

## МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ТЕОРИИ АНОМАЛЬНОГО СКИН-ЭФФЕКТА

А. Б. Сотский<sup>1</sup>, Е. А. Чудаков<sup>1</sup>, Л. И. Сотская<sup>2</sup>

(1Учреждение образования «Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова»,  
кафедра общей физики)

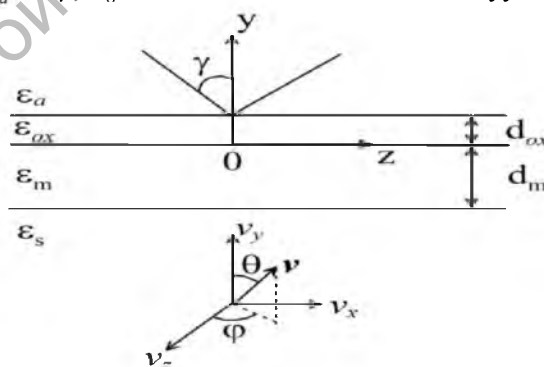
(2Учреждение образования «Белорусско-Российский университет», кафедра высшей математики)<sup>1</sup>

*Сформулированы неоднородные интегральные уравнения Фредгольма второго рода, описывающие поля волн ТЕ и ТМ поляризации в металлических пленках с учетом аномального скин-эффекта. Для решения уравнений разработан метод квадратур. Исследованы электромагнитные поля в золотых и алюминиевых пленках и угловые зависимости поляризационных углов отраженного от пленок света.*

Корректное описание взаимодействия света с металлом, учитывающее пространственную нелокальность связи векторов плотности электрического тока  $\mathbf{j}$  и напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$ , возможно в рамках теории аномального скин-эффекта, основанной на совместном рассмотрении уравнений Максвелла и кинетического уравнения Больцмана и сводящей дело к решению интегро-дифференциальных уравнений для напряженности электрического поля в области металла. Но аналитическое решение подобного уравнения получено только в простейшем случае нормального падения плоской волны на поверхность металла, занимающего полупространство. Возбуждение металлических пленок конечной толщины наклонно падающими на них электромагнитными волнами практически не изучено.

В настоящей работе сделан шаг в направлении восполнения данного пробела. Здесь рассчитаны электромагнитные поля, возбуждаемые в металлической пленке наклонно падающими на нее волнами ТЕ, либо ТМ поляризации и функции поляризационных углов, фигурирующие в многоугольной эллипсометрии пленок. Результат достигнут за счет сведения интегро-дифференциальных уравнений к более простым интегральным уравнениям Фредгольма второго рода.

Пусть металлическая пленка толщины  $d_m$  находится на подложке с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_s$  и отделена от воздуха диэлектрическим окисным слоем толщины  $d_{ox}$  (рис. 1). На пленку под углом  $\gamma$  падает монохроматическая плоская волна с зависимостью от времени  $t$  и координаты  $z$  вида  $\exp(i\omega t - ik_0\beta z)$ . Здесь  $\beta = \sqrt{\epsilon_a} \sin \gamma$ ,  $k_0 = 2\pi / \lambda$  – волновое число вакуума. Ось однородности –  $Ox$ .



**Рисунок 1.** Геометрия задачи и углы сферической системы координат в пространстве скорости электрона.

<sup>1</sup> Работа выполнена в рамках ГПНИ «Фотоника, опто- и микроэлектроника» 2016–2020 гг.

Для волн ТЕ поляризации с единственной отличной от нуля компонентой электрического поля  $E_x$  интегральное уравнение в области металлической пленки имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{E}_x(y) = & \bar{E}_x^{(n)}(y) + \Phi_s(y, k_y) + \Phi_s(y, -k_y) - \\ & - iK\varepsilon_n \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{\sin^3 \theta \sin^2 \varphi}{(\alpha^2 + k_y^2) \cos \theta} \int_{-d}^0 \exp(-\alpha k_0 |y - y'|) \bar{E}_x(y') dy'. \end{aligned}$$

Здесь  $\bar{E}_x(y) = E_x(y) / E_x(-d_m)$ ,

$$\begin{aligned} \bar{E}_x^{(n)}(y) = & \cos[k_0 k_y (y + d_m)] + i\sigma_s k_y^{-1} \sin[k_0 k_y (y + d_m)], \\ \Phi_s(y, k_y) = & \exp[k_0 k_y (y + d_m)] \times \\ & \times \frac{K\varepsilon_n}{2k_y} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{\sin^3 \theta \sin^2 \varphi}{(\alpha - ik_y) \cos \theta} \int_{-d}^0 \exp[-\alpha k_0 (y' + d_m)] \bar{E}_x(y') dy', \end{aligned}$$

$\sigma_s = \sqrt{\varepsilon_s - \beta^2}$ ,  $k_y = \sqrt{\varepsilon_n - \beta^2}$ ,  $\varepsilon_n = \varepsilon_m + \Delta\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость металла,  $\varepsilon_m$  – проницаемость его ионного остова,

$$\Delta\varepsilon = \frac{2\pi i K \varepsilon_n \nu_0 \tau}{1 + i\omega\tau} A^2 [(1 + A^2) A^{-1} \operatorname{arctg}(A^{-1}) - 1] \quad (A = (1 + i\omega\tau)(k_0 \tau \nu_0 \sqrt{\varepsilon_n})^{-1})$$

– вклад в диэлектрическую проницаемость электронов проводимости,  $\tau$  – среднее время свободного пробега электрона,  $\nu_0$  – скорость электрона на поверхности Ферми,

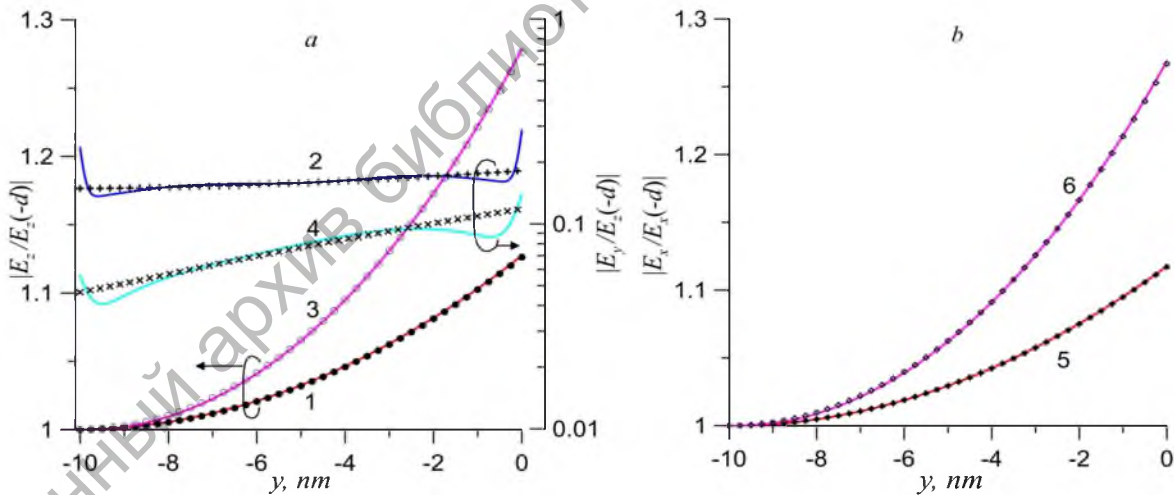
$$K = -4\omega\mu_0 m e^2 \mu (k_0^2 \hbar^3 \varepsilon_n)^{-1}, \quad \alpha = [i\omega\tau(1 - \beta\nu_0 c^{-1} \sin \theta \cos \varphi) + 1](\omega\tau\nu_0 c^{-1} \cos \theta)^{-1},$$

$\mu_0$  – магнитная проницаемость вакуума,  $\mu$  – энергия Ферми,  $m$  и  $e$  – масса и модуль заряда электрона,  $\hbar$  – постоянная Планка,  $c$  – скорость света.

Для волн ТМ поляризации уравнения типа (1) имеют место для компонент поля  $E_y$  и  $E_z$ .

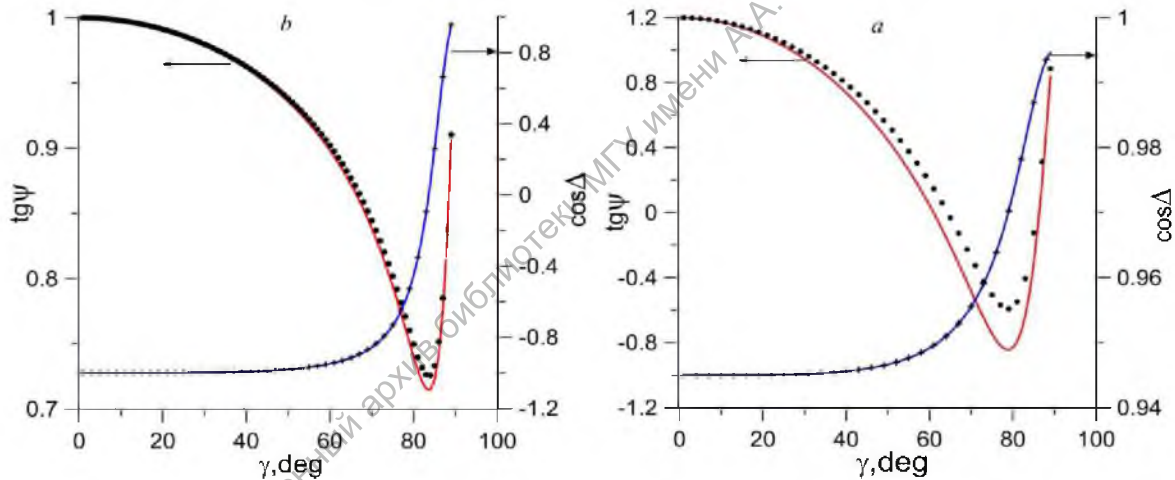
Приведенные ниже результаты расчетов относятся к металлическим пленкам на кремниевой подложке и соответствуют  $\lambda = 800 \text{ nm}$ ,  $d_{\text{ок}} = 0$ .

На рисунке 2 представлены распределения компонент электрического поля в золотой и алюминиевой пленках соответствующие  $\gamma = 70^\circ$ .



**Рисунок 2.** Распределения компонент электрического поля в золотой (1, 2, 5) и алюминиевой (3, 4, 6) пленках толщиной 10 nm для волн ТМ (a) и ТЕ (b) поляризации. Сплошные кривые – теория аномального скин-эффекта, дискретные значки – модель нормального скин-эффекта

Рисунок 3 иллюстрирует влияние аномального скин-эффекта на функции поляризационных углов, измеряемые в многоугольной эллипсометрии.



**Рисунок 3.** Угловые зависимости функций поляризационных углов для золотой (а) и алюминиевой (b) пленок толщины  $d_m = 60 \text{ nm}$ . Сплошные кривые – теория аномального скин-эффекта, дискретные значки – приближение нормального скин-эффекта