
(Учреждение образования «Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова», кафедра программного обеспечения информационных технологий)

Рассматривается система Льенара с четырьмя особыми точками в конечной части плоскости. Предложен алгоритм построения систем с заданным распределением предельных циклов «нормального размера». Получены системы со следующими распределениями предельных циклов (2,0),0), ((1,1),1), (0,0),2). Доказательство точности полученных распределений производится с помощью построение соответствующих функций Дюлака–Черкаса.

1. Введение. Рассматривается семейство систем Льенара

$$\frac{dx}{dt} = y,\ \frac{dy}{dt} = g\left(x\right) - f\left(x\right) y, \qquad (1)$$

где $g(x) = x(1-x)(1-Lx)(1+Mx)$, $0 < L < 1$, $M > 0$, а $f(x)$ – второй степени.

Целью работы является оценка максимального количества предельных циклов с помощью построение прогнозной функции предельных циклов.

2. Предварительные результаты

Система (1) также может быть записана в виде

$$\frac{dx}{dt} = y - F\left(x\right), \frac{dy}{dt} = -g\left(x\right). \qquad (2)$$

С. Смейл в своей работе [3] поддержал гипотезу, выдвинутую в работе [2] о том, что система Льенара (2) в случае $g(x) = x$, а $F(x)$ – полином степени $2k + 1$ и $F(0) = 0$, может иметь не более k предельных циклов вокруг антиседла $O(0,0)$.

Мы предлагаем следующее уточнение гипотезы Смейла [5], которое будет использовано для получения прогнозного числа предельных циклов.

Гипотеза 1. *В пространстве параметров системы* (2) *с* $g(x) = x$ *существует область* Ω, *в которой число предельных циклов системы* (2) *не превосходит количества* m *нулей нечетной части функции* $F(x)$, *т. е. положительных нулей функции*

$$\varphi(x) = F(x) - F(-x), \tag{3}$$

а также внутри Ω *существует подобласть, в которой это число равно* m.

Система Льенара (1) примечательна тем, что все ее особые точки принадлежат оси Ox.

Определение 1. *Пусть система Льенара* (1) *имеет антиседло* $A(x_0,0)$. *Обозначим, через* ξ_1 (ξ_2) – *абсциссу ближайшей слева (справа) к точке A особой точки, если слева (справа) особых точек нет, то считаем* $\xi_1 = -\infty(\xi_2 = +\infty)$. *Системой прогноза вокруг особой точки* $A(x_0,0)$ *для системы Льенара (1) будем называть систему*

$$F(\eta) = F(\mu),\ G(\eta) = G(\mu), \tag{4}$$

где $F(\eta) = \int\limits_{x_0}^{\eta} f(x)dx$,

$G(\mu) = \int\limits_{x_0}^{\mu} g(x)dx$,

$\xi_1 < \eta < x_0$,

$x_0 < \mu < \xi_2$.

Для точной оценки числа предельных циклов будем использовать функцию Дюлака–Черкаса.

Определение. *Функция* $\Psi(x,y) \in C^1(\Omega)$ *называется функцией Дюлака–Черкаса для системы*

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y),\ \frac{dy}{dt} = Q(x,y), \tag{5}$$

$$P(x,y), Q(x,y) \in C^1(\Omega),$$

в области, если существует такое действительное число $k \neq 0$, *что справедливо неравенство*

$$\Phi = k\Psi\ div\,\varphi + \frac{\partial\Psi}{\partial x}P + \frac{\partial\Psi}{\partial y}Q > 0(<0),\ \forall(x,y) \in \Omega,\ \varphi = (P,Q). \tag{6}$$

Справедлива

Теорема 1. [4] *Пусть в односвязной области* $\Omega \in R^2$ *система* (5) *имеет единственную особую точку – антиседло A,* $div\,\varphi(A) \neq 0$, $\varphi = (P,\ Q)$. *Пусть также для системы* (1) *существует функция Дюлака–Черкаса* $\Psi(x,y) \in C^1(\Omega)$, *при этом уравнение* $\Psi(x,y) = 0$ *определяет гнездо из q вложенных друг в друга овалов. Тогда в каждой из* $q-1$ *двусвязных областей, ограниченных соседними овалами, система* (5) *имеет точно один предельный цикл, а в целом в области* Ω *не более* q *предельных циклов.*

3. Оценка количества предельных циклов

Отметим некоторые общие результаты, полученные в ходе исследования. Так, данная система имеет в конечной части плоскости только 4 особые точки и все они являются простыми, то справедлива

Теорема 2. *Система* (1) *не имеет предельных циклов, рождающихся из бесконечности и окружающих все состояния равновесия.*

Доказательство: Все особые точки систем Льенара вида (1) располагаются на оси Ox, при этом происходит чередование сёдел и антисёдел, индекс Пуанкаре для антисдела равен «+1», для седла – «–1». Как известно, предельные циклы могут существовать только вокруг особых точек с суммарным индексом равным +1. Откуда и следует утверждение теоремы.

Из теоремы 2 следует, что при построении функции Дюлака–Черкаса для доказательства единственности или отсутствия предельных циклов, окружающих группу особых точек, достаточно исследовать область между «большой петлёй» «внешнего» седла и «восьмёркой», полученной сепаратрисами «внутреннего» седла (рисунок).

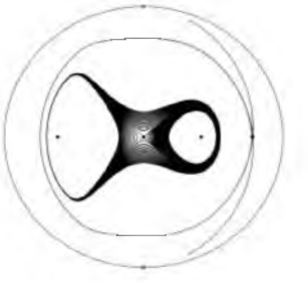

Рисунок 1. – Фазовый портрет системы (1)

Теорема 3. *Если особые точки* S_1 (0,0), S_2 (1/M,0) *являются седлами системы* (1), *причем* S_1 *находится между двумя антиседлами и*

$$G(0) > G(1/M),$$

то система (1) *не имеет предельных циклов окружающих группу особых точек.*

Литература

1. Hilbert, D. Mathematische probleme. English transl / D.Bull. Amer. Math. Soc. –1902. – Vol. 8. – P. 437–479.

2. Lins Neto, A. On Liénard equations / A. Lins Neto, W. de Melo, C. C. Pugh // Proc. Symp. Geom. and Topol., Springer Lectures Notes in Mathematics. – 1977. – Vol. 597. – P. 335–357.

3. Smale, S. Mathematical problem for the next century / S. Smale // Math. Intelligencer. – 1998. – Vol. 20. – P. 7–15.

4. Черкас, Л. А. Конструктивные методы исследования предельных циклов автономных систем второго порядка (численно-алгебраический подход / Л. А. Черкас, А. А. Гринь, В. И. Булгаков ; Учреждение образования «Гродненский гос. ун-т им. Я. Купалы». – Гродно : ГрГУ, 2013. – 489 с.

5. Сидоренко, И. Н. Предельные циклы «нормального размера», окружающие группу особых точек систем Льенара с симметрией / И. Н. Сидоренко // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. А. Куляшова. Сер. В. – 2019. – № 2(54). – С. 21–29.