Государственное научное учреждение
"Институт математики Национальной академии наук Беларуси"

УДК 517.926

Кожуренко Наталья Владимировна

ГРАНИЦЫ ПОДВИЖНОСТИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ВОЗМУЩЕНИЯМИ, СУММИРУЕМЫМИ НА ПОЛУОСИ

01.01.02 — дифференциальные уравнения

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Минск, 2006

Работа выполнена в Государственном научном учреждении "Институт математики Национальной академии наук Беларуси"

Научный руководитель: доктор физико-математических наук
Макаров Евгений Константинович
Институт математики НАН Беларуси,
отдел дифференциальных уравнений

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Мазаник Сергей Алексеевич
Белорусский государственный университет,
факультет прикладной математики и информатики, кафедра высшей математики

кандидат физ.-мат. наук,
доцент Ласый Петр Григорьевич
Белорусский национальный технический университет, кафедра высшей математики №2

Оппонирующая организация: Витебский государственный университет им.П.М. Машерова

Защита состоится "20" октября 2006 г. в 14 00 на заседании совета по защите диссертаций Д 01.02.02 при Институте математики НАН Беларуси по адресу: 220072, Минск, ул. Сурганова, 11, телефон ученого секретаря совета: 284-19-63.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики НАН Беларуси

Автореферат разослан "14" сентября 2006 г.

Ученый секретарь совета
по защите диссертаций Д.01.01.02
доктор физико-математических наук Н.А. Лиходед

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертация посвящена исследованию поведения старшего показателя линейных дифференциальных систем с возмущениями, интегрируемыми со степенью и весом.

Актуальность темы диссертации. Современная асимптотическая теория и теория устойчивости берет свое начало в диссертации А. М. Ляпунова «Общая задача об устойчивости движения». Дальнейшее развитие этой теории и ее приложений связано с работами П. Боля, О. Перрона, К. П. Персидского и, позднее, В. М. Миллионщикова, Б. Ф. Былова, Р. Э. Винограда, Д. М. Гробмана, Ю. С. Богданова, Н. А. Изобова, Р. А. Прохоровой, М. И. Рахимбердиева, Н. Х. Розова, Е. Л. Тонкова, И. Н. Сергеева, Е. А. Барабанова, С. А. Мазаника, Л. Я. Адриановой, Е. К. Макарова, С. Н. Поповой, а также зарубежных математиков Х. Л. Массеры, Дж. Лилло, Л. Маркуса, Р. Конти, В. А. Коппеля, С. Зигмунда, В. Климана, П. Колониуса и многих других.

Основным понятием асимптотической теории линейных дифференциальных систем является понятие характеристического показателя Ляпунова, а одной из важнейших ее задач — построение достижимых оценок для показателей возмущенных систем с возмущениями, принадлежащими различным классам. Наиболее значимые результаты в этом направлении получены В. М. Миллионщиковым, Р. Э. Виноградом, Б. Ф. Быловым, Н. А. Изобовым, И. Н. Сергеевым, Е. А. Барабановым.

Впервые неустойчивость показателей при малых возмущениях была отмечена в работах О. Перрона. Оценка сверху для старшего показателя возмущенной системы с малыми возмущениями, так называемый центральный показатель $\Omega(A)$, была построена Р. Э. Виноградом. Достижимость этой оценки доказана В. М. Миллионщиковым с помощью его, ставшего уже классическим, метода поворотов. Н. А. Изобовым построен алгоритм вычисления старшего сигма-показателя ∇_σ, являющегося точной верхней границей подвижности показателей дифференциальных систем с σ-возмущениями. Системы с возмущениями, равномерно ограниченными монотонной функцией, были рассмотрены Е. А. Барабановым. М. И. Рахимбердиев и Н. Х. Розов изучали системы с интегрально малыми в среднем возмущениями. Исследование линейных систем с бесконечно малыми в среднем возмущениями было проведено И. Н. Сергеевым. Классы возмущений, определяемых интегральными условиями, изучались в работах Е. А. Барабанова, Е. К. Макарова, И. В. Марченко и др. В частности, для возмущений, суммируемых (а также бесконечно малых в среднем) на полуоси с весом, в монотонном случае было получено полное решение задачи, а в случае немонотонного веса — достаточные условия, при которых применим общий алгоритм Н. А. Изобова. Указанные условия оказались достаточно жесткими за счет того, что соответствующие им оценки являются достижимыми с помощью ограниченных на полуоси возмущений из рассматриваемых классов. Отсюда возникает необходимость ослабления этих условий путем использования неограниченных возмущений для доказательства достижимости получаемых оценок. Кроме того, за пределами перечисленных исследований остались вопросы, связанные с поведением характеристических показателей линейных дифференциальных систем, с возмущениями из классов суммируемых и бесконечно малых в среднем с весом и степенью, большей единицы. Частичное решение этих задач и содержит настоящая работа.

Связь работы с крупными научными программами, темами. Диссертационная работа выполнялась в рамках задания «Асимптотические и конструктивные методы исследования дифференциальных систем» («Математические структуры - 09», № гос. рег. 2003272) Государственной программы фундаментальных исследований «Исследование основных математических структур и проблем математического моделирования» (ГПФИ «Математические структуры»).

Цель и задачи исследования. Целью диссертации является получение достижимых оценок для старшего показателя линейных дифференциальных систем с возмущениями из классов суммируемых на полуоси со степенью и весом и бесконечно малых в среднем со степенью и весом. Для реализации этой цели требуется получить оценки сверху для старшего показателя линейных дифференциальных систем из указанных выше классов возмущений и доказать достижимость построенных оценок.

Объект и предмет исследования. Объект исследования — линейные дифференциальные системы с возмущениями, определяемыми интегральными условиями. Предметом исследования является поведение показателей таких систем под действием возмущений.

Методология и методы проведенного исследования. Основным методом, применяемым в работе является метод поворотов В. М. Миллионщикова.

Научная новизна и значимость полученных результатов.

— Построены оценки для старшего показателя линейных дифференциальных систем с возмущениями из классов суммируемых на полуоси и бесконечно малых в среднем со степенью и монотонным весом. Доказана достижимость этих оценок.

— В случае немонотонного веса получены достаточные условия для того, чтобы точная граница подвижности для старшего показателя могла быть вычислена с помощью алгоритма Н. А. Изобова.

— Построены семейства неограниченных возмущений, позволяющие доказать достижимость верхних оценок, обеспечиваемых указанным алгоритмом, в тех случаях, когда она не может быть доказана с помощью ограниченных возмущений, принадлежащих рассматриваемым классам.

Эти результаты являются новыми в теории характеристических показателей Ляпунова линейных дифференциальных систем. Они существенно расширяют совокупность классов возмущений, для которых известна соответствующая точная верхняя граница подвижности старшего показателя.

Практическая значимость полученных результатов. Работа имеет теоретический характер, ее результаты могут быть использованы при дальнейшем исследовании возмущенных линейных систем. Они могут найти применение при чтении спецкурсов по теории дифференциальных уравнений и теории устойчивости.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту.

— Вычисление точной верхней границы для старшего показателя линейных дифференциальных систем с возмущениями из классов суммируемых на полуоси и бесконечно малых в среднем со степенью и монотонным весом.

— Доказательство достаточных условий применимости алгоритма Н. А. Изобова для вычисления достижимой в подклассе ограниченных возмущений верхней границы подвижности старшего показателя линейных систем с возмущениями из этих же классов в случае немонотонной весовой функции.

— Получение достаточных условий применимости указанного алгоритма для получения достижимой верхней оценки старшего показателя линейных систем с неограниченными возмущениями из рассматриваемых классов.

Личный вклад соискателя. Все основные результаты диссертации получены соискателем самостоятельно. Теорема 2.1 из работы [1], приведенная в диссертации для полноты изложения, принадлежит научному руководителю Е. К. Макарову. Теорема 2.2 принадлежит в равной мере диссертанту и соавторам Е. К. Макарову и И. В. Марченко, следствие 2.3 получено диссертантом совместно с И. В. Марченко. Другие результаты, включенные в диссертацию из совместных работ, получены автором.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на международной конференции, посвященной 103-летию со дня рождения И. Г. Петровского (XXI совместное заседание Московского математического общества и семинара им. И.Г. Петровского, Москва, 2004), на IX Белорусской математической конференции (Гродно, 2004), на международной математической конференции «Еругинские чтения–X» (Могилев, 2005); на семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова (Москва, 2004); на международной математической конференции «Четвертые научные чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям», посвященной 85-летию со дня рождения Ю.С. Богданова (Минск, 2005); на семинаре отдела дифференциальных уравнений Института математики НАН Беларуси (Минск, 2003 — 2005).

Опубликованность результатов. Основные результаты диссертации опубликованы в 10 печатных работах, среди которых 4 журнальных статьи (3 из них написаны без соавторов), 1 аннотация в периодическом научном журнале и 5 публикаций в сборниках тезисов докладов математических конференций. Общее количество опубликованных материалов — 36 страниц.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из общей характеристики работы, трех глав, заключения, списка использованных источников. Полный объем диссертации 79 страниц машинописного текста, из которых 6 страниц занимает список использованных источников, состоящий из 62 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В первой главе диссертации содержится краткий обзор важнейших результатов, связанных с изучением свойств характеристических показателей линейных дифференциальных систем. Результаты, непосредственно примыкающие к теме данного исследования, представлены более подробно с включением формулировок основных теорем.

В диссертации рассматривается линейная дифференциальная система

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

с кусочно-непрерывной ограниченной матрицей коэффициентов A такой, что $\|A(t)\| \leqslant M < +\infty$ при всех $t \geqslant 0$, и показателями

$$\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A).$$

Наряду с системой (1) рассматривается возмущенная система

$$\dot{y} = A(t)y + Q(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

с кусочно-непрерывной матрицей возмущений Q, удовлетворяющей при всех $t \geqslant 0$ условию интегральной ограниченности, т.е. неравенству

$$\int\limits_t^{t+1} \|Q(\tau)\| d\tau \leqslant C_Q < +\infty,$$

где C_Q — некоторая константа, зависящая от Q. Для показателей системы (2) будем использовать обозначения

$$\lambda_1(A+Q) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A+Q).$$

В основной части диссертационной работы проводится исследование поведения показателей линейных дифференциальных систем (2) с возмущениями из следующих классов:

1) класс $\mathfrak{L}^p[\varphi]$, бесконечно малых в среднем со степенью и весом возмущений, состоящий из множества кусочно-непрерывных и интегрально ограниченных матриц Q удовлетворяющих условию

$$J_p(Q) := \varlimsup_{t \to +\infty} t^{-1} \int\limits_0^t \varphi(\tau) \|Q(\tau)\|^p d\tau = 0.$$

2) класс $\mathfrak{I}^p[\varphi]$, возмущений, суммируемых со степенью и весом, состоящий из множества кусочно-непрерывных матриц Q удовлетворяющих условию

$$\int\limits_0^\infty \varphi(t) \|Q(t)\|^p dt < +\infty,$$

где φ — положительная кусочно-непрерывная функция, определенная на промежутке $[0,+\infty)$, а $p \geqslant 1$ — некоторое число.

3) класс $\mathfrak{I}^p$, возмущений, суммируемых со степенью.

Полагая матрицу коэффициентов невозмущенной системы (1) фиксированной, обозначим через

$$\Lambda(\mathfrak{M}) := \sup\{\lambda_n(A+Q) : Q \in \mathfrak{M}\},$$

точную верхнюю границу подвижности старшего показателя системы (2) с возмущениями из класса $\mathfrak{M}$.

Во второй главе диссертации вычислены точные верхние границы для старшего показателя системы с возмущениями из классов $\mathfrak{I}^p$, $\mathfrak{L}^p[\varphi]$, $\mathfrak{I}^p[\varphi]$, где $p > 1$, в монотонном случае.

Раздел 2.1 включает ряд утверждений, на которых далее основывается построение оценок сверху для величин $\Lambda(\mathfrak{M})$, где $\mathfrak{M}$ — один из указанных выше классов возмущений.

Пусть $X(t,\tau)$ и $Y(t,\tau)$ — матрицы Коши систем (1) и (2) соответственно. Обозначим

$$X_k = X(k+1,k),\ Y_k = Y(k+1,k),$$

где $k \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Пусть, кроме того, d — произвольное множество неотрицательных целых чисел. Будем считать, что при $d \neq \varnothing$ элементы множества d упорядочены в порядке возрастания

$$d_1 < \ldots < d_s,$$

где s — количество элементов в d, т.е. $s = |d|$. Возьмем некоторую функцию

$$\beta : \mathbb{N}_0 \to (0,+\infty),$$

и для любых чисел $m \geqslant l$ из $\mathbb{N}_0$ и всевозможных множеств $d \subset [l,m)$, определим величину

$$\Gamma_d^\beta(m,l) = \|X(m,d_s)\|\beta(d_s)\ldots\|X(d_2,d_1)\|\beta(d_1)\|X(d_1,l)\|,$$

где $\Gamma_d^\beta(m,l) = \gamma_0\Gamma_d^\beta(m,0)$, где $\gamma_0 > 0$.

Следующая теорема получена совместно с Е.К. Макаровым и И.В. Марченко и дает способ, построения оценки сверху для старшего показателя линейной дифференциальной системы (2) при произвольных интегрально ограниченных возмущениях. Сформулированный в ней и в следствии 2.5 способ получения верхних оценок для старшего показателя линейных систем с возмущениями называется алгоритмом Н. А. Изобова, так как он аналогичен алгоритму вычисления старшего сигма-показателя, предложенному Н. А. Изобовым.

Теорема 2.2[1, 7] *Пусть заданы возмущения Q и некоторая положительная функция β, определенная на множестве $\mathbb{N}_0$, такая, что справедливо равенство*

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\, m^{-1}\sum_{k=0}^{m-1}\beta^{-1}(k)\|V_k\|=0,$$

в котором матрицы V_k определяются равенствами

$$V_k=\int_k^{k+1}X(k,\tau)Q(\tau)Y(\tau,k)d\tau.$$

Тогда для старшего показателя системы 2 выполняется оценка

$$\lambda_n(A+Q)\leqslant\overline{\lim_{m\to\infty}}\, m^{-1}\ln\eta_m^*,$$

где последовательность η_m^*, $m\in N_0$, определяется равенством

$$\eta_m^*=\max_{d\subset(m)}\Gamma_d^{\beta}(m),$$

причем величина $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\, m^{-1}\ln\eta_m^*$ не зависит от выбора $\gamma_0>0$.

Из теоремы 2.2 в вытекает

Следствие 2.5[1] *В условиях теоремы 2.2 для старшего показателя возмущенной системы имеет место неравенство*

$$\lambda_n(A+Q)\leqslant\overline{\lim_{m\to\infty}}\, m^{-1}\ln\eta_m,$$

в котором последовательность η_m при $m\in\mathbb{N}$ определяется рекуррентным соотношением

$$\eta_m=\max_{k<m}(\|X(m,k)\|\beta(k)\eta_k),$$

$k\in\mathbb{N}_0$, *с произвольным начальным условием $\eta_0>0$, причем величина $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\, m^{-1}\ln\eta_m$ не зависит от выбора η_0.*

В разделах 2.2—2.4 с использованием полученных в разделе 2.1 результатов вычислены величины $\Lambda(\mathfrak{J}^p)$, $\Lambda(\mathfrak{L}^p[\varphi])$, $\Lambda(\mathfrak{J}^p[\varphi])$, где $p>1$, в случае монотонной функции φ.

Теорема 2.3[1,7] *При всех* $p>1$ *справедливо равенство*

$$\Lambda(\mathfrak{J}^p)=\overline{\lim_{m\to\infty}}\, m^{-1}\ln\eta_m,$$

в котором последовательность η_m *при* $m>0$ *удовлетворяет рекуррентному соотношению*

$$\eta_m=\max_{k<m}(\|X(m,k)\|k^{-1/p}\eta_k),$$

$k\in\mathbb{N}_0$ *с произвольным начальным условием* $\eta_0>0$.

Теорема 2.4[2,8] *Если функция* φ *кусочно-непрерывна и возрастает к* $+\infty$ *на промежутке* $[0,+\infty)$, *то при всех* $p>1$ *справедливо равенство*

$$\Lambda(\mathfrak{L}^p[\varphi])=\overline{\lim_{m\to\infty}}\, m^{-1}\ln\eta_m,$$

где последовательность η_m *при* $m>0$ *определяется рекуррентным соотношением*

$$\eta_m=\max_{k<m}(\|X(m,k)\|\varphi^{-1/p}(k)\eta_k),$$

$k\in\mathbb{N}_0$, *с произвольным начальным условием* $\eta_0>0$.

Теорема 2.5[2,8] *Если функция* φ *кусочно-непрерывна и возрастает к* $+\infty$ *на промежутке* $[0,+\infty)$, *то при всех* $p>1$ *справедливо равенство*

$$\Lambda(\mathfrak{J}^p[\varphi])=\overline{\lim_{m\to\infty}}\, m^{-1}\ln\eta_m,$$

в котором последовательность η_m *при* $m>0$ *удовлетворяет рекуррентному соотношению*

$$\eta_m=\max_{k<m}(\|X(m,k)\|k^{-1/p}\varphi^{-1/p}(k)\eta_k),$$

$k\in\mathbb{N}_0$, *с произвольным начальным условием* $\eta_0>0$.

В третьей главе диссертации рассматриваются классы возмущений, определяемые условиями с немонотонной весовой функцией. Верхние оценки для старшего показателя линейной системы с такими возмущениями получаются с помощью алгоритма Н. А. Изобова, а доказательство их достижимости оказывается возможным провести лишь при некоторых дополнительных условиях на весовую функцию, что обуславливается большей сложностью поведения немонотонных функций.

В разделе 3.1 получены оценки сверху для старшего показателя линейных дифференциальных систем с возмущениями, бесконечно малыми в среднем и суммируемыми со степенью и немонотонным весом и доказана их достижимость в подклассе ограниченных возмущений.

Пусть φ — локально суммируемая положительная функция, определенная на промежутке $[0,+\infty)$, а $\varphi_k = \operatorname{ess\,inf}\{\varphi(t) : k \leqslant t \leqslant k+1\}$, $k \in \mathbb{N}_0$ — существенный минимум этой функции на отрезке $[k, k+1]$.

Теорема 3.2[3, 9] *Пусть функция φ кусочно-непрерывна и $\varphi(t) \geqslant 2^p$ при всех $t \in [0,+\infty)$. Если при некотором положительном $\varepsilon_0 < 1$ для любого $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0)$ выполняется условие*

$$\lim_{m\to+\infty} m^{-1} \sum_{k=1}^{m} \varphi_k^{-(1+\varepsilon)} \int_{k-1}^{k} \varphi(\tau)d\tau = 0,$$

то при всех $p > 1$ справедливо равенство

$$\Lambda(\mathfrak{L}^p[\varphi]) = \overline{\lim_{m\to\infty}}\, m^{-1} \ln \eta_m,$$

где последовательность η_m при $m > 0$ определяется рекуррентным соотношением

$$\eta_m = \max_{k<m}(\|X(m,k)\| \varphi_k^{-1/p} \eta_k),$$

$k \in \mathbb{N}_0$, с произвольным начальным условием $\eta_0 > 0$.

Теорема 3.4[3, 9] *Пусть функция φ кусочно-непрерывна на промежутке $[0,+\infty)$ и при всех $k \in \mathbb{N}$ справедлива оценка $k\varphi_k \geqslant 2^p$. Если при некотором положительном $\varepsilon_0 < 1$ для любого $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0)$ выполняется неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-(1+\varepsilon)} \varphi_k^{-(1+\varepsilon)} \int_{k-1}^{k} \varphi(t)dt < +\infty,$$

то при всех $p > 1$ справедливо равенство

$$\Lambda(\mathfrak{I}^p[\varphi]) = \overline{\lim_{m\to\infty}}\, m^{-1} \ln \eta_m,$$

где последовательность η_m *при* $m > 0$ *определяется рекуррентным соотношением*

$$\eta_m = \max_{k<m}(||X(m,k)||k^{-1/p}\varphi_k^{-1/p}\eta_k),$$

$k \in \mathbb{N}_0$, *с произвольным начальным условием* $\eta_0 > 0$.

В разделе 3.2 для неограниченных возмущений из классов $\mathfrak{L}[\varphi]$ и $\mathfrak{I}[\varphi]$, получены условия, достаточные для вычислимости верхней границы для старшего показателя по общему алгоритму.

Пусть $t_0 \geqslant 0$, $T \geqslant 0$ — произвольные числа и $a = \operatorname{ess\,inf}\{\varphi(t) : t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T\}$ — существенный инфимум функции φ на отрезке $[t_0, t_0 + T]$. Под матрицей O_α поворота на угол α в пространстве $\mathbb{R}^n$ будем понимать матрицу линейного оператора, действующего поворотом на угол α в некоторой заданной плоскости и совпадающего с тождественным преобразованием на ортогональном дополнении к этой плоскости.

Лемма 3.1[4] *Для любой матрицы* O_α *существует семейство возмущений* Q_h , $h \in (0, T^*]$, *где* $T^* < T$, *удовлетворяющих следующим условиям:*

1) каждое возмущение Q_h *определено всюду на полуоси* $[0, +\infty)$, *но отлично от нуля лишь на некотором отрезке длины* h , *содержащемся в отрезке* $[t_0, t_0 + T]$;

2) для матрицы Коши Y_h *соответствующей возмущенной системы имеет место представление*

$$Y_h(t_0 + T, t_0) = X(t_0 + T, t_0)(O_\alpha + \Delta_h),$$

в котором Δ_h — *некоторая матрица, зависящая от* h *таким образом, что* $\Delta_h \to 0$ *при* $h \to 0$;

3) справедлива оценка

$$\overline{\lim_{h\to 0}} \int\limits_{t_0}^{t_0+T} \varphi(\tau)||Q_h(\tau)||d\tau \leqslant ae^{2MT}|\alpha|.$$

Пусть $\varepsilon \in (0, \pi/2]$. Решение $y(t)$ называется быстрым на отрезке $[t_0, t_0 + T]$, если выполняется неравенство

$$||y(t_0 + T)|| \geqslant (1/2)||y(t_0)||||X(t_0 + T, t_0)|| \sin\varepsilon$$

и максимальным на этом отрезке, если справедливо равенство

$$\|y(t_0+T)\| = \|y(t_0)\|\|X(t_0+T,t_0)\|.$$

Лемма 3.2[4] *Пусть* $T \geqslant 1$. *Для любого медленного на отрезке* $[t_0, t_0+T]$ *решения* $x(t)$ *невозмущенной системы и любого числа* $\varepsilon \in (0, \pi/4]$ *существует возмущение* Q, *сосредоточенное на единичном отрезке* $[t_0, t_0+1]$, *такое, что решение соответствующей возмущенной системы с тем же начальным вектором* $x(t_0)$ *является быстрым на отрезке* $[t_0, t_0+T]$, *и выполняется оценка*

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+1} \varphi(\tau)\|Q(\tau)\|d\tau \leqslant 4a(t_0)\varepsilon e^{2M},$$

где $a(t_0) = \operatorname{ess\,inf}\{\varphi(t) : t_0 \leqslant t \leqslant t_0+1\}$.

Положим

$$\Phi(m,l) := \max_{d\subset[l,m)} \Gamma_d^\beta(m,l).$$

В дальнейшем будем говорить, что множество $G \subset [l,m)\bigcap\mathbb{N}_0$ реализует величину $\Phi(m,l)$, если

$$\Gamma_G^\beta(m,l) = \Phi(m,l).$$

Будем также полагать, что T_k, $k \in \mathbb{N}_0$, — некоторая монотонно возрастающая последовательность неотрицательных целых чисел, причем $T_0 = 0$. Обозначим $\Phi_k := \Phi(T_k, T_{k-1})$.

Лемма 3.3[4] *Пусть функция* β *такова, что* $\beta(k) \leqslant 1/4$ *для всех* $k \in \mathbb{N}_0$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует возмущение* Q *такое, что возмущенная система (2) имеет решение* y, *удовлетворяющее при всех* $k \in \mathbb{N}$ *оценкам*

$$\|y(T_k)\|/\|y(T_{k-1})\| \geqslant \beta^{1+\varepsilon}(T_{k-1})\Phi_k e^{-2M\varepsilon(T_k-T_{k-1})},$$

а для матрицы Q *при каждом* $t \in [i, i+1]$, $i \in \mathbb{N}_0$, *справедливо неравенство*

$$\int\limits_{i}^{i+1} \varphi(\tau)\|Q(\tau)\|d\tau \leqslant 4a(i)e^{2M}\pi\beta^{1+\varepsilon}(i),$$

где $a(i) = \operatorname{ess\,inf}\{\varphi(t) : i \leqslant t \leqslant i+1\}$.

Теорема 3.5[4,10] *Пусть функция* φ *при всех* $t \geqslant 0$ *удовлетворяет неравенству* $\varphi(t) \geqslant 4$. *Если при некотором положительном* $\varepsilon_0 < 1$ *для каждого* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *выполняется равенство*

$$\lim_{m\to\infty} m^{-1} \sum_{k=0}^{m+1} a^{-\varepsilon}(k) = 0,$$

то справедлива формула

$$\Lambda(\mathfrak{L}[\varphi]) = \overline{\lim_{m\to\infty}}\, m^{-1} \ln \eta_m,$$

где последовательность η_m *при* $m > 0$ *определяется рекуррентным соотношением*

$$\eta_m = \max_{k<m}(\|X(m,k)\| a^{-1}(k)\eta_k),$$

$k \in \mathbb{N}_0$, *с произвольным начальным условием* $\eta_0 > 0$.

Для формулировки результата, касающегося класса возмущений $\mathfrak{I}[\varphi]$, нам потребуется величина $v(k)$, $k \in \mathbb{N}_0$, определяемая равенствами $v(0) = 1/4$, $v(k) = k^{-1}a^{-1}(k)$, $k \in \mathbb{N}$.

Теорема 3.6[4, 10] *Пусть функция* φ *такова, что* $v(k) \leqslant 1/4$, *при всех* $k \in \mathbb{N}$. *Если при некотором положительном* $\varepsilon_0 < 1$ *для каждого* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *выполняется условие*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} v^{-\varepsilon}(k) < +\infty,$$

то справедлива формула

$$\Lambda(\mathfrak{I}[\varphi]) = \overline{\lim_{m\to\infty}}\, m^{-1} \ln \eta_m,$$

где последовательность η_m *при* $m > 0$ *определяется рекуррентным соотношением*

$$\eta_m = \max_{k<m}(\|X(m,k)\| v(k)\eta_k),$$

$k \in \mathbb{N}_0$, *с произвольным начальным условием* $\eta_0 > 0$.

В разделе 3.3 достаточные условия получены для неограниченных возмущений из классов $\mathfrak{L}^p[\varphi]$ и $\mathfrak{I}^p[\varphi]$.

В случае $p > 1$ оказывается невозможным произвольно уменьшать длину h того промежутка, на котором $Q_h \neq 0$, так как при этом сильно возрастает норма возмущения, и условие его принадлежности требуемому классу перестает выполняться. Это обстоятельство, в свою очередь, приводит к необходимости наложения существенно более жестких условий на свойства функции φ, чем те, что были использованы в предыдущем пункте. Ввиду этого всюду далее будем считать, что функция φ непрерывна и, более того, ее логарифм $\ln\varphi$ равномерно непрерывен на полуоси $[0,+\infty)$.

Лемма 3.4[4] *Для возмущений Q_h, построенных в лемме 3.1, справедливы оценки*

$$\|\Delta_h\| \leqslant e^{2MT}(e^{Mh}-1)$$

и

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+T} \varphi(t)\|Q_h(t)\|^p dt \leqslant 2^p(M^p + e^{2MTp}|\alpha|^p h^{-p})ahr_\varphi(h),$$

где $a = \min\{\varphi(t) : t \in [t_0, t_0+T]\}$.

Лемма 3.5[4] *Пусть* $T \geqslant 1$. *Для любого медленного на отрезке* $[t_0, t_0+T]$ *решения* $x(t)$ *невозмущенной системы и любого числа* $\varepsilon \in (0, \pi/4]$ *существует возмущение* Q, *сосредоточенное на единичном отрезке* $[t_0, t_0+1]$, *такое, что решение соответствующей возмущенной системы с тем же начальным вектором* $x(t_0)$ *является быстрым на отрезке* $[t_0, t_0+T]$, *и выполняется оценка*

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+1} \varphi(\tau)\|Q(\tau)\|^p d\tau \leqslant Ka(t_0)\varepsilon,$$

где $a(t_0) = \min\{\varphi(t) : t \in [t_0, t_0+1]\}$, *причем число* $K > 0$ *может быть выбрано одним и тем же для всех* $t \geqslant 0$.

Следствие 3.1[4] *В условиях леммы 3.3 при сделанных предположениях о функции* φ *существует возмущение* Q, *обеспечивающее выполнение условия*

$$\|y(T_k)\|/\|y(T_{k-1})\| \geqslant \beta^{1+\varepsilon}(T_{k-1})\Phi_k e^{-2M\varepsilon(T_k-T_{k-1})},$$

и удовлетворяющее оценке

$$\int\limits_{i}^{i+1} \varphi(\tau)\|Q(\tau)\|^p d\tau \leqslant K\pi a(i)\beta^{1+\varepsilon}(i),$$

где $a(i) = \min\{\varphi(t) : i \leqslant t \leqslant i+1\}$.

Теорема 3.7[4] *Пусть функция* φ *удовлетворяет сделанным предположениям и такова, что при всех* $t \geqslant 0$ *справедлива оценка* $\varphi(t) \geqslant 4^p$. *Если при некотором положительном* $\varepsilon_0 < 1$ *для каждого* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *выполняется равенство*

$$\lim_{m\to\infty} m^{-1} \sum_{k=0}^{m+1} a^{1/q-\varepsilon}(k) = 0,$$

то справедлива формула

$$\Lambda(\mathfrak{L}^p[\varphi]) = \overline{\lim_{m\to\infty}}\, m^{-1} \ln \eta_m,$$

где последовательность η_m *при* $m > 0$ *определяется рекуррентным соотношением*

$$\eta_m = \max_{k<m}(\|X(m,k)\| a^{-1/p}(k)\eta_k),$$

$k \in \mathbb{N}_0$, *с произвольным начальным условием* $\eta_0 > 0$.

Теорема 3.8[4] *Пусть функция* φ *удовлетворяет сделанным предположениям и такова, что* $v(k) \leqslant 1/4^p$, *при всех* $k \in \mathbb{N}$. *Если при некотором положительном* $\varepsilon_0 < 1$ *для каждого* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *выполняется условие*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} v^{-1/q+\varepsilon}(k) < +\infty,$$

то справедлива формула

$$\Lambda(\mathfrak{J}^p[\varphi]) = \overline{\lim_{m\to\infty}}\, m^{-1} \ln \eta_m,$$

где последовательность η_m *при* $m > 0$ *определяется рекуррентным соотношением*

$$\eta_m = \max_{k<m}(\|X(m,k)\| v^{1/p}(k)\eta_k),$$

$k \in \mathbb{N}_0$, *с произвольным начальным условием* $\eta_0 > 0$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертация посвящена исследованию поведения старшего показателя линейных дифференциальных систем с возмущениями, интегрируемыми со степенью и весом. Получены следующие результаты:

1. Вычислена точная верхняя граница для старшего показателя линейных дифференциальных систем с возмущениями из классов суммируемых на полуоси и бесконечно малых в среднем [1, 2, 5, 6, 7, 8].

2. Доказаны условия, достаточные для применимости алгоритма Н. А. Изобова при вычислении достижимой в подклассе ограниченных возмущений верхней границы подвижности старшего показателя линейных систем с возмущениями из этих же классов в случае немонотонной весовой функции [3, 9].

3. Получены достаточные условия применимости указанного алгоритма для получения достижимой верхней оценки старшего показателя линейных систем с неограниченными возмущениями из рассматриваемых классов. [4, 10].

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Журнальные статьи

1. *Макаров Е. К., Марченко И. В., Семерикова Н. В.* Об оценке сверху для старшего показателя линейной дифференциальной системы с интегрируемыми на полуоси возмущениями // Дифференц. уравнения.—2005.—Т.41,№ 2.—С. 215 - 224.

2. *Кожуренко Н. В.* О старшем показателе линейных систем с возмущениями, суммируемыми или малыми в среднем со степенью и монотонным весом // Дифференц. уравнения.—2006.—Т.42, № 4.—С. 463 - 467.

3. *Кожуренко Н. В.* О старшем показателе линейных систем с возмущениями, суммируемыми или бесконечно малыми в среднем со степенью и немонотонным весом // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук.—2006.—№ 2.—С. 9–12.

4. *Кожуренко Н. В.* О старшем показателе линейной дифференциальной системы с возмущениями, суммируемыми со степенью и весом // Веснік Мазырскага дзярж. ун-та. —2006.—№ 1(14).—С. 11–16.

Аннотации докладов в научном журнале

5. *Макаров Е. К., Семерикова Н. В.* Об оценках сверху для старшего показателя возмущенной линейной дифференциальной системы // Дифференц. уравнения.—2004.—Т.40,№ 6.—С. 850.

Публикации в сборниках тезисов математических конференций

6. *Макаров Е. К., Марченко И. В., Семерикова Н. В.* Об оценке сверху для старшего показателя линейной дифференциальной системы с суммируемыми на полуоси возмущениями // Международная конференция, посвященная 103-летию со дня рождения И.Г.Петровского (XXI совместн. заседание ММО и семинара им. И.Г.Петровского), Москва, 16—22 мая 2004 г.: Тезисы докладов.- М.:Изд-во МГУ, 2004.—С. 130 - 131.

7. *Семерикова Н. В.* Об оценках для старшего показателя систем с возмущениями из пространств Лебега // IX Бел. матем. конф.: Тез. докл., Гродно, 3—6 нояб. 2004 г.: В 3 ч. / Гродненск. гос. ун-т. — Гродно, 2004.—Ч.1.—С. 174 - 175.

8. *Макаров Е. К., Марченко И. В., Семерикова Н. В.* О достижимых дискретных оценках сверху для показателей Ляпунова возмущенных систем // IX Бел. матем. конф.: Тез. докл., Гродно, 3—6 нояб. 2004 г.: В 3 ч. / Гродненск. гос. ун-т.— Гродно, 2004.—Ч.1.—С. 147 - 148.

9. *Семерикова Н. В.* Об алгоритме Н.А.Изобова для возмущений, интегрируемых со степенью // Междунар. матем. конф. "Еругинские чтения X": Тез. докл., Могилев, 24—26 мая. 2005 г. / Могилевск. гос. ун-т.им. А.А.Кулешова. — Могилев, 2005.—С. 44 - 45.

10. *Семерикова Н. В.* Об игольчатой реализации возмущений в методе поворотов В.М.Миллионщикова // Междунар. матем. конф. "Четвертые Богдановские чтения по обыкн. дифф. уравнениям": Тез. докл., Минск, 7—10 дек. 2005 г. / Мн.: Институт матем. НАН Беларуси, 2005.—С. 54 - 55.

РЕЗЮМЕ

Кожуренко Наталья Владимировна

Границы подвижности характеристических показателей линейных систем с возмущениями, суммируемыми на полуоси

Ключевые слова: линейная дифференциальная система, характеристический показатель, точная граница подвижности вверх.

Объект исследования — линейные дифференциальные системы с возмущениями, суммируемыми на полуоси со степенью. Предметом исследования является поведение характеристических показателей таких систем под действием возмущений.

Основная цель диссертации состоит в вычислении точной верхней границы подвижности вверх старшего показателя линейных систем с возмущениями из классов суммируемых и бесконечно малых в среднем со степенью и весом.

Исследования проводятся с использованием методов теории показателей Ляпунова, в частности, метода поворотов В. М. Миллионщикова.

Вычислена точная граница подвижности вверх старшего показателя линейных дифференциальных систем при суммируемых и бесконечно малых в среднем со степенью и монотонным весом возмущениях. Получены достаточные условия применимости алгоритма Н. А. Изобова для вычисления точной верхней границы подвижности старшего показателя линейных систем в подклассах ограниченных и неограниченных возмущений, определяемых немонотонными функциями.

Все результаты диссертации являются новыми. Они имеют теоретический характер и могут быть использованы при исследовании возмущенных линейных систем.

РЭЗЮМЕ

Кажурэнка Наталля Уладзіміраўна

Межы рухомасці характарыстычных паказчыкаў лінейных сістэм з узбурэннямі, падсумоўваемымі на паўвосі

Ключавыя словы: лінейная дыферэнцыяльная сістэма, характарыстычны паказчык, дакладная мяжа рухомасці ўверх.

Аб'ект даследавання — лінейныя дыферэнцыяльныя сістэмы з узбурэннямі, падсумоўваемымі на паўвосі са ступенню. Прадметам даследавання з'яўляюцца паводзіны характарыстычных паказчыкаў такіх сістэм пад уздзеяннем узбурэнняў.

Асноўная мэта дысертацыі заключана ў вылічэнні дакладнай мяжы рухомасці ўверх старэйшага паказчыку лінейных сістэм з узбурэннымі з класаў бесканечна малых у сярэднім со ступенню і вагой і падсумоўваемымі на паўвосі са ступенню і вагой.

Даследаванні праводзяцца з выкарыстаннем метадаў тэорыі паказчыкаў Ляпунова, у прыватнасці, метада паваротаў У. М. Мільёншчыкава.

Вылічана дакладная мяжа рухомасці ўверх старэйшага паказчыку лінейных дыференцыяльных сістэм пры бесканечна малых у сярэднім са ступенню і з манатоннай вагой узбурэннях, а таксама пры падсумоўваемых на паўвосі са ступенню і з манатоннай вагой узбурэннях. Атрыманы дастатковыя ўмовы прымянімасці алгарытма Н. А. Ізобава для вылічэння дакладнай верхняй мяжы рухомасці старэйшага паказчыку лінейных сістэм ў падкласах абмежаваных і неабмежаваных узбурэнняў, вызначаемых неманатоннымі функцыямі.

Усе вынікі дысертацыі з'яўляцца новымі. Яны маюць тэарэтычны характар і могуць быць выкарыстаны пры даследаванні ўзбураных лінейных сістэм.

SUMMARY

Kozhurenko Natallia Vladimirovna

The bounds of mobility for the characteristic exponents of linear system with perturbations, summable on the semi-axis

Key words: linear differential system, characteristic exponent, exact bound of upward mobility.

The object of investigation are linear differential system with perturbations, summabie on the semi-axis with power. The subject of tbe investigation is the behaviour of the characteristic exponents of thess systems under the action of such perturbations.

The main purpose of the thesis is to calculate the exact bound of upward mobility for the higher exponent of the linear systems with perturbations infinitesimal in the mean with power and weight and summable on the semi-axis with power and weight.

The investigation uses the methods of Lyapunov exponents theory and in the first place Millionschikov's rotation method.

The exact bound of upward mobility for higher exponent of the linear differential system under infinitesimal in the mean with a monotonous weight and power perturbation, as well as under summabie on the semi-axis with a monotonous weight and power perturbations is calculated. The sufficient conditions for applicability of N. A. Izobov's algorithm for calculation of the exact upper bound of mobility of the higher exponent of the linear systems with perturbations defined non-monotonic function are obtained.

All results in the thesis are new. They may be applied to the investigation of Lyapunov stability and nonstability of singular linear systems.

Подписано в печать 04.07.2006 г.
Формат $60 \times 84\ ^1/_{16}$.
Усл. печ.л 1,38. Уч.-изд.л. 1,25.
Тираж 60 экз. Заказ №10.
Отпечатано на ксероксе Института математики НАН Беларуси.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Институт математики НАН Беларуси.
ЛИ 02300/0133100.
220072, г.Минск, ул. Сурганова, 11.