

*И. П. Лобанок, аспирант кафедры методики преподавания математики
МГУ им. А. А. Кулешова, г. Могилев*

ОБ ИЗУЧЕНИИ ТЕОРЕМЫ ПИФАГОРА: ВОПРОСЫ ПРОПЕДЕВТИКИ, ВНУТРИПРЕДМЕТНОЙ И МЕЖПРЕДМЕТНОЙ ИНТЕГРАЦИИ

В настоящее время процесс преподавания математики в средней школе сопряжен с рядом проблем: хронический дефицит учебного времени, необходимость оптимального чередования различных тем алгебры и геометрии, потребность практической реализации внутри- и межпредметных связей в рамках одного урока и т. д. Действенным решением подобных проблем является пропедевтическое изучение математического материала, ведущее к интеграции как внутрипредметной, так и межпредметной характера.

Вопросы предварительного изучения того или иного математического понятия всегда являлись предметом обсуждения и математиков и методистов.

Особое внимание уделялось пропедевтике понятий геометрии и математического анализа (Е. Н. Рогановская, Н. М. Рогановский, О. И. Тавгень), в частности, таких понятий, как функция, предел, производная, интеграл (О. Вольберг, В. Г. Гончаров, А. Н. Колмогоров, С. И. Новоселов, А. Я. Хинчин, С. И. Шохор-Троцкий и др.). При этом в практике обучения не всегда уделялось должное внимание связи основного материала и пропедевтического.

При внутрипредметной пропедевтике происходит сближение математического материала одной математической дисциплины, а при межпредметной пропедевтике — сближение алгебраического и геометрического материалов. При этом межпредметная пропедевтика может быть двух типов: 1) на уроках алгебры геометрический материал изучается на пропедевтическом уровне; 2) на уроках гео-

метрии алгебраический материал изучается на пропедевтическом уровне.

Одной из важнейших теорем геометрии является теорема Пифагора. В современных школьных учебниках она вводится сравнительно рано [4]. Раннее изучение теоремы Пифагора делает разрешимыми большой класс задач геометрии. Так, при изучении темы «Четырехугольники» благодаря знанию теоремы Пифагора можно глубже изучить свойства того или иного вида параллелограмма. При пропедевтическом изучении теоремы Пифагора активно используется метод опережающего обучения, когда материал вносится в практику решения задач задолго до его изучения по плану, начиная с самого элементарного с постепенным усложнением заданий. Благодаря такому предварительному «знакомству» ученикам при последующем изучении теоремы остается лишь теоретически осмыслить уже известный материал.

Задания, способствующие предварительному знакомству с теоремой Пифагора, направлены на развитие следующих умений:

- 1) вычислять площади комбинированных фигур;
- 2) работать с квадратами величин;
- 3) решать задачи с использованием буквенных записей, употребляя квадраты и знаки арифметических действий, а также находить значения полученных выражений;
- 4) определять, является ли треугольник прямоугольным;
- 5) определять катеты и гипотенузу прямоугольных треугольников при про-

извольном расположении треугольников на плоскости и измерять их с помощью линейки;

6) делать выводы, соответствующие условию задания.

На выполнение заданий, которые предлагаются учащимся при перспективно-опережающей подготовке, должно затрачиваться не более 3—5 минут урока, они не должны быть сложными, быть посильными даже для слабых учеников.

Перспективно-опережающая работа, подготавливающая к изучению теоремы Пифагора в VIII классе, рассчитана, по меньшей мере, на 10 уроков математики (8 уроков геометрии и 2 урока алгебры). Начинать пропедевтическую работу можно со следующей задачи.

Задача 1. Найдите площадь квадрата $ABCD$ со стороной $AB = 3$ см (рис. 1).

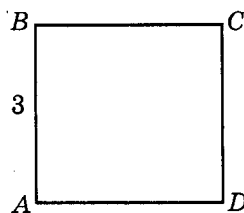


Рис. 1

Дано: $ABCD$ — квадрат; $AB = 3$ см.

Найти: S .

Решение. Найдём площадь квадрата $ABCD$: $S = AB^2$; $S = 3^2 = 9$ (см²).

Ответ: $S = 9$ см².

Как уже отмечалось, усложнение заданий должно происходить постепенно. Сначала оно осуществляется за счет усложнения комбинаций фигур, площади которых требуется найти, а затем — еще и за счет формулировок условия задачи (задачи направлены не только на нахождение площадей фигур, но и на сравнение площадей нескольких фигур, а также доказательство некоторого свойства).

Задача 2. Найдите площадь заштрихованной части фигуры (рис. 2), если $ABCD$ — квадрат со стороной 5 см, $AЕКМ$ — квадрат со стороной 4 см.

Сравните полученную площадь с площадью квадрата $TXYZ$ со стороной 3 см.

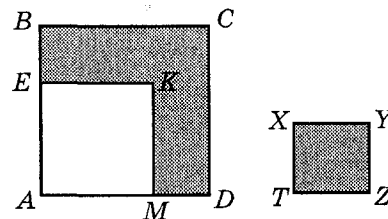


Рис. 2

Дано:

$ABCD$, $AЕКМ$, $TXYZ$ — квадраты;

$AB = 5$ см; $AE = 4$ см; $TX = 3$ см.

Найти: S_1 , сравнить S_1 и S_2 .

Решение.

1) Найдём площадь квадрата $ABCD$:

$$S_{ABCD} = AB^2.$$

2) Найдём площадь квадрата $AЕКМ$:

$$S_{AЕКМ} = AE^2.$$

3) Найдём площадь S_1 : $S_1 = S_{ABCD} - S_{AЕКМ}$; $S_1 = AB^2 - AE^2$; $S_1 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$ (см²).

4) Найдём площадь квадрата $TXYZ$: $S_2 = TX^2$; $S_2 = 3^2 = 9$ (см²).

5) Сравним площади S_1 и S_2 . Из пунктов 3 и 4 следует, что $S_1 = S_2 = 9$ см², значит, $TX^2 = AB^2 - AE^2$.

Ответ: $S_1 = 9$ см²; $S_1 = S_2$.

Развитию абстрактного и логического мышления способствует использование при решении задач буквенных записей, которые содержат квадраты величин.

За несколько уроков до урока непосредственного изучения теоремы Пифагора можно предложить учащимся следующую задачу.

Задача 3. На сторонах прямоугольного треугольника со сторонами 3 м, 4 м, 5 м построили квадраты (рис. 3). Сравните площадь квадрата, построенного на гипотенузе, с суммой площадей квадратов, построенных на катетах.

Дано: $\triangle ABC$ — прямоугольный;

$\angle C = 90^\circ$;

$AKIB$, $ACED$, $CBFG$ — квадраты;

$AC = 3$ м; $BC = 4$ м; $AB = 5$ м.

Сравнить: S_{AKIB} и $S_{CBFG} + S_{ACED}$.

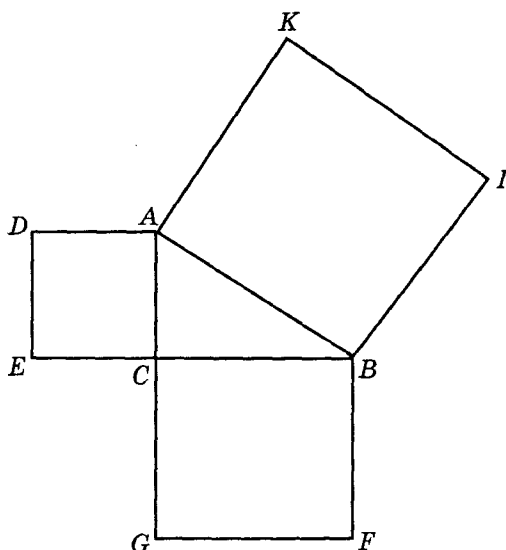


Рис. 3

Решение.

1) Найдем площадь квадрата $AKIB$:
 $S_{AKIB} = AB^2$; $S_{AKIB} = 5^2 = 25$ (м²).

2) Найдем площадь квадрата $CBFG$:
 $S_{CBFG} = BC^2$.

3) Найдем площадь квадрата $ACED$:
 $S_{ACED} = AC^2$.

4) Найдем сумму площадей квадратов $CBFG$ и $ACED$:

$$S_{CBFG} + S_{ACED} = BC^2 + AC^2;$$

$$S_{CBFG} + S_{ACED} = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$$
 (м²).

5) Сравним S_{AKIB} и $S_{CBFG} + S_{ACED}$. Из пунктов 1 и 4 следует, что $S_{AKIB} = S_{CBFG} + S_{ACED}$, значит, $AB^2 = BC^2 + AC^2$.

Ответ: $S_{AKIB} = S_{CBFG} + S_{ACED}$.

После решения этой задачи следует сообщить учащимся, что ее результат является иллюстрацией теоремы Пифагора для прямоугольного треугольника со сторонами 3, 4, 5 (его называют египетским), а рисунок 3 к этой задаче иногда называют «пифагоровы штаны», поскольку он напоминает плохо скроенные штаны. Также следует сообщить учащимся, как сформулировал теорему

Пифагора он сам: «Площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на его катетах».

При пропедевтической работе, подготавливающей к изучению теоремы Пифагора, следует уделять внимание выработке навыка определения катетов и гипотенузы прямоугольного треугольника. С этой целью можно предложить учащимся заполнить таблицу по определению катетов и гипотенузы прямоугольников; варьирование расположения прямоугольных треугольников на плоскости способствует развитию пространственного воображения. Наибольший эффект будет при выполнении аналогичного задания, в котором, кроме определения катетов и гипотенузы прямоугольного треугольника, требуется измерить их длину с помощью заданного единичного отрезка (например, можно взять единичный отрезок, равный двум клеткам) и выполнить соответствующие вычисления. Изменение длины единичного отрезка позволяет работать с этим заданием не один раз.

Упражнение 1. Для треугольников, изображенных на рисунке 4, заполните таблицу (см. ниже), выполнив соответствующие измерения.

Приступить к выполнению этого задания можно на уроке (заполнить одну—две строки), а оставшиеся строки предлагается заполнить учащимся дома, не спеша.

Пропедевтическая работа, направленная на подготовку к изучению теоремы Пифагора, должна осуществляться не только на уроках геометрии. Приведем ряд заданий, которые способствуют осознанию понятия «квадратный корень» при раннем изучении теоремы Пифагора.

Треугольник	Меньший катет	Квадрат меньшего катета	Больший катет	Квадрат большего катета	Гипотенуза	Квадрат гипотенузы	Сумма квадратов катетов	Вывод
ABC	AC=	AC ² =	BC=	BC ² =	AB=	AB ² =	AC ² +BC ² =	

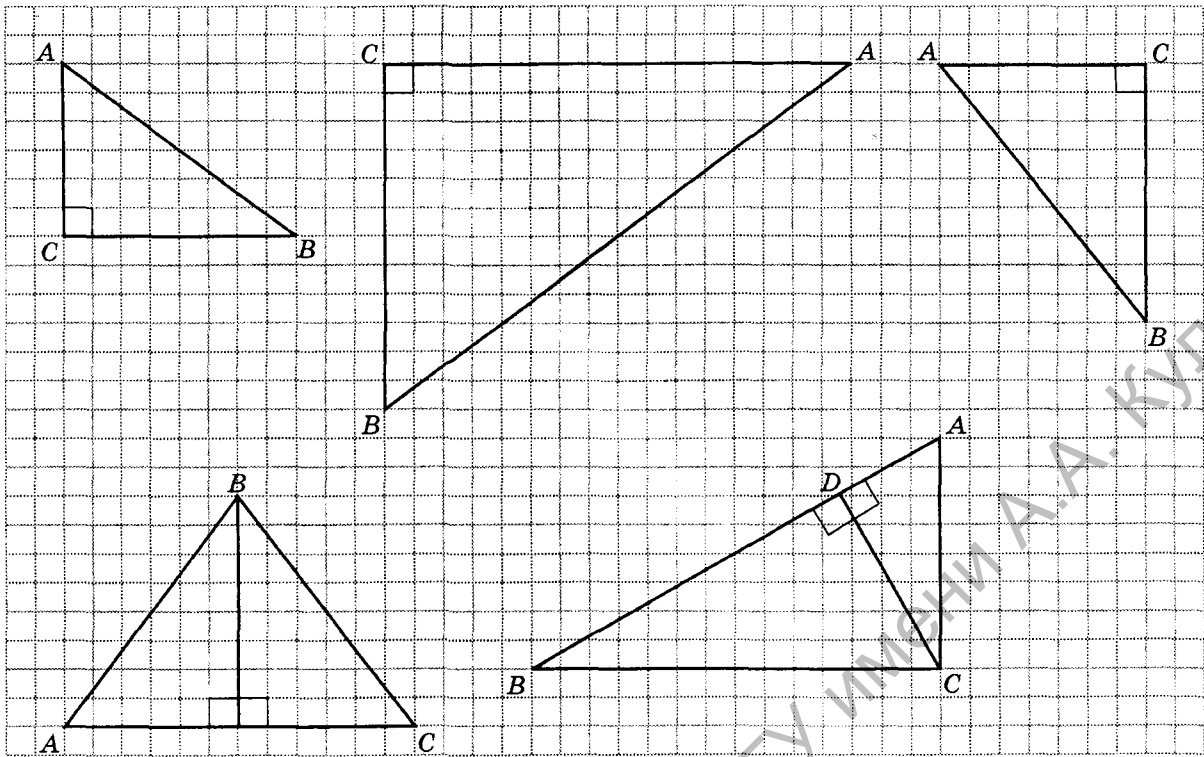


Рис. 4

Упражнение 2. Выполните примеры по образцу:

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2;$$

$$5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9 = 3^2;$$

а) $8^2 + 6^2;$

д) $5^2 - 3^2;$

б) $5^2 + 12^2;$

е) $1^2 - 0,8^2;$

в) $2^2 + 2,1^2;$

ж) $1,3^2 - 0,5^2;$

г) $\left(\frac{6}{10}\right)^2 + \left(\frac{8}{10}\right)^2;$

з) $1^2 - \left(\frac{12}{13}\right)^2.$

При выполнении этого задания мы знакомим учащихся с так называемыми *пифагоровыми тройками чисел*. Однако следует предложить и задание, при котором получаются тройки чисел, не обладающие таким свойством.

Упражнение 3. Выполните примеры по образцу:

$$2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13;$$

$$6^2 - 5^2 = 36 - 25 = 11;$$

а) $7^2 + 5^2;$

е) $4^2 - 1^2;$

б) $4,2^2 + 1,3^2;$

ж) $4,8^2 - 0,7^2;$

в) $0,5^2 + 2,5^2;$

з) $3,4^2 - 2^2;$

г) $\left(\frac{6}{7}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^2;$

и) $\left(\frac{5}{8}\right)^2 + \left(\frac{2}{8}\right)^2;$

д) $1^2 + \left(\frac{3}{8}\right)^2;$

к) $1^2 - \left(\frac{4}{9}\right)^2.$

Следующее занятие необходимо посвятить обобщению полученных на пропедевтическом уровне знаний, связанных с теоремой Пифагора. Особое внимание следует уделить задаче про «пифагоровы штаны» и первой формулировке теоремы. После повторения можно приступить к непосредственному изучению теоремы Пифагора и ее применению при решении геометрических и алгебраических задач. Поскольку к доказательству теоремы с помощью площадей комбинаций фигур учащиеся хорошо подготовлены, то оно будет проведено при их высокой активности, некоторые шаги доказательства рекомендуется предложить для самостоятельного выполнения.

Теорема Пифагора. В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Дано: $\triangle ABC$ — прямоугольный; $\angle C = 90^\circ$ (рис. 5).

Доказать: $AB^2 = CB^2 + AC^2$.

Доказательство. Обозначим $AB = c$; $CB = a$; $AC = b$.

Докажем, что $c^2 = a^2 + b^2$.

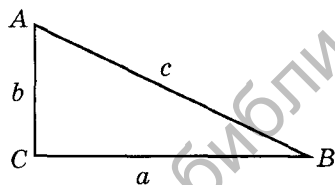


Рис. 5

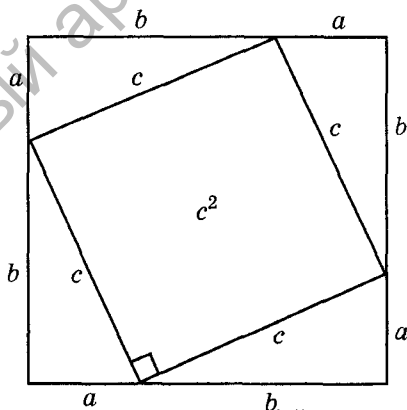


Рис. 6

1) Построим квадрат со стороной $a + b$, площадь которого равна $(a + b)^2$.

2) Разобьем квадрат на части, как показано на рисунке 6. В результате получаем квадрат со стороной c площадью c^2 и четыре равных прямоугольных треугольника со сторонами a , b , c , обшая площадь которых равна $4 \cdot \frac{ab}{2} = 2ab$.

Значит, площадь большого квадрата равна $c^2 + 2ab$.

Из пунктов 1 и 2 имеем:

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= c^2 + 2ab; \\ a^2 + 2ab + b^2 &= c^2 + 2ab; \\ a^2 + b^2 &= c^2 + 2ab - 2ab; \\ a^2 + b^2 &= c^2. \end{aligned}$$

Так как a , b , c — длины сторон CB , AC , AB , то равенство можно записать в виде $AB^2 = CB^2 + AC^2$. Что нам и требовалось доказать.

Демонстрацию построения чертежа для доказательства теоремы желательно строить на доске с нарисованной клеткой, если же такой доски нет, то было бы хорошо заготовить чертеж на бумаге, что сэкономит время при последующих повторениях доказательства теоремы учениками у доски.

После изучения теоремы Пифагора и ее доказательства необходимо показать применение теоремы на практике. При этом начать следует с задачи, в которой числа будут образовывать пифагорову тройку. Обращаем внимание учащихся на то, что при решении геометрических задач результат должен получиться отрицательный.

Задача 4. Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника, если его катеты равны 6 см и 8 см (рис. 7).

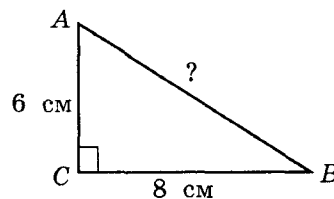


Рис. 7

Дано: $\triangle ABC$ — прямоугольный;
 $\angle C = 90^\circ$; $AC = 6$ см; $BC = 8$ см.

Найти: AB .

Решение. Поскольку треугольник прямоугольный, то для него можно записать теорему Пифагора:

$$\begin{aligned} AB^2 &= BC^2 + AC^2; \\ AB^2 &= 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100; \\ AB^2 &= 100. \end{aligned}$$

Как известно, $100 = 10^2$ или $100 = (-10)^2$, но длина не выражается отрицательным числом, значит, $AB = 10$ см.

Ответ: $AB = 10$ см.

При решении следующей задачи необходимо показать потребность введения нового понятия: «квадратный корень». Поскольку это понятие изучается на пропедевтическом уровне, то никаких свойств квадратного корня здесь изучать не следует, а вычисления выполняются по определению.

Задача 5. В прямоугольном треугольнике катеты равны 2 см и 3 см. Найдите гипотенузу этого треугольника (рис. 8).

Дано: $\triangle ABC$ — прямоугольный;
 $\angle C = 90^\circ$; $AC = 2$ см; $BC = 3$ см.

Найти: AB .

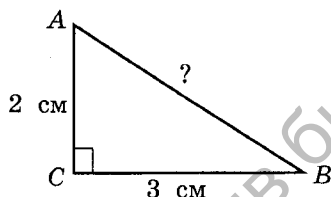


Рис. 8

Решение. Для нахождения гипотенузы прямоугольного треугольника воспользуемся теоремой Пифагора: $AB^2 = AC^2 + BC^2$; $AB^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$; $AB^2 = 13$.

Теперь нужно найти число, квадрат которого равен 13. Однако ни одно известное нам число при умножении само на себя не дает 13. Если мы измерим линейкой гипотенузу треугольника со сторонами 2 см и 3 см, то получим приблизительно 3,6 см, то есть гипоте-

нуза имеет определенную длину, а значит, должно существовать число, квадрат которого равен 13. Это число обозначают с помощью знака $\sqrt{\quad}$, который читают «корень квадратный из». То есть $(\sqrt{13})^2 = 13$. Значит, $AB = \sqrt{13}$ (см).

Ответ: $AB = \sqrt{13}$ см.

С помощью калькулятора можно найти значение корня квадратного из 13: $\sqrt{13} \approx 3,605551\dots$, однако это значение приближенное, и при решении задачи будем использовать квадратный корень.

Задача 6. В прямоугольном треугольнике катеты равны $\frac{a}{c}$ и $\frac{b}{c}$. Найдите гипотенузу этого треугольника (рис. 9).

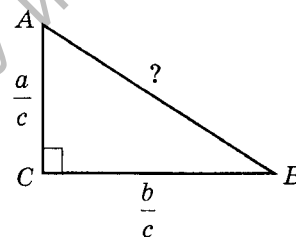


Рис. 9

Дано: $\triangle ABC$ — прямоугольный;
 $\angle C = 90^\circ$; $AC = \frac{a}{c}$; $BC = \frac{b}{c}$.

Найти: AB .

Решение. Для нахождения гипотенузы прямоугольного треугольника воспользуемся теоремой Пифагора:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2;$$

$$AB^2 = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2};$$

$$AB = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{c}.$$

Ответ: $AB = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{c}$.

Также следует показать еще одно применение теоремы Пифагора при на-

хождении катета прямоугольного треугольника, если известна гипотенуза и другой катет. При решении такой задачи можно случай пифагоровой тройки чисел не рассматривать. После решения следует сделать вывод о нахождении катета прямоугольного треугольника: *Квадрат катета прямоугольного треугольника равен разности квадратов гипотенузы и другого катета.*

Задача 7. Определите катет прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна $\sqrt{5}$ м, второй катет 1 м (рис. 10).

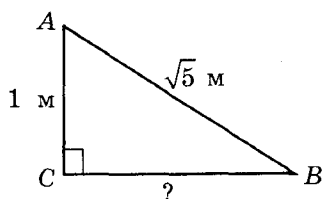


Рис. 10

Дано: $\triangle ABC$ — прямоугольный;
 $\angle C = 90^\circ$; $AB = \sqrt{5}$ м; $AC = 1$ м.

Найти: BC .

Решение. Для нахождения гипотенузы прямоугольного треугольника воспользуемся теоремой Пифагора:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow BC^2 = AB^2 - AC^2;$$

$$BC^2 = (\sqrt{5})^2 - 1^2 = 5 - 1 = 4;$$

$$BC = 2 \text{ (м)}.$$

Ответ: $BC = 2$ м.

При решении геометрических задач с помощью теоремы Пифагора может получиться уравнение, содержащее переменную во второй степени, т. е. квадратное уравнение. В этом случае квадратные уравнения изучаются на пропедевтическом уровне, и при решении задач следует рассмотреть только два вида квадратных уравнений и способы их решения: 1) уравнение вида $ax^2 = b$; 2) квадратное уравнение, сводящееся к линейному уравнению.

Задача 8. Найдите катеты прямоугольного треугольника, если их длины

относятся как 3 : 2, а гипотенуза равна $\sqrt{52}$ см (рис. 11).

Дано: $\triangle ABC$ — прямоугольный;
 $\angle C = 90^\circ$; $AB = \sqrt{52}$ см; $BC : AC = 3 : 2$.

Найти: AC ; BC .

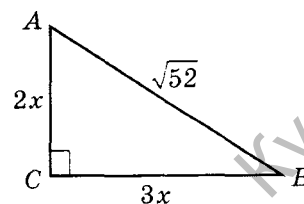


Рис. 11

Решение. Поскольку у нас задано отношение катетов, то можно ввести коэффициент пропорциональности.

1) Пусть x см — коэффициент пропорциональности. Тогда $BC = 3x$ см; $AC = 2x$ см.

Для данного прямоугольного треугольника запишем теорему Пифагора:

$$AC^2 + BC^2 = AB^2.$$

Учитывая данные задачи, получаем:

$$(2x)^2 + (3x)^2 = (\sqrt{52})^2;$$

возведем в квадрат каждое слагаемое:

$$4x^2 + 9x^2 = 52;$$

$$13x^2 = 52;$$

$$x^2 = 52 : 13;$$

$$x^2 = 4;$$

квадрат 2 и (-2) есть 4, однако по смыслу задачи x не может быть отрицательным, значит, $x = 2$ см.

2) Найдём катеты прямоугольного треугольника: $BC = 3 \cdot 2 = 6$ (см), $AC = 2 \cdot 2 = 4$ (см).

Ответ: $AC = 4$ см; $BC = 6$ см.

При решении квадратных уравнений следует продолжать формировать навык использования формулы сокращенного умножения.

Задача 9. В прямоугольном треугольнике один катет равен 6 м, а другой катет на 2 м меньше гипотенузы. Найдите гипотенузу и катет (рис. 12).

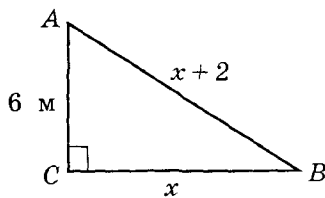


Рис. 12

Дано: $\triangle ABC$ — прямоугольный; $\angle C = 90^\circ$; $AC = 6$ м; BC на 2 м меньше AB .

Найти: AB , BC .

Решение.

1) Пусть $BC = x$ м. Тогда $AB = (x + 2)$ м.

Запишем теорему Пифагора для данного треугольника:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2;$$

$$(x + 2)^2 = 6^2 + x^2;$$

применяя формулу квадрата суммы, получаем:

$$x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 = 6^2 + x^2;$$

$$x^2 + 4x + 4 = 36 + x^2;$$

$$x^2 + 4x - x^2 = 36 - 4;$$

$$4x = 32;$$

$$x = 32 : 4;$$

$$BC = x = 8 \text{ (м)}.$$

2) Найдем AB :

$$AB = 8 + 2 = 10 \text{ (м)}.$$

Ответ: $BC = 8$ м; $AB = 10$ м.

Задача 10. В треугольнике ABC к стороне BC , равной 4 м, проведены медиана AM и высота AH . Найдите высоту AH , если $AM = 5$ м, а $AB = 6$ м (рис. 13).

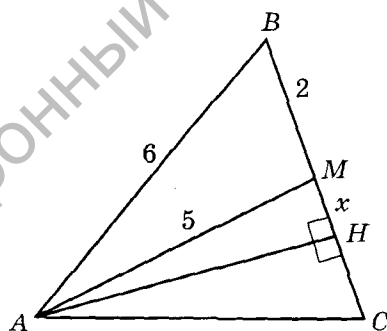


Рис. 13

Дано: $\triangle ABC$; AM — медиана; AH — высота; $AB = 6$ м; $BC = 4$ м; $AM = 5$ м.

Найти: AH .

Решение.

1) Поскольку AM — медиана, то $BM = MC$; $BM = 4 : 2 = 2$ (м).

2) Рассмотрим $\triangle AMH$.

Поскольку AH — высота, то $\angle MHA = 90^\circ$, значит, $\triangle AMH$ — прямоугольный. Запишем для него теорему Пифагора:

$$AM^2 = MH^2 + AH^2; \quad AH^2 = AM^2 - MH^2.$$

Пусть $MH = x$ м, тогда $AH^2 = 5^2 - x^2$.

3) Рассмотрим $\triangle ABH$. Так как AH — высота, то $\angle BHA = 90^\circ$, а значит, $\triangle ABH$ — прямоугольный. Запишем для него теорему Пифагора:

$$AB^2 = BH^2 + AH^2; \quad AH^2 = AB^2 - BH^2.$$

Поскольку $MH = x$ м, то $BH = (2 + x)$ м, тогда $AH^2 = 6^2 - (2 + x)^2$.

4) Итак, из пункта 2 имеем: $AH^2 = 5^2 - x^2$; из пункта 3 имеем: $AH^2 = 6^2 - (2 + x)^2$. Приравняв правые части этих равенств, получим:

$$5^2 - x^2 = 6^2 - (2 + x)^2;$$

$$25 - x^2 = 36 - (2^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + x^2);$$

$$25 - x^2 = 36 - (4 + 4x + x^2);$$

$$25 - x^2 = 36 - 4 - 4x - x^2;$$

$$4x + x^2 - x^2 = 36 - 4 - 25;$$

$$4x = 7;$$

$$x = 7 : 4;$$

$$MH = x = \frac{7}{4} \text{ (м)}.$$

5) Найдем AH либо из пункта 2, либо из пункта 3:

$$AH^2 = AM^2 - MH^2;$$

$$AH^2 = 5^2 - \left(\frac{7}{4}\right)^2 = 25 - \frac{49}{16} =$$

$$= 25 - 3 \frac{1}{16} = 21 \frac{15}{16};$$

$$AH = \sqrt{21 \frac{15}{16}} \text{ (м)}.$$

$$\text{Ответ: } AH = \sqrt{21 \frac{15}{16}} \text{ м}.$$

Сакрэты майстэрства

Пропедевтика во время изучения теоремы Пифагора выступает при такой организации обучения в роли средства интеграции как внутрипредметного, так и межпредметного характера. Происходит межпредметная интеграция тем:

1) «Квадрат числа» и «Теорема Пифагора»;

2) «Теорема Пифагора» и «Квадратный корень»;

3) «Теорема Пифагора» и «Квадратное уравнение»;

4) «Теорема Пифагора» и «Формулы сокращенного умножения».

Обеспечивается также и внутрипредметная интеграция тем «Площадь фигур» и «Теорема Пифагора».

1. Лобанок, И. П. Математика : учебные материалы с межпредметным содержанием (7—9 классы). — Могилев : МГУ им. А. А. Кулешова, 2004. — 36 с.

2. Лобанок, И. П. Пропедевтическое изучение геометрического материала как средство интеграции школьного курса математики // Куляшоўскія чытанні. Матэрыялы Міжнароднай навуковай канферэнцыі, 11—12 снежня 2003 г.: Тэзісы дакладаў. Ч. 1. Магілёў : МДУ імя А. А. Куляшова, 2004. — С. 300—302.

3. Рогановская, Е. Н. Методика разработки учебно-дидактических материалов на интеграционной основе (в курсе математики 7—9 классов): учеб. пособие. — Могилев: МГУ им. А. А. Кулешова, 2000. — 112 с.

4. Рогановский, Н. М. Геометрия: учебник для 7—9-х кл. общеобразоват. шк. с углуб. изучением математики. — 2-е изд. перераб. — Мн. : Нар. асвета, 1997. — 574 с.