*Л. А. РОМАНОВИЧ*

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЭРЕСМАНА К ИЗУЧЕНИЮ СВЯЗНОСТЕЙ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА НА МНОГООБРАЗИЯХ

Важной задачей современной дифференциальной геометрии является исследование структур высших порядков на гладких многообразиях. В 50-х годах нашего столетия Ш. Эресман предложил метод исследования геометрических структур, основанный на использовании группоидов Ли и $k$-струй гладких отображений. В 60-х годах вышел ряд работ Ш. Эресмана, П. Либермана, Нго ван Кё, выполненных этим методом. Преимущества группоидного подхода состоят в том, что, во-первых, понятие группоида Ли в определённом смысле эквивалентно понятию главного расслоения, во-вторых, теория группоидов Ли имеет много аналогов в теории групп Ли, так как понятие группоида является одним из обобщений понятия группы. Роль алгебры Ли играет алгеброид Ли.

В данной работе метод Эресмана применяется к исследованию инвариантных связностей на гладких многообразиях. Целью является изучение инвариантных связностей или, другими словами, регулярных сечений расслоения элементов связностей высшего порядка относительно действия продолженного группоида Ли. Если группоид Ли $\Omega$ действует на векторном расслоении $(E, p, B)$, то продолженный группоид Ли $\Omega^k$ действует на расслоении $(J^k(E), p^k, B)$ [1, 22, 95]. В работе [2] установлено соответствие между связностями порядка k в группоиде Ли $\Omega$ и расщеплениями $\lambda^k: E \to J^k E$ точной последовательности векторных расслоений $0 \to J_0^k E \to J^k E \to E \to 0$.

Известным примером группоида Ли является группоид $\Pi^1(B)$, состоящий из 1-струй диффеоморфизмов многообразия $B$. Этот группоид является присоединенным к касательному расслоению $(TB, p, B)$ с помощью действия:

$$\Pi^1(B) * TB : (j_x^1 f,\ j_0^1 \gamma) \to j_0^1(f \cdot \gamma),$$

где $\gamma : J \to B,\ J \subset R,\ 0 \in J,\ \gamma(0) = x,\quad j_0^1 \gamma \in T_x B,\ j_x^1 f \in \Pi^1(B)$. Продолженный группоид $(\Pi^1(B))^k$ действует на векторном расслоении $(J^k(TB), p^k, B)$ следующим образом:

$$(\Pi^1(B))^k = J^k(TB) \to J^k(TB) : (Z, X) \to Z \cdot X = j_x^k(\sigma \circ (b \circ \sigma)^{-1} \cdot (s \circ (b \circ \sigma)^{-1}),$$

где $Z = j_x^k \sigma \in (\Pi^1(B))^k,\ X = j_x^k s \in J^k(TB),\ \sigma : B \to \Pi^1(B),\ \alpha \circ \sigma = id,\ y = b \circ \sigma(x)$.

Пусть $B = G/H$ — однородное пространство, где $G$ — группа Ли, $H$ — её замкнутая подгруппа. $lg : B \to B: g_1 H \to (gg_1)H$, $L^1(B) = \{j^1 lg \mid lg : B \to B\}$ подгруппоид группоида $\Pi^1(B)$, каждый $\alpha$- и $\beta$-слой которого является главным расслоением со структурной группой $H$. $H$ — линейная группа изотропии в точке $0 = H \in B$, состоящая из линейных преобразований пространства $T_0 B$, каждое из которых индуцировано элементом из $H$, оставляющих точку 0 фиксированной.

В работе [2, с. 192] каждой связности $\alpha^k\ E \to J^k E$ ставится в соответствие дифференциальный оператор

$$\nabla_k : \underline{TB} \to \underline{J^{k-1} TB \otimes T^* B} : \nabla_k(\mu) = D \circ \lambda_k(\mu),$$

где D — оператор Спенсера

$$D : \underline{J^k TB} \to \underline{J^{k-1} TB \otimes T^* B} : \quad s \to j^1(\rho_{k-1} \circ s) - s,$$

и доказывается, что для всякой связности $\lambda_{\kappa-1}$ порядка $k$ — 1 и дифференциального оператора $\nabla_k$, удовлетворяющего определенным условиям, существует единственная связность $\lambda_\kappa$ порядка $k$, которая индуцирует связность $\lambda_{\kappa-1}$ и дифференциальный оператор $\nabla_k$.

Теорема. Пусть связность порядка $k$ - $1$ $\lambda_{\kappa-1} : TB \to J^{k-1} TB$ удовлетворяет условию $\lambda_{\kappa-1}(\sigma(x) \cdot X) = j^{k-1} \sigma \cdot \lambda_\kappa(X)$ и дифференциальный оператор $\nabla_k$: $\underline{TB} \to \underline{J^{k-1}}\ \underline{TB \otimes T^* B}$ инвариантен относительно действия $(L^1(B))^k$ и удовлетворяет условиям 1), 2), 3) [2, с. 192]. Тогда существует единственная связность порядка $\kappa \lambda_\kappa : TB \to J^k TB$, такая, что

$$1')\quad \lambda_{k-1}\rho_{k-1}\circ\lambda_k,\ \ 2')\nabla_k = D\circ\lambda_k,\ \ 3')\lambda_k(\sigma(x)\cdot X) = j_x^k\sigma\cdot\lambda_k(X).$$

Доказательство. Пусть $\lambda_\kappa$ — связность порядка $k$, для которой выполняются условия 1') и 2') [2, с 192]. Проверим выполнение условия 3'). Пусть $\mu\in\Gamma(TB)$, $\mu(x)=X\in T_xB$. $(U,\varphi)$ — локальная карта в окрестности точки $x\in B(\varphi(x)=(x^1,x^2,\dots,x^n))$, $X=(x^i s^i)$, $\sigma(x)\cdot X:(y^i,\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\big|_x s^j(x))$, здесь $y=b\cdot\sigma(x)$, $(V,\varphi)$ — локальная карта в окресности точки $y$, в которой, $\psi(y)=(y^1, y^2,\dots y^n)$. Запишем локальное координатное выражение в случае произвольного

$$k:\lambda_k(\mu):(x^i,s^i,\dots,s^i_{\beta_1\beta_2\beta_n}),\quad j_x^k\sigma\cdot\lambda_k(\mu)=(y^i,\frac{\partial x^i}{\partial t^j}\big|_x s^j(x),\dots,\rho^i_{\beta_1\beta_2\dots\beta_n}),$$

$$\lambda_k(\sigma(x)\cdot\mu)=(y^i,\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\big|_x s^j(x)\dots t^i_{\beta_1\beta_2\dots\beta_n}),\qquad \text{где } 0\le\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_3\le k$$

По условию теоремы для $0\le\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_3\le k-1$ выполняется равенство $\lambda_{k-1}(\sigma(x)\cdot X)=j_x^{k-1}\sigma\cdot\lambda_k(X)$, следовательно $t^i_{\beta_1\beta_2\dots\beta_n}=p^i_{\beta_1\beta_2\dots\beta_n}$. Тогда $\nabla_k(\sigma(x)\cdot\mu)==D(\lambda_k(\sigma(x)\cdot\mu))=(\frac{\partial}{\partial x^i}t^i_{\beta_1\beta_2\dots\beta_3}-t^i_{i\beta_1\beta_2\dots\beta_{j-1}\beta_n})\otimes dx^j$ = [по условию теоремы] = $j_x^k\sigma\cdot\nabla_k(\mu)=j_x^k\sigma\cdot D(\lambda_k(\mu))$ = [в силу инвариантности опеоператора Спенсера, что легко повторяется] = $D(j_x^k\sigma\cdot\lambda_k(\mu))=(\frac{\partial}{\partial x^i}p^i_{\beta_1\beta_2\dots\beta_n}-$ $-p^i_{\beta_1\beta_2\dots\beta_{j-1}\dots\beta_n})\otimes dx^j$. Так как $t^i_{\beta_1\beta_2\dots\beta_n}=p^i_{\beta_1\beta_2\dots\beta_n}$, то $\frac{\partial}{\partial x^i}t^i_{\beta_1\beta_2\dots\beta_n}=$ $=\frac{\partial}{\partial x^i}p^i_{\beta_1\beta_2\dots\beta_n}$, а значит $t^i_{\beta_1\beta_2\dots\beta_{j-1}\dots\beta_n}=p^i_{\beta_1\beta_2\dots\beta_{j-1}\dots\beta_n}$.

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы вытекает способ построения инвариантных связностей порядка $k$ путем задания инвариантной связности порядка $k$-$1$ и инвариантного дифференциального оператора специального вида.

***Литература:***


1. *Белько И. В.* Слоеные группоиды Ли и метод Эресмана в дифференциальной геометрии. — Мн.: Белгосуниверситет, 1997. — 110 с.
2. Ngo van Que. Du prolongement des espaces fibres et des struktures infinitesimales. // Ann. Inst. Fourier. Grenoble. — 1969.— № 17.— C. 159-223.