О ПОСТРОЕНИИ ВЕКТОРНОГО ПОТЕНЦИАЛА СОЛЕНОИДАЛЬНОГО ПОЛЯ

А.В. Шилов (МГУ имени А.А. Кулешова)
Научн. рук. С.В. Жестков,
доктор физ.-мат. наук, профессор

Известно, что, если векторное поле $\vec{a}(x,y,z)$ является соленоидальным, то $div\vec{a}=0$. В этом случае поле $\vec{a}$ порождается векторным потенциалом $\vec{b}(x,y,z)$ по формуле

$$rot\vec{b}=\vec{a}\ . \tag{1}$$

Система (1) является системой дифференциальных уравнений в частных производных относительно неизвестных функций $b_x(x,y,z)$, $b_y(x,y,z)$, $b_z(x,y,z)$, которые представляют собой координаты вектора $\vec{b}(x,y,z)$. В [1] без доказательства приведено частное решение системы (1). В настоящей работе выводится общая формула построения векторного потенциала $\vec{b}(x,y,z)$.

Дифференцируя уравнения (1) по x,y,z соответственно, получим

$$\frac{\partial^2 b_z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 b_y}{\partial x\partial z}=\frac{\partial a_x}{\partial x}\ ,\ \frac{\partial^2 b_x}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 b_z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial a_y}{\partial y},\ \frac{\partial^2 b_y}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 b_x}{\partial y\partial z}=\frac{\partial a_z}{\partial z}. \tag{2}$$

Система (2) представляет собой линейную алгебраическую систему относительно вторых производных, имеющую бесконечное число решений. Поэтому, учитывая полное равноправие переменных x,y,z решение системы (2) запишем в виде

$$\frac{\partial^2 b_x}{\partial y\partial z}=\frac{1}{3}\left[\frac{\partial a_y}{\partial y}-\frac{\partial a_z}{\partial z}\right],\ \frac{\partial^2 b_y}{\partial x\partial z}=\frac{1}{3}\left[\frac{\partial a_z}{\partial z}-\frac{\partial a_x}{\partial x}\right],\ \frac{\partial^2 b_z}{\partial x\partial y}=\frac{1}{3}\left[\frac{\partial a_x}{\partial x}-\frac{\partial a_y}{\partial y}\right]\ . \tag{3}$$

Интегрируя каждое уравнение системы (3), получим

$$b_x(x,y,z)=\varphi_1(x,y)+\psi_1(x,z)+\frac{1}{3}\left[\int_0^z a_y(x,y,z)dz-\int_0^y a_z(x,y,z)dy\right],\ \frac{\partial\psi_3}{\partial y}-\frac{\partial\psi_2}{\partial z}=\frac{1}{3}a_x(0,y,z),$$

$$b_y(x,y,z)=\varphi_2(x,y)+\psi_2(y,z)+\frac{1}{3}\left[\int_0^x a_z(x,y,z)dx-\int_0^z a_x(x,y,z)dz\right],\ \frac{\partial\psi_1}{\partial z}-\frac{\partial\varphi_3}{\partial x}=\frac{1}{3}a_y(x,0,z),$$

$$b_z(x,y,z)=\varphi_3(x,z)+\psi_3(y,z)+\frac{1}{3}\left[\int_0^y a_x(x,y,z)dy-\int_0^x a_y(x,y,z)dx\right],\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}=\frac{1}{3}a_z(x,y,0),$$

где $\varphi_1,\psi_1,\varphi_2,\psi_2,\varphi_3,\psi_3$ – произвольные гладкие функции.

Литература

1. ***Колобов, А.М.*** Избранные главы высшей математики. Часть 2 / А.М. Колобов, Л.П. Черенкова. – Минск, 1967.