*Романович Л.А.*

## *КРИВИЗНА ИНВАРИАНТНЫХ СВЯЗНОСТЕЙ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА В ГРУППОИДАХ ЛИ*

В 50-х годах Эресманом [1], [2] был предложен метод исследования геометрических структур и их продолжений с помощью группоидов Ли. Развитие теории группоидов Ли и алгеброидов Ли в последнее время, например, [3] дает новые возможности для применения метода Эресмана.

Нашей целью является изучение инвариантных связностей или, другими словами, регулярных сечений расслоения элементов связностей высшего порядка относительно действия продолженного группоида Ли , а также исследование кривизны и кручения таких связностей. Если группоид Ли $\Omega$ действует на векторном расслоении (E, p, B), то продолженный группоид Ли

$\Omega^k$ действует на расслоении ($J^kE$, $p^k$, B). Ngo van Que [4] установил соответствие между связностями порядка k в группоиде Ли $\Omega$ и расщеплениями $\lambda_k$: $E \to J^kE$ и доказал, что связность порядка k определяется своей проекцией порядка k-1 и дифференциальным оператором специального вида.

В теореме 1 доказано, что для инвариантной связности порядка k в группоиде Ли $\Omega$ соответствующее расщепление согласованно с действием группоида и его продолжения.

В теореме 2 доказано, что кривизна инвариантной связности порядка k в группоиде Ли $\Pi^1$(B) согласованна с действием группоида на TB и его продолжения на $J^k$TB.

В теореме 3 доказано, что форма кривизны инвариантной связности порядка k в группоиде Ли $\Pi^1$ (B) согласованна с действием группоида на TB и его продолжения на $J^k$TB.

В дальнейшем будет использовано определение действия группоида Ли $\Omega^k$ на расслоении элементов связностей ($Q^k(\Omega)$, $\pi$, B) [4, 187]:

Пусть $Z = j^k_x\sigma \in \Omega^k$, $Y = j^k_x f \in \Omega^k$ [illegible] $* Q^k(\Omega) \to Q^k(\Omega)$:

$$(Z, Y) \to Z\cdot Y = j^k_y(\sigma \circ (b \circ c \text{ [illegible] } (f \circ (b \circ \sigma)^{-1}) \cdot \sigma(x)^{-1}). \quad (1)$$

Пусть $\Omega'$ - подгруппоид группоида Ли ($\Omega$, B) [3, 165]. Действие группоида ($\Omega^k$, B) на расслоении ($Q^k(\Omega)$, $\pi$, B) естественным образом определяет понятие инвариантной связности высшего порядка относительно подгруппоида ($\Omega'^k$, B):

Определение 1. Связность c: $B \to Q^k(\Omega)$ называется инвариантной относительно действия подгруппоида $\Omega'$, если для любого $Z = j^k_x\sigma \in \Omega'^k$ выполняется условие:

$$c(y) = Z\cdot c(x), \quad (2)$$

Теорема 1. Если связность c: $B \to Q^k(\Omega)$ инвариантна относительно действия группоида $\Omega'^k$, то для любых $X \in E_x$, $Z = j^k_x\sigma \in \Omega'^k$ выполняется условие:

$$\lambda_k(\sigma(x)\cdot X) = Z\cdot\lambda_k(X). \quad (3)$$

Доказательство. Пусть c: $B \to Q^k(\Omega)$ - инвариантная связность порядка k в группоиде Ли (Q, B). Значит для любого $Z = j^k_x\sigma$, где

$\sigma$: $B \to \Omega'$, $a \circ \sigma = x$, $j^k_x(b \circ \sigma) \in \Pi^k_x(B)$, выполняется условие (3): $c(y) = Z \cdot c(x)$, $y = b \circ \sigma(x)$.

Пусть $c(x) = j^k_x f$, $c(y) = j^k_x f' = j^k_x \sigma \cdot j^k_x f$ = [ по определению (1) действия группоида $(\Omega^k, B)$ на расслоении элементов связности $(Q^k(\Omega), \pi, B)$ ] $= j^k_y\ (\sigma \circ (b \circ \sigma)^{-1} \cdot f \circ (b \circ \sigma)^{-1} \cdot \sigma(x)^{-1})$.

Морфизм $\lambda_k$: $E \to J^k E$ строится следующим образом [4, стр. 189]: $F^k(E) = \{j^k_x g \mid x \in B,\ g: B \to E,\ p \circ g = x\}$, $c_x$: $F^k(E)|_x \to J^k(E)|_x$: $X = j^k_x g \to X' = j^k_x(f \circ g)$, $i$: $E \to F^k(E)$: $X \in E_x \to j^k_x \hat{X}$, где $\hat{X}$ - постоянное отображение в $X \in E_x$. Пусть $\lambda_k = c \circ i$. Докажем, что

$$\lambda_k(\sigma(x) \cdot X) = Z \cdot \lambda_k(X).$$

$$\lambda_k(\sigma(x) \cdot X) = (c_y \circ i_y)(\sigma(x) \cdot X) = c\ (j^k_y(\sigma_y(x) \cdot \hat{X})) =$$

$$= j^k_y(f' \cdot \sigma(x) \cdot \hat{X}) = j^k_y(\sigma \circ (b \circ \sigma)^{-1} \cdot f \circ (b \circ \sigma)^{-1} \cdot \sigma(x)^{-1} \sigma(x)\ \hat{X})$$

$$= j^k_y(\sigma \circ (b \circ \sigma)^{-1} \cdot f \circ (b \circ \sigma)^{-1} \cdot \hat{X}). \qquad (4)$$

$$Z \cdot \lambda(X) = j^k \sigma\ (c \circ i)(X) = j^k \sigma \cdot j^k(f \cdot \hat{X}) =$$

$$= j^k(\sigma \circ (b \circ \sigma)^{-1} \cdot f \circ (b \circ \sigma)^{-1} \cdot \hat{X}). \qquad (5)$$

Сравнивая (4) и (5) получим $\lambda_k(\sigma(x) \cdot X) = Z \cdot \lambda_k(X)$. Теорема доказана.

Известным примером группоида Ли является группоид, состоящий из 1-струй диффеоморфизмов многообразия B:

$$\Pi^1(B) = \left\langle j^1_x f \,\middle|\, f: B \to B, f - \text{диффеоморфизм} \right\rangle$$

Этот группоид является присоединенным к касательному расслоению (TB, p, B) с помощью действия:

$$\Pi^1(B) * TB \to TB:\ (j^1_x f,\ j^1_0 \gamma) \to j^1_0(f \circ \gamma),$$

где $\gamma$: $J \to B$, $J \in R$, $0 \in J$, $\gamma(0) = x$, $j_0 \gamma \in T_x B$.

Пусть $D=G/H$ - однородное пространство, $l_g$: $B \to B$: $g_1 H \to (g g_1) H$, $L^1(B) = \left\langle j^1 l_g \,\middle|\, l_g : B \to B \right\rangle$ подгруппоид группоида $\Pi^1(B)$, каждый a- и b- слой которого является главным расслоением со структурной группой H. H - линейная группа изотропии в точке $0=H \in B$, состоящая из линейных преобразований пространства $T_0 B$, каждое из которых индуцировано элементом из H, оставляющих точку 0 фиксированной. [5, 150].

Определение 2. Кривизной связности порядка k в группоиде $\Pi^1(B)$ называется морфизм $R_{\lambda_k}: TB \otimes TB \to J_0^k TB$:

$$R_{\lambda_k}(\mu, \eta) = \lambda_k [\mu, \eta] - [\lambda_k(\mu), \lambda_k(\eta)],$$

где [ , ] - обычная скобка векторных полей, [ , ] - скобка в $J^p TB$.

Теорема 2. Если связность порядка k: инвариантна относительно действия группоида Ли $L^1(B)$, то ее кривизна согласована с действием этого группоида на TB и его продолжения на $J^k TB$.

Доказательство: Пусть $Z = j_x^k \sigma$, где $\sigma$. $B \to L^1(B)$, $a \circ \sigma = x$, $j_x^k(b \circ \sigma) \in \Pi_x^k(B)$. Из теоремы 1 следует, что $\lambda_k(\sigma(x)X) = Z \cdot \lambda_k(X)$. Известно, что скобка векторных полей [5, 45] инвариантна относительно действия дифференциалов левых сдвигов. Проверим инвариантность [ , ] относительно действия продолженного группоида Ли на расслоении

$(J^k TB, \pi, B)$: $j_x^k\sigma \cdot [j_x^k\mu, j_x^k\eta]$ = (по определению скобки в $\Gamma(J^k TB)$ [4, 196] $[j_x^k\mu, j_x^k\eta] =: j_x^{k-1}[\mu, \eta]$, $[j^k\mu, j^k\eta] =: j^k[\mu, \eta]$) =

$= j_x^k\sigma \cdot j_x^{k-1}[\mu, \eta] = j_x^{k-1}(\sigma(x)\cdot[\mu,\eta]) = j_x^{k-1}[\sigma(x)\cdot\mu, \sigma(x)\cdot\eta] =$

$= [j_x^k(\sigma(x)\cdot\mu), j_x^k(\sigma(x)\cdot\eta)] = [\sigma(x)\cdot j_x^k\mu, \sigma(x)\cdot j_x^k\eta]$.

$j_x^k\sigma \cdot R_{\lambda_p}(\mu, \eta)$ = (по определению 2) $= j_x^k\sigma\cdot(\lambda_p [\mu, \eta] -$

$- [\lambda_p(\mu), \lambda_p(\eta)]) = \lambda_p(\sigma(x)\cdot [\mu, \eta]) - [\sigma(x)\cdot\lambda_p(\mu), \sigma(x)\lambda_p(\eta)] =$

$= \lambda_p [\sigma(x)\cdot\mu, \sigma(x)\cdot\eta] - [\lambda_p(\sigma(x)\cdot\mu), \lambda_p(\sigma(x)\cdot\eta)] =$

$= R_{\lambda_p}(\sigma(x)\cdot\mu, \sigma(x)\cdot\eta)$. Теорема доказана .

Определение 3. Формой кривизны связности порядка k в группоиде Ли $\Pi^1(B)$ называется морфизм $\omega_k: J^k TB \to J_0^k TB$ удовлетворяющий условиям

1) $\omega_k \circ i = id$, где $i: J_0^k TB \to J^k TB$ - отображение включения,

2) $0 \to J_0^k TB \underset{\omega_k}{\overset{i}{\rightleftarrows}} J^k TB \underset{\lambda_k}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} TB \to 0$, $i \circ \omega_k + \lambda_k \circ \pi = id_{J^k TB}$.

Теорема 3. Если связность порядка k инвариантна относительно действия группоида Ли L1(B), то соответствующая ей форма кривизны согласованна относительно действия продолженного группоида на расслоении $(J^kTB, p^k, B)$.

Доказательство. Пусть $s \in \Gamma(J^kTB)$. По условию теоремы $\lambda_k(\sigma(x)\cdot X) = Z\cdot\lambda_k(X)$, где $Z = j^k_x\sigma \in (L^1(B))^k$. Тогда из условия 2 определения 2 следует, что $i\circ\omega_k(j^k_x\sigma\cdot s) + \lambda_k\circ\pi(j^k_x\sigma\cdot s) = j^k_x\sigma\cdot s$.

$i\circ\omega_k(j^k_x\sigma\cdot s) = \omega(j^k_x\sigma\cdot s)$, $\omega_k(j^k_x\sigma\cdot s) = j^k_x\sigma\cdot s - \lambda_p(\sigma(x)\cdot\pi(s)) =$

$= j^k_x\sigma\cdot s - j^k_x\sigma\cdot\lambda_k(\pi(s)) = j^k_x\sigma\cdot(s - \lambda_k(\pi(s)) = j^k_x\sigma\cdot\omega_k(s)$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. C. Ehresmann, Introduktion a la theorie des struktures infinitesimales et des pseudogroupes de Lie.-Coll.geom.diff. Strasbourg, 1953. - p. 97-110

2. C. Ehresmann, Struktures lokales.// Ann. Math. Pura Appl. ,1954.-36

3. K. Mackenzie. Lie Groupoids and Lie Aigebroids in Differential Geometrie. -Cambridge University Press. 1987. -327 c.

4. Ngo van Que. Du prolongement des espaces fibres et des struktu-res infinitesimales. Ann. Inst. Fourier. Grenoble. 1969, N17-C. 159-223

5. Ш. Кобаяси, К. Номидзу. Основы дифференциальной геометрии. т.1 М. , Наука, 1987. -345 с.

6. Д.Громол, В.Клингеберг, В.Мейер. Риманова геометрия в целом. Издательство " Мир", -343с.