УДК 517+530.1

С.В. ЖЕСТКОВ, В.С. НОВАШИНСКАЯ

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ВОЛНОВЫХ И СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ, СВЯЗАННЫХ С КЛАССИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЕМ КДФ

Прогресс, достигнутый в теории нелинейных волн в последние годы [1-10], во многом обусловлен развитием точных методов интегрирования нелинейных уравнений в частных производных. При этом значимость этих методов определяется их возможностью исследовать ситуации, в которых классические методы построения солитонных решений – метод обратной задачи рассеяния (МОЗР) и метод Хироты, а также их модификации на многомерные уравнения – не применимы.

В работе развивается метод моделирования точных волновых решений и соответствующих нелинейных уравнений, построенных на основе классического уравнения КДФ. В основе подхода лежит дробно-рациональная форма многочисленных волновых решений, построенных для нелинейных уравнений современной физики, и прямой метод из [10].

I. Рассмотрим модифицированное уравнение КДФ вида [11]

$$\Phi_t + a_1\Phi^{\frac{1}{2}}\Phi_x + a_2\Phi\Phi_x + a_3\Phi_{xxx} = 0, \tag{1}$$

где a_1, a_2, a_3 – произвольные действительные числа. Анализ этого уравнения показывает, что оно допускает решение типа кинка или ударной волны, которое строится в форме бегущей волны

$$\Phi(t,x) = \Phi(\xi), \qquad \xi = x - ct, \tag{2}$$

где c – скорость волны. Подставляя (2) в (1), получим

$$-c\Phi' + a_1\Phi^{\frac{1}{2}}\Phi' + a_2\Phi\Phi' + a_3\Phi''' = 0. \tag{3}$$

Интегрируя один раз уравнение (3), найдем

$$b_0\Phi + b_1\Phi^{\frac{3}{2}} + b_2\Phi^2 + a_3\Phi'' = d, \tag{4}$$

где $b_0 = -c, b_1 = \dfrac{2}{3}a_1, b_2 = \dfrac{1}{2}a_2, d$ – произвольная постоянная. Решение уравнения (4) будем строить в виде

Электронный архив библиотеки МГУ имени А.А. Кулешова

$$\Phi(\xi) = U^2(\xi), \qquad U(\xi) = A + B th\xi, \tag{5}$$

где A, B – неизвестные параметры волны. Подставляя (5) в (4), получим

$$\begin{gathered} ch^4\xi\left[b_0A^2 + b_1A^3 + b_2A^4 + 2a_3B^2 - d\right] + ch^3\xi sh\xi\left[2ABb_0 + 3A^2Bb_1 + 4A^3Bb_2 - 4a_3AB\right] + \\ + ch^2\xi sh^2\xi\left[B^2b_0 + 3AB^2b_1 + 6A^2B^2b_2 - 8B^2a_3\right] + ch\xi sh^3\xi\left[B^3b_1 + 4AB^3b_2 + 4ABa_3\right] + \\ + sh^4\xi\left[B^4b_2 + 6a_3B^2\right] = 0. \end{gathered} \tag{6}$$

Прямым вычислением проверяется, что функции $ch^4\xi, ch^3\xi sh\xi$, $ch^2\xi sh^2\xi, ch\xi sh^3\xi$ $sh^4\xi$ линейно независимы. Поэтому из (6) следует, что должны выполняться следующие соотношения:

$$\begin{gathered} B^2b_2 + 6a_3 = 0, \qquad B^2b_1 + 4AB^2b_2 + 4Aa_3 = 0, \qquad b_0 + 3Ab_1 + 6A^2b_2 - 8a_3 = 0, \\ 2b_0 + 3Ab_1 + 4A^2b_2 - 4a_3 = 0, \qquad b_0A^2 + b_1A^3 + b_2A^4 + 2a_3B^2 = d. \end{gathered} \tag{7}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Для того чтобы уравнение (1) имело решение вида (2), (5), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (7).*

Соотношения (7) можно переписать в виде

$$A = -\frac{2}{5}\left(\frac{a_1}{a_2}\right), \qquad B^2 = -12\left(\frac{a_3}{a_2}\right), \quad d = b_0A^2 + b_1A^3 + b_2A^4 - 24\frac{a_3^2}{a_2}, \tag{8}$$

$$c = 16a_3, \qquad 75a_2a_3 = -a_1^2. \tag{9}$$

Заметим, что равенство

$$b_0A^2 + b_1A^3 + b_2A^4 - 24\frac{a_3^2}{a_2} = 0$$

выполняется тождественно. Поэтому $d = 0$. Из равенств (8) определяются параметры A, B (причем B с точностью до знака). Из равенств (9) определяется скорость волны и нелинейное соотношение на коэффициенты уравнения (1), при выполнении которого возможно распространение волны (5). Кроме того, очевидно, должны выполняться неравенства

$$a_3 > 0, \qquad a_2 < 0,$$

которые накладывают ограничения на выбор коэффициентов уравнения (1). Полученные соотношения (8), (9) являются законами распространения волны (5) и представляют интерес для приложений [12]. Заметим, что солитоноподобное решение уравнения (1) было построено в работе [11].

Электронный архив библиотеки МГУ имени А.А. Кулешова

II. В нелинейной физике плазмы возможны нелинейности с отрицательной степенью, которые встречаются и в других математических моделях [13, 14].

Рассмотрим уравнение вида

$$\Phi_t + a_0\Phi^{-\frac{1}{2}}\Phi_x + a_1\Phi^{\frac{1}{2}}\Phi_x + a_2\Phi\Phi_x + a_3\Phi_{xxx} = 0 \tag{10}$$

с произвольными действительными коэффициентами. Решение строится в виде (2). Подставляя (2) в (10), найдем

$$-c\Phi' + a_0\Phi^{-\frac{1}{2}}\Phi' + a_1\Phi^{\frac{1}{2}}\Phi' + a_2\Phi\Phi' + a_3\Phi''' = 0. \tag{11}$$

Интегрируя один раз уравнение (11), получим

$$b_0\Phi + k_0\Phi^{\frac{1}{2}} + b_1\Phi^{\frac{3}{2}} + b_2\Phi^2 + a_3\Phi'' = d, \tag{12}$$

где $b_0 = -c,\ k_0 = 2a_0,\ b_1 = \frac{2}{3}a_1,\ b_2 = \frac{1}{2}a_2,\ d$ – произвольная постоянная. Решение уравнения (12) строится в виде (5). Подставляя (5) в (12), найдем

$$\begin{gathered}
ch^4\xi\left[b_0A^2 + k_0A + b_1A^3 + b_2A^4 + 2a_3B^2 - d\right] + \\
+ ch^3\xi sh\xi\left[2ABb_0 + k_0B + 3A^2Bb_1 + 4A^3Bb_2 - 4ABa_3\right] + \\
+ ch^2\xi sh^2\xi\left[B^2b_0 + 3AB^2b_1 + 6A^2B^2b_2 - 8B^2a_3\right] + \\
+ ch\xi sh^3\xi\left[B^3b_1 + 4AB^3b_2 + 4ABa_3\right] + sh^4\xi\left[B^4b_2 + 6B^2a_3\right] = 0.
\end{gathered} \tag{13}$$

В силу линейной независимости функций $ch^4\xi, ch^3\xi sh\xi, ch^2\xi sh^2\xi$, $ch\xi sh^3\xi, sh^4\xi$ из (13) вытекает, что должны выполняться следующие соотношения:

$$\begin{gathered}
A = -\frac{2}{5}\left(\frac{a_1}{a_2}\right), \qquad B^2 = -12\left(\frac{a_3}{a_2}\right), \qquad d = b_0A^2 + k_0A + b_1A^3 + b_2A^4 + 2a_3B^2, \\
-c = 8a_3 + \frac{8}{25}\frac{a_1^2}{a_2}, \qquad k_0 = \frac{24}{5}\left(\frac{a_1a_3}{a_2}\right) + \frac{8}{125}\frac{a_1^3}{a_2^2}.
\end{gathered} \tag{14}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Для того чтобы уравнение (10) имело решение вида (2), (5), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (14).*

Эти соотношения и представляют собой законы распространения волны (5). При $a_0 = 0$ они переходят в законы (8), (9).

Электронный архив библиотеки МГУ имени А.А. Кулешова

III. Результаты работы [15] показывают, что закон нелинейности удвоенной степени можно смоделировать и для классического уравнения КДФ, аналогично моделированию законов нелинейности для классического уравнения Шредингера. С этой целью рассмотрим уравнение КДФ вида

$$\Phi_t + a_1\Phi^{2m}\Phi_x + a_2\Phi^{4m}\Phi_x + a_3\Phi_{xxx} = 0, \qquad m > 0 \tag{15}$$

с произвольными действительными коэффициентами. Решение уравнения (15) будем строить в виде (2). Подставляя (2) в (15), найдем

$$-c\Phi' + a_1\Phi^{2m}\Phi' + a_2\Phi^{4m}\Phi' + a_3\Phi''' = 0. \tag{16}$$

Интегрируя один раз уравнение (16) и полагая константу интегрирования равной нулю, получим

$$-c\Phi + \frac{a_1}{2m+1}\Phi^{2m+1} + \frac{a_2}{4m+1}\Phi^{4m+1} + a_3\Phi'' = 0$$

или

$$\Phi'' = a\Phi - b\Phi^{2m+1} - \delta\Phi^{4m+1}, \tag{17}$$

где

$$a = \frac{c}{a_3}, \qquad b = \frac{a_1}{(2m+1)a_3}, \qquad \delta = \frac{a_2}{(4m+1)a_3}.$$

К уравнению (17) добавим краевые условия

$$\Phi(\pm\infty) = 0, \qquad \Phi'(\pm\infty) = 0. \tag{18}$$

Краевая задача (17), (18) определяет существование солитонного решения для уравнения (15). Для ее интегрирования обозначим $\Phi' = z$. Тогда

$$\Phi'' = \frac{dz}{d\xi} = \frac{dz}{d\Phi}\frac{d\Phi}{d\xi} = \frac{dz}{d\Phi}z.$$

Уравнение (17) примет вид

$$z\frac{dz}{d\Phi} = a\Phi - b\Phi^{2m+1} - \delta\Phi^{4m+1}. \tag{19}$$

Разделяя переменные и интегрируя один раз уравнение (19), найдем с учетом (18) первый интеграл

$$z^2 = a\Phi^2 - \frac{b}{m+1}\Phi^{2m+2} - \frac{\delta}{2m+1}\Phi^{4m+2}.$$

Следовательно,

$$\frac{d\Phi}{d\xi} = -\left[a\Phi^2 - \frac{b}{m+1}\Phi^{2m+2} - \frac{\delta}{2m+1}\Phi^{4m+2}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{20}$$

Электронный архив библиотеки МГУ имени А.А. Кулешова

где знак "–" указывает на убывание солитона на бесконечности. Из (20) найдем

$$I \equiv \int \frac{d\Phi}{\Phi\left[a - \frac{b}{m+1}\Phi^{2m} - \frac{\delta}{2m+1}\Phi^{4m}\right]^{\frac{1}{2}}} = -\xi + \xi_0,$$

где ξ_0 – произвольная постоянная. Вычислим интеграл I. Для этого обозначим $\Phi^2 = s$. Тогда $2\Phi d\Phi = ds$. Отсюда найдем

$$\frac{2d\Phi}{\Phi} = \frac{ds}{s}.$$

Следовательно,

$$I \equiv \frac{1}{2}\int \frac{ds}{s\left[a - \frac{b}{m+1}s^{m} - \frac{\delta}{2m+1}s^{2m}\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Введем новую переменную $h = s^m$. Тогда

$$dh = ms^{m-1}ds$$

или

$$\frac{dh}{h} = \frac{m}{s}ds.$$

В результате получим

$$I \equiv \frac{1}{2}\int \frac{dh}{mh} \frac{1}{\left[a - \frac{b}{m+1}h - \frac{\delta}{2m+1}h^2\right]^{\frac{1}{2}}}. \tag{21}$$

Будем считать, что $a > 0$. Тогда можно сделать замену переменной h по формуле

$$\left[a - \frac{b}{m+1}h - \frac{\delta}{2m+1}h^2\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} - h\theta,$$

где θ – новая переменная. Следовательно,

$$h = \frac{2\sqrt{a}\theta - \frac{b}{m+1}}{\theta^2 + \frac{\delta}{2m+1}}. \tag{22}$$

Электронный архив библиотеки МГУ имени А.А. Кулешова

Подставляя (22) в (21), получим

$$I = \frac{1}{m}\int \frac{d\theta}{2\sqrt{a}\theta - \frac{b}{m+1}} = \frac{1}{2m\sqrt{a}}\ln\left|2\sqrt{a}\theta - \frac{b}{m+1}\right| = -\xi + \xi_0. \qquad (23)$$

Из уравнения (23) найдем

$$\theta = \frac{1}{2\sqrt{a}}\left(e + \frac{b}{m+1}\right), \qquad e \equiv \exp\left\{2\sqrt{a}m(-\xi + \xi_0)\right\}.$$

Вычислим величину

$$h = \frac{4ae}{\left(e + \frac{b}{m+1}\right)^2 + \frac{4a\delta}{2m+1}}.$$

Тогда

$$s = \left[\frac{4ae}{\left(e + \frac{b}{m+1}\right)^2 + \frac{4a\delta}{2m+1}}\right]^{\frac{1}{m}}.$$

Следовательно,

$$\Phi(\xi) = \left[\frac{4ae}{\left(e + \frac{b}{m+1}\right)^2 + \frac{4a\delta}{2m+1}}\right]^{\frac{1}{2m}}, \qquad (24)$$

где $a > 0, \delta > 0$. Это и есть солитонное решение уравнения (17).

Чтобы получить законы распространения этой волны, представим решение (24) в виде

$$\Phi(\xi) = F^{\frac{1}{2m}}(\xi), \qquad (25)$$

где $F = GH^{-1}, G = Ae, H = (e + B)^2 + Q, e \equiv \exp\{-\alpha(\xi - \xi_0)\}$.

Подставляя (25) в (17) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях e, получим

$$\alpha^2 = 4m^2 a, \qquad bA = 4Ba(1+m), \qquad \delta A^2 = 4(1+2m)aQ. \qquad (26)$$

Следовательно, справедлива

Электронный архив библиотеки МГУ имени А.А. Кулешова

Теорема 3. *Для того чтобы уравнение (17) имело решение вида (25), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (26).*

Они и представляют законы распространения солитона указанной формы.

IV. Для приложений представляет интерес вопрос о том, допускает ли уравнение (15) существование ударной волны. С этой целью будем строить его решение в виде (2). Подставляя (2) в (15) и интегрируя один раз, найдем

$$-c\Phi+\frac{a_1}{2m+1}\Phi^{2m+1}+\frac{a_2}{4m+1}\Phi^{4m+1}+a_3\Phi''=0. \qquad (27)$$

Решение уравнения (27) будем строить в виде

$$\Phi(\xi)=F^{\frac{1}{2m}}(\xi), \qquad (28)$$

где $F(\xi)$ – неизвестная функция. Подставляя (28) в (27), найдем

$$-cF^2+\frac{a_1}{2m+1}F^3+\frac{a_2}{4m+1}F^4+a_3\mu\left[(\mu-1)(F')^2+FF''\right]=0, \qquad \mu=\frac{1}{2m}. \qquad (29)$$

Решение уравнения (29) ищем в виде

$$F(\xi)=A+Bth\xi. \qquad (30)$$

Подставляя (30) в уравнение (29), получим

$$\begin{gathered}ch^4\xi\left[b_0A^2+b_1A^3+b_2A^4+b_3B^2\right]+ch^3\xi sh\xi\left[2ABb_0+3A^2Bb_1+4A^3Bb_2-2ABb_4\right]+\\ ch^2\xi sh^2\xi\left[B^2b_0+3AB^2b_1+6A^2B^2b_2-2B^2b_3-2B^2b_4\right]+\\ ch\xi sh^3\xi\left[B^3b_1+4AB^3b_2+2ABb_4\right]+sh^4\xi\left[B^4b_2+B^2b_3+2B^2b_4\right]=0,\end{gathered} \qquad (31)$$

где $b_0=-c, \quad b_1=\dfrac{a_1}{2m+1}, \quad b_2=\dfrac{a_2}{4m+1}, \quad b_3=\mu(\mu-1)a_3, \quad b_4=\mu a_3$.

Из равенства (31) в силу линейной независимости функций $ch^4\xi, ch^3\xi sh\xi, ch^2\xi sh^2\xi, ch\xi sh^3\xi, sh^4\xi$ найдем

$$B^2b_2+b_3+2b_4=0, \qquad (32)$$

$$B^2b_1+4AB^2b_2+2Ab_4=0, \qquad (33)$$

$$b_0+3Ab_1+6A^2b_2-2b_3-2b_4=0, \qquad (34)$$

$$2b_0+3Ab_1+4A^2b_2-2b_4=0, \qquad (35)$$

$$b_0A^2+b_1A^3+b_2A^4+b_3B^2=0. \qquad (36)$$

Таким образом, справедлива

Теорема 4. *Для того чтобы уравнение (15) имело решение вида (2), (28), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (32) – (36).*

Электронный архив библиотеки МГУ имени А.А. Кулешова

Из уравнений (32), (33) найдем соответственно

$$A = -\frac{b_1(1+\mu)}{b_2(2+4\mu)}, \qquad B^2 = -\frac{a_3\mu(1+\mu)}{b_2}. \qquad (37)$$

Из уравнений (34), (35) получим

$$c = -2A^2b_2 - 2\mu a_3 + 2\mu^2 a_3, \qquad 3Ab_1 + 8A^2b_2 = a_3\left(4\mu^2 - 2\mu\right). \qquad (38)$$

При выполнении (37), (38) соотношение (36) выполняется тождественно. При $m = \frac{1}{4}$ результаты согласуются с теоремой 1. Соотношения (37), (38) представляют собой законы распространения ударной волны для уравнения (15).

Таким образом, полученные результаты могут быть использованы при моделировании нелинейных процессов в физике плазмы и гидродинамике.

ЛИТЕРАТУРА

1. Теория солитонов: Метод обратной задачи / В.Е. Захаров [и др.]. – М.: Наука, 1980. – 314 с.
2. ***Лэм, Дж.Л.*** Введение в теорию солитонов / Дж.Л. Лэм. – М.: Мир, 1983. – 294 с.
3. ***Буллаф, Р.*** Солитоны / Р. Буллаф, Ф. Кодри; под ред.Р. Буллаф. – М.: Мир, 1983. – 232 с.
4. ***Калоджеро, Ф.*** Спектральные преобразования и солитоны. Методы решения и исследования нелинейных эволюционных уравнений / Ф. Калоджеро, А. Дегасперис. – М.: Мир, 1985. – 469 с.
5. ***Тахтаджян, Л.А.*** Гамильтонов подход в теории солитонов / Л.А. Тахтаджян, Л.Д. Фаддеев. – М.: Наука, 1986. – 528 с.
6. ***Абловиц, М.*** Солитоны и метод обратной задачи / М. Абловиц, Х. Сигур. – М.: Мир, 1987. – 479 с.
7. Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Р. Додд [и др.]. – М.: Мир, 1988. – 694 с.
8. ***Ньюэлл, А.*** Солитоны в математике и физике / А. Ньюэлл. – М.: Мир, 1989. – 326 с.
9. ***Ахмедиев, Н.Н.*** Солитоны / Н.Н. Ахмедиев, А. Анкевич. – М.: Физматлит, 2003. – 304 с.
10. ***Жестков, С.В.*** Конструктивные методы построения глобальных решений нелинейных уравнений в частных производных / С.В. Жестков. – Могилев: МГУ им. А.А. Кулешова, 2006. – 220 с.
11. ***Жестков, С.В.*** О существовании солитонных решений модифицированных уравнений Кортевега-де Фриза с различными типами нелинейностей / С.В. Жестков, И.С. Ведолева // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. – 2009. – № 1. – С. 158-164.
12. ***Volosevich, A.V.*** Theoretical model and experimental diagnostics of nonlinear electrostatic structures in space plasma / A.V. Volosevich, C.V. Meister, S.V. Zhestkov. – Advances in Space Research. – 2006. – Vol. 37. – P. 569-575.

Электронный архив библиотеки МГУ имени А.А. Кулешова

13. *Галактионов, В.А.* Уравнения нелинейной дисперсии третьего порядка: ударные волны, волны разрежения и разрушения / В.А. Галактионов, С.И. Похожаев // Журнал вычисл. мат. и мат. физики. – 2008. – Т. 48. – № 10. – С. 1819-1846.
14. *Weigno, Rui.* Integral bifurcation method and its application for solving the modified equal width wave equation and its variants / Rostock. Math. Kolloq. – 2007. – N 62. – P. 87-106.
15. *Жестков, С.В.* О построении солитоноподобных решений системы уравнений Захарова со степенным законом нелинейности и законом удвоенной степени / Жестков С.В. – Докл. НАН Беларуси. – 2008. – Т. 52. – № 6. – С. 49-53.

Поступила в редакцию 06.10.2009 г.

архив библиотеки МГУ имени