М. С. Носкова (Могилев, Беларусь)

СПЕЦКУРС «НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ»

Задача спецкурса — ознакомить студентов с нелинейными явлениями и математическими моделями их описания, определить условия перехода от линейных моделей к нелинейным. Наиболее простые примеры колебательных систем, которые могут рассматриваться как нелинейные, — это хорошо всем знакомые пружинный и математический маятники.

Пружинный маятник

Динамическая переменная — отклонение координаты x центра масс груза от положения равновесия. Возвращающая сила $F_{BC}x$ — сила упругости сжатия или растяжения пружины.

В случае малых отклонений x, лежащих в границах отрезка $[x_1, x_2]$, функцию $F_{BC}x$ можно считать линейной (сила пропорциональна отклонению), что соответствует области применимости закона Гука: $F_{BC}(x) = -kx$, где k — коэффициент жесткости пружины.

В случае больших отклонений x, выходящих за границы отрезка $[x_1, x_2]$, функция $F_{BC}x$ становится нелинейной и имеет два предела: a — предел сжатия пружины и b — предел ее растяжения. $F_{BC}x$ можно приближенно представить формулой

$$F_{BC}(x) = -k_1 x - k_3 x^3 - \ldots - k_{(2n+1)} x^{(2n+1)} - \frac{k_a}{(a-x)} - \frac{k_b}{(b-x)}. \quad (1)$$

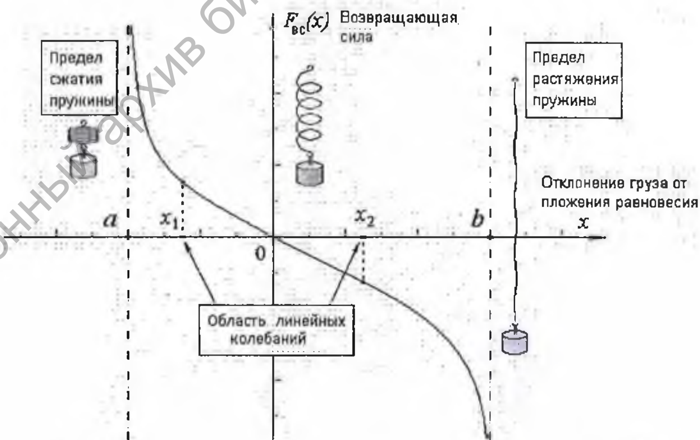

Рис. 1. График возвращающей силы пружинного маятника

Пружинный маятник — типичный пример жесткой колебательной системы.

Жесткие колебания — нелинейные колебания, при которых возвращающая сила возрастает **ускоренно** с увеличением амплитуды. Пример — вибрации механизмов.

Используя второй закон Ньютона $ma = F_{BC}(x)$, где $a = \dfrac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$, получим закон движения пружинного маятника в форме дифференциального уравнения:

$$\ddot{x} = \frac{1}{m} F_{BC}(x). \tag{2}$$

От примера пружинного маятника легко можно перейти к общему виду зависимости силы упругости от степени деформации.

Математический маятник с жестким подвесом

В рамках поставленной задачи колебания математического маятника удобно рассматривать как вращательное движение. Динамическая переменная — угол отклонения подвеса от положения равновесия. Возвращающая сила — равнодействующая силы тяжести и реакции подвеса (растяжения или сжатия).

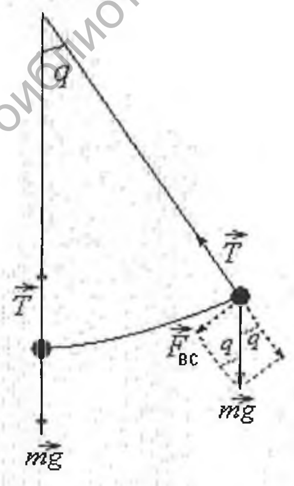

Рис. 2. Силы, действующие на математический маятник

Из рисунка 2 видно, что сила натяжения подвеса $T = -mg\cos(q)$. Возвращающая сила $F_{BC}(q) = -mg\sin(q)$, (3)

направлена по касательной к окружности.

Построим график зависимости возвращающей силы от величины угла отклонения $F_{BC}(q)$:

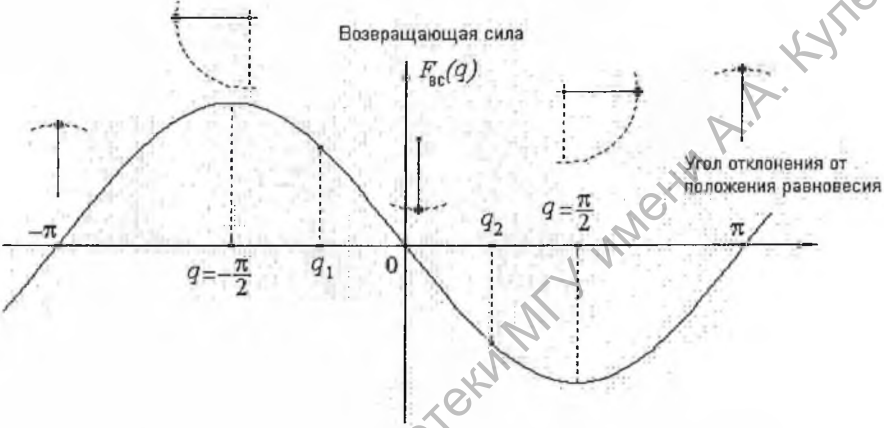

Рис. 3. График возвращающей силы математического маятника

Максимальных значений $|F_{BC}(q)| = mg$ абсолютная величина возвращающей силы достигает в точках $q = \frac{\pi}{2}$ и $q = -\frac{\pi}{2}$, а в точках $q = -\pi$, 0, π абсолютная величина $|F_{BC}(q)| = 0$.

Математический маятник — типичный пример мягкой колебательной системы.

Мягкие колебания — нелинейные колебания, при которых возвращающая сила возрастает замедленно с увеличением амплитуды. Пример — волны на поверхности воды.

Используя второй закон Ньютона $ma = F_{BC}(q)$,

где $a = \frac{d^2 q}{dt^2} = \ddot{q}$, получим закон движения математического маятника в форме дифференциального уравнения:

$$\ddot{x} = \frac{1}{m} F_{BC}(q). \qquad (4)$$

Дифференциальное уравнение (4) имеет такой же вид, что и уравнение (2) для пружинного маятника. Функцию $F_{BC}(q)$ также можно разложить в ряд:

$$F_{BC}(q) = q - \frac{q^3}{1!} + \frac{q^5}{2!} + \dots \frac{q^n}{n!}.$$

В зависимости от степени нелинейности системы можно описывать ее поведение дифференциальными уравнениями второго, третьего и других порядков, приводя примеры колебательных систем с квадратичной и кубичной нелинейностью и наиболее распространенные методы их решения.

Актуальность данной темы состоит в том, что нелинейные явления широко распространены в природе, технике и процессы самоорганизации и саморегуляции (например, автоколебания) возможны только в нелинейных системах. Нелинейные волновые процессы отвечают за существование уединенных волн — солитонов, ударных волн, вихрей различных масштабов в атмосфере, океане и др. Общие представления о нелинейности — необходимая часть современной физической картины мира, что делает их необходимой частью современного физико-математического образования.

Литература

1. Нелинейные колебания : учебное пособие для вузов // А. П. Кузнецов, С. П. Кузнецов, Н. М. Рыскин. — Москва : Физматлит, 2002. — 292 с.
2. Нелинейные волны : учебное пособие для вузов // Н. М. Рыскин, Д. И. Трубецков. — М. : Физматлит, 2000. — 272 с.