БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 517.53.5

САКОВИЧ НАТАЛЬЯ ВЛАДИМИРОВНА

АППРОКСИМАЦИЯ НУЛЯ ЗНАЧЕНИЯМИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Специальность 01.01.01 - "Математический анализ"

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Минск 1995

Работа выполнена на кафедре математического анализа Белорусского государственного педагогического университета

Научный руководитель - доктор физико-математических наук,
профессор Берник В.И.

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор Радыно Я.В.
кандидат физико-математических наук, доцент Желудевич Ф.Ф.

Оппонирующая организация:
Гродненский государственный университет

Защита состоится июня 1995 г. в 10 часов на заседании Совета по защите диссертаций К 056.03.05 в Белорусском государственном университете по адресу: 222050, г.Минск, пр.Ф.Скорины, 4, ауд.206.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Белорусского государственного университета.

Автореферат разослан мая 1995 г.

Ученый секретарь
Совета по защите диссертаций,
кандидат физико-математических
наук, доцент Князев П.Н.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. При исследовании областей сходимости и единственности разложения функций в тригонометрический ряд, классификации римановых поверхностей, описании особенностей аналитических и гармонических функций возникают множества в том или ином смысле пренебрежимо малые. Это вызвало необходимость рассматривать различные характеристики малости множеств. В формулировках теорем из области метрической теории диофантовых приближений утверждается выполнение определенных аппроксимационных свойств для всех чисел или наборов чисел, за исключением множеств нулевой меры Лебега. В некоторых случаях метрическая характеристика числовых множеств, основанная на мере Лебега, оказывается слишком грубой. В настоящее время для описания различных характеристик малости множеств привлекаются такие понятия, как трансфинитный диаметр (ёмкость), потенциал, мера и размерность Хаусдорфа.

С метрической точки зрения анализируются не только задачи, касающиеся действительных и комплексных чисел, но также p-адических чисел, формальных степенных рядов и вообще элементов всех пространств, в которые введена мера.

Цель работы - исследование приближений нуля значениями аналитических функций специального вида в терминах теории меры, ёмкости множества и размерности Хаусдорфа.

Методика исследования. В диссертации используется метод Бэйкера-Шмидта для оценок снизу размерности Хаусдорфа, а также развитие метода существенных и несущественных областей, позволяющее получать оценки сверху для размерности.

Научная новизна. В диссертации получены теорема I, позволяющая получать оценки размерности Хаусдорфа из оценок ёмкости некоторых множеств комплексных чисел; теорема 2, устанавливающая новую метрическую характеристику приближений точек комплексной кривой в C^n и являющаяся аналогом теоремы Пяртли для комплексного случая, а также получены оценки снизу и сверху размерности Хаусдорфа множества $N_n(v)$ - множества комплексных чисел z, для которых неравенство $|P(z)| < H^{-v}$ имеет бесконечное число решений в целочисленных полиномах $P(z)$.

Практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Её результаты могут быть использованы при исследовании областей сходимости и единственности разложения функций в тригонометрический ряд, при описании особенностей аналитических и гармонических функций. Диссертация может служить материалом для чтения спецкурса по метрической теории диофантовых приближений, а также для чтения некоторых специальных разделов курса высшей математики.

Апробация работы и публикации. Материалы диссертации докладывались на математической конференции, посвящённой 200-летию со дня рождения Н.И.Лобачевского (Минск, 1992), на научно-практической конференции аспирантов БГПУ (Минск, 1993), семинарах кафедры математического анализа БГПУ (руководитель - доцент Стельмашук Н.Т.) и лаборатории теории чисел Академии наук Беларуси (руководитель - профессор Берник В.И.).

По теме диссертации опубликовано 6 работ, перечень которых приведен в конце автореферата.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, включающих II параграфов, и списка литературы из 69 наименований. Общий объём работы - 92 страницы машинописного текста.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении даётся краткий обзор литературы, связанной с темой диссертации, обосновывается актуальность темы диссертационной работы и кратко излагается ее содержание.

Первая глава посвящена понятиям трансфинитный диаметр и размерность Хаусдорфа, которые играют существенную роль в современных вопросах теории функции комплексного переменного как некоторые специфические способы измерения замкнутых множеств на комплексной плоскости.

В § I.I вводится понятие трансфинитного диаметра ограниченного бесконечно замкнутого множества точек на плоскости

. Опираясь на тождественность трансфинитного диаметра и постоянной Чебышева, приводятся несколько предложений на вычисление трансфинитного диаметра некоторых ограниченных замкнутых множеств, а также приводятся две теоремы, устанавливающие отношение трансфинитного диаметра к внешней мере Жордана, то есть к обычным мерам множества, принятым в анализе.

В § I.2 рассматривается понятие размерности Хаусдорфа, применение которого в диофантовых приближениях оказалось наиболее плодотворным. Кроме традиционных применений в теории чисел и теории функций, это понятие оказалось тесно связанным с энтропией в теории вероятностей, и в самое последнее время обнаружилось содержательное использование его в теории динамических систем при описании турбулентного течения жидкости.

§ I.3 посвящен связи трансфинитного диаметра и размерности Хаусдорфа. Доказана <u>теорема I</u>, позволяющая получать оценки размерности Хаусдорфа из оценок ёмкости некоторых множеств комплексных чисел:

Если $w > n(n+1)-1$ и C_w есть множество точек $\{z \in \mathbb{C} : |P(z)| < (H(P))^{-w}\}$ для бесконечного числа полиномов $P(z) \in \mathbb{Z}[z]$, то

$$\dim C_w \leq \frac{n(n+1)}{w+1}.$$

Во второй главе рассматриваются метрические свойства одного класса аналитических функций, играющие важную роль в вопросах изучения малых значений последовательностей функций.

В § 2.I рассматриваются диофантовы приближения на дифференцируемых многообразиях. Оценка снизу для модуля скалярного произведения $F(x) = (\bar{\varphi}, \bar{a})$, где $\bar{a} = (a_0, \ldots, a_n)$, $a_i \in \mathbb{Z}$, $\bar{\varphi} = (1, f_1(x), \ldots, f_n(x))$ и функции $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ n + I раз непрерывно дифференцируемые функции действительной переменной x, для которых вронскиан производных для почти всех x (в смысле меры Лебега) отличен от нуля, характеризует арифметические свойства точки x, лежащей на кривой $\gamma_1 \in R^n$. Определяя $K_{n,\gamma}(w)$ как множество $x \in R$, для которых неравенство $|F(x)| < H^{-w}$ имеет бесконечное число решений в векторах $\bar{a}$, через $\mu K_{n,\gamma}(w)$ обозначим меру Лебега множества $K_{n,\gamma}(w)$. Один из основополагающих фактов теории диофантовых приближений состоит в том, что $K_{n,\gamma}(n) = R$ для любой кривой γ_1. В ряде задач математической физики возникает необходимость получать оценки снизу для более общих, чем γ_1 кривых. При сделанных относительно γ предположениях Пяртли доказал, что $\mu K_{n,\gamma}(w) = 0$ при $w > n^2 + n - 1$. В.И.Берником был установлен тот же факт, но уже при $w > \frac{n^2}{4} + \frac{3}{2}n + \frac{5}{4}$.

В § 2.3 доказывается теорема 2, устанавливающая новую метрическую характеристику приближений точек комплексной кривой в $\mathbb{C}^n$ и являющаяся аналогом теоремы Пяртли для комплексного случая.

Теорема 2: Пусть $f_1(z), \ldots, f_n(z)$ аналитические функции в круге $K_{z_0}(z)$ с центром в точке z_0 радиуса $z > 0$. Положим $\bar{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in Z^{n+1}$, $\bar{a} \neq (0)$, $\bar{f}(z) = (1, f_1(z), \ldots, f_n(z))$, $F(z) = (\bar{a}, \bar{f}(z)) \neq 0$ - скалярное произведение, $H = \max_{0 \le i \le n} |a_i|$. Тогда для почти всех $z \in K_{z_0}(z)$ неравенство $|F(z)| < H^{-w}$ имеет при $w > 2n^2 + n - 3$ только конечное число решений в векторах $\bar{a}$.

Доказательство теоремы 2 базируется на большом количестве вспомогательных лемм, изложенных в § 2.2.

Заключительная третья глава содержит применение размерности Хаусдорфа при изучении множеств комплексных чисел с заданным порядком аппроксимации нуля значениями целочисленных многочленов.

В § 3.I приводятся леммы о многочленах, на которые будут опираться доказательства теорем об оценках снизу и сверху размерности Хаусдорфа множества $N_n(v)$. Одни из лемм непосредственно переносятся из области действительных в область комплексных чисел, доказательство других требует некоторых дополнительных рассуждений, связанных со спецификой поля комплексных чисел.

В большинстве задач, связанных с вычислением размерности Хаусдорфа, основную трудность составляет получение оценок снизу.

В § 3.2 вводится понятие регулярной системы точек, основанной в 1970 году Бэйкером и Шмидтом, позволяющей с единых позиций взглянуть на получение оценок снизу. Центр тяжести перемещается на конструирование регулярной системы точек, что во многих задачах весьма непросто. Но затем оценка снизу получается единообразно с помощью результата Бэйкера и Шмидта.

В § 3.3 доказывается <u>теорема 3</u> о регулярности множества алгебраически-комплексных чисел:

Для алгебраического α через $H(\alpha)$ обозначим высоту α. Положим $\psi(z) = z^{-1/2+\varepsilon_1 \frac{n}{2(n+1)}}$. Тогда множество алгебраических α с функцией $N(\alpha) = \psi(H(\alpha))^{-n-1}$ образует регулярную систему.

Обозначая через $K_n(v)$ множество комплексных ξ, таких, что для любого $v' < v$ существует бесконечно много алгебраически-комплексных чисел α степени не более n, удовлетворяющих неравенству $|\xi - \alpha| < (H(\alpha))^{-v-1}$ здесь же доказывается <u>теорема 4</u>:

При $v > \frac{n-1}{2}$ имеем

$$\dim K_n(v) \geq \frac{n+1}{v+1}.$$

В § 3.4 и 3.5 устанавливаются оценки сверху размерности Хаусдорфа множества $N_n(v)$, то есть множества комплексных чисел z, для которых неравенство $|P(z)| < H^{-v}$ имеет число решений в целочисленных полиномах $P(z)$, в различных диапазонах изменения v. Доказываются следующие теоремы:

<u>Теорема 5</u>: При $n = 2$ имеем $\dim N_2(v) \leq \frac{3}{v+1}$

<u>Теорема 6</u>: Пусть $P(z) \in P_n(H, \bar{l})$. Обозначим через $N_n^{(1)}(v)$ множество $z \in \mathbb{C}$, для которых неравенство $|P(z)| < H^{-v}$ имеет бесконечное число решений в полиномах $P(z)$ с условием $0 \leq p_1(P) \leq 1$. Тогда

$$\dim N_n^{(1)}(v) \leq \frac{n+1}{v+1}.$$

<u>Теорема 7</u>: Пусть $P(z) \in P_n(H, \bar{l})$ и $\frac{l_2}{T} > \frac{n}{4} - \frac{p_2}{2}$. Тогда для множества $N_n^{(2)}(v)$ имеем

$$\dim N_n^{(2)}(v) \leq \frac{n+1}{v+1}.$$

Учитывая доказанные частные случаи, считаем в дальнейшем: $n \geq 3$, $\frac{l_2}{T} \leq \frac{n}{4} - \frac{p_2}{2}$, $p_1 > 1$.

<u>Теорема 8</u>: При $\frac{n-1}{2} < v < 4n+3$ имеем

$$\dim N_n(v) \leq \frac{n+1}{v+1}.$$

В § 3.5 доказывается <u>теорема 9</u>:
При $v \geq 4n+3$ имеем

$$\dim N_n(v) \geq \frac{n+1}{v+1}.$$

Параграфы 3.4 и 3.5 дают оценку размерности Хаусдорфа множества $N_n(v)$ во всем диапазоне изменения параметра v.

Теоремы 8, 9 и 4 дают окончательный результат в анализе размерности Хаусдорфа множества $N_n(v)$:

$$\dim N_n(v) = \frac{n+1}{v+1}.$$

<u>На защиту выносятся следующие результаты</u>:

I. Использование оценок трансфинитного диаметра для получения оценок сверху размерности Хаусдорфа множеств комплексных чисел, удовлетворяющих некоторым диофантовым ограничениям.

2. Оценка снизу для показателя степени, начиная с которой заданная аппроксимация нуля значениями аналитических функций, выполняется только для множества нулевой меры.

3. Получение точного значения размерности Хаусдорфа множества комплексных чисел с заданной мерой трансцендентности.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

I. Берник В.И., Сакович Н.В. Регулярные системы комплексных чисел.//Докл.Акад.наук Беларуси. - I994. - Т.38, № 5. - С.I0-I3.

2. Берник В.И., Сакович Н.В. Трансфинитный диаметр и размерность Хаусдорфа некоторых множеств комплексных счисел. //Линейные функционально-дифференциальные соответствия: Сб.научн.ст. /Минский гос.пед.ин-т; Редсовет Ю.А.Быкодоров и др. - Минск, I993. - С.7I-75.

3. Ковалевская Э.И., Сакович Н.В. Аналог теоремы Пяртли для аналитических функций комплексного переменного. //Изв.Акад.наук Беларуси. Сер.физ.-мат.наук. - I994. - № 4. - С.I6-20.

4. Ковалевская Э.И., Сакович Н.В. О метрических свойствах одного класса аналитических функций. //Актуальные проблемы обучения и воспитания. Сб.ст. /Могилев. гос.пед. ин-т; Отв. ред. М.В.Мащенко. - Могилев, I993. - С.95-98.

5. Ковалевская Э.И., Сакович Н.В. Применение метрической теории диофантовых приближений в поле комплексных чисел к задачам математической физики. //Международная математическая конференция, посвященная 200-летию со дня рождения Н.И.Лобачевского, 4-8 декабря I992 г.. Тез.докл.: В 2 ч. /Акад.наук Респ.Беларусь, Белорус. гос. ун-т. Минский гос. пед. ин-т. - Минск, I993. - Ч.I. - С.I6.

6. СаковIч Н.У. АцэнкI зверху памернасцI Хаусдорфа мноствау камплексных лIкау, якIя маюць зададзеную меру трансцэндэнтнасцI. //Удасканаленне прафесIйна-педагагIчнай дзейнасцI у сучаснай сIстэме адукацыI: Зб. навук. арт. /БеларускI дзяржауны пед. ун-т, Рэдсавет: Б.А.БенедзIктау, М.Т.Стэльмашук I інш. - Мінск, I994. - С.I95-29I.

7. Сакович Н.В. Размерность Хаусдорфа и распределение значений целочисленных многочленов в $\mathbb{C}^n$ //Изв. Акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат.наук. - 1995. № 2. - С.11-14.

Рэзюме

Саковіч Наталля Уладзіміраўна

"Апраксімацыя нуля значэннямі аналітычных функцый спецыяльнага выгляду"

Трансфінітны дыяметр, мера Лебега, памернасць Хаусдорфа, дыяфантавы набліжэнні, рэгулярная сістэма.

Даследаваны тэарэтыка-мноствавыя характарыстыкі мностваў камплексных лікаў, у якіх модулі аналітычных функцый спецыяльнага выгляду з зададзеным парадкам апраксімуюць нуль. Атрымана сувязь паміж трансфінітным дыяметрам і памернасцю Хаусдорфа такіх мностваў. Атрыманы аналаг тэарэмы Пяртлі з указаннем мяжы пераходу у мноства меры нуль. Пабудавана рэгулярная сістэма камплексных алгебраічных лікаў. Даказаны камплексны варыянт гіпотэзы Бэйкера-Шмідта аб памернасці Хаусдорфа мностваў лікаў з зададзенай мерай трансцэндэнтнасці.

Summary

Sakovich Natalija Vladimirovna

"Approximation of zero by values of analytic special form functions"

The capacity, Lebesque measure, Hausdorff dimension, Diophantine approximation, regular system

We investigate theoretic-set characteristics of complex number sets where modulus of analytic special form functions approximate zero with given order. We find a connection between the capacity and Hausdorff dimensions of these sets. We get the analogy of Pjartli's theorem where a boundary of a passage into the set of zero measure is indicated. We prove a complex variant of Baker-Schmidt's hypothesis about Hausdorff dimension of number sets with given measure of transcendence.

Резюме
Сакович Наталья Владимировна
"Аппроксимация нуля значениями
аналитических функций специального вида"

Трансфинитный диаметр, мера Лебега, размерность Хаусдорфа, диофантовы приближения, регулярная система.

Исследованы теоретико-множественные характеристики множеств комплексных чисел, в которых модули аналитических функций специального вида с заданным порядком аппроксимируют нуль. Установлена связь между трансфинитным диаметром и размерностью Хаусдорфа таких множеств. Получен аналог теоремы Пяртли с указанием границы перехода во множество меры нуль. Построена регулярная система комплексных алгебраических чисел. Доказан комплексный вариант гипотезы Бэйкера-Шмидта о размерности Хаусдорфа множеств чисел с заданной мерой трансцендентности.

Сакович Наталья Владимировна

Аппроксимация нуля значениями аналитических функций
специального вида

Подписано к печати 17.05.95. Формат 60x84 I/I6
Бумага № I. Объем п.л. Заказ №233. Тираж I00 экз.
Отпечатано на ротапринте Белгосуниверситета
220080 Минск, ул.Бобруйская, 7.