МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«МОГИЛЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени А. А. КУЛЕШОВА»

И. В. Марченко, Л. А. Романович

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Методические рекомендации к
практическим занятиям по математике

В четырех частях

Часть 1

Могилев
МГУ имени А. А. Кулешова
2021

УДК 514.12
ББК 22.1
М30

Печатается по решению редакционно-издательского совета МГУ имени А. А. Кулешова

Рецензент
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры высшей математики
Белорусско-Российского университета
Д. В. Роголев

Марченко, И. В.
М30 Аналитическая геометрия. Линейная алгебра : методические рекомендации к практическим занятиям по математике : в 4 ч. / И. В. Марченко, Л. А. Романович. – Могилев : МГУ имени А. А. Кулешова, 2021. – Ч. 1. – 80 с. : ил.
ISBN 978-985-568-815-1

Издание включает вопросы для подготовки к занятиям, основные теоретические сведения по каждой теме, задания для аудиторной работы и самостоятельного выполнения. В конце каждого занятия размещены QR-коды, используя которые студенты имеют возможность проверить правильность своих результатов при выполнении домашних заданий. Материалы содержат рекомендации по подготовке к контрольным работам и соответствующие задания для повторения.

Предназначено для всех специальностей, предусматривающих изучение разделов «Аналитическая геометрия» и «Линейная алгебра». Оно будет также полезно для преподавателей и ассистентов при подготовке и проведении практических занятий.

УДК 514.12
ББК 22.1

ISBN 978-985-568-815-1-1
ISBN 978-985-568-814-4

ВВЕДЕНИЕ

Издание предназначено для организации аудиторной и самостоятельной работы студентов по разделам «Аналитическая геометрия» и «Линейная алгебра». Весь материал разбит на 16 практических занятий, каждое из которых включает:

– вопросы теории, которые студенты должны изучить перед занятием. Чтобы им было легче сориентироваться в списке рекомендуемой для изучения литературы перед вопросами указаны некоторые из наиболее доступных пособий для чтения, кроме того, все занятия содержат краткие теоретические сведения, которые в обязательном порядке следует знать для успешного усвоения темы;

– образцы решения задач – это некоторые из типовых задач каждой темы, которые демонстрируют отдельные подходы и/или алгоритмы решений;

– задания для аудиторной работы;

– задания для самостоятельного выполнения;

– QR-коды, используя которые можно перейти в курс Moodle и, введя полученные ответы, проверить правильность своих результатов.

QR-коды, содержащиеся в теоретическом материале по темам 2 и 8, позволяют посмотреть обучающее видео, размещенное в Moodle.

Материалы содержат методические рекомендации для подготовки к контрольным работам по каждому разделу и задания для повторения.

Практическое занятие № 1
ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ. МЕТОД КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ

Рекомендуемая литература для подготовки к занятию в соответствии со списком литературы: [5], с. 5–40; [16], с. 198–218, 223–226; [17], с. 39–43, 46–50, 58–61.

Вопросы для подготовки к занятию

1. Понятие вектора. Линейные операции над векторами и их свойства.
2. Линейная зависимость системы векторов.
3. Базис. Координаты вектора в базисе.
4. Аффинная система координат. Деление отрезка в данном отношении.
5. Скалярное умножение векторов. Ортонормированный базис.
6. Прямоугольная декартова система координат. Расстояние между точками.

Теоретический материал

Под ***вектором*** понимается произвольный элемент из некоторого множества V, для всех элементов которого выполнимы операции сложения векторов и умножения действительного числа на вектор.

Эти операции обладают свойствами:

1. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.
2. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.
3. Существование нулевого вектора
$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}.$$
4. Существование для любого вектора ему противоположного
$$\vec{a}+(\overrightarrow{-a})=\vec{0}.$$
5. $(\mu+\lambda)\vec{a}=\mu\vec{a}+\lambda\vec{a}$.
6. $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$.
7. $\lambda\vec{a}=\vec{a}\lambda$.
8. $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$.

Векторы $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$,…, $\overrightarrow{a_m}$ называются ***линейно зависимыми***, если существует их линейная комбинация, равная $\vec{0}$, в которой хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля, т.е.
$$k_1\overrightarrow{a_1}+k_2\overrightarrow{a_2}+\cdots+k_m\overrightarrow{a_m}=\vec{0}, \exists\, k_j\neq 0.$$
Векторы $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$,…, $\overrightarrow{a_m}$ называются ***линейно независимыми***, если в любой их линейной комбинации, равной $\vec{0}$, все коэффициенты равны нулю, т. е.
$$k_1\overrightarrow{a_1}+k_2\overrightarrow{a_2}+\cdots+k_m\overrightarrow{a_m}=\vec{0}, \forall k_j=0, j=\overline{1,m}.$$
Базисом векторного пространства V называется система из n линейно независимых векторов $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$,…, $\overrightarrow{e_n}$ таких, что всякий вектор пространства V линейно выражается через эти векторы, т. е.
$$\vec{a}=\alpha_1\overrightarrow{e_1}+\alpha_2\overrightarrow{e_2}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{e_n}, \vec{a}\in V, \alpha_i\in \boldsymbol{R}, i=\overline{1;n}.$$

Координатами $\vec{a}$ называются коэффициенты $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ в разложении вектора по базису.

Координаты вектора в данном базисе определяют его единственным образом, поэтому часто вектор записывают через его координаты, как $\overrightarrow{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}$. Если известны координаты векторов, то выполнение линейных операций над этими векторами сводится к выполнению соответствующих арифметических операций над их координатами.

Пусть $\vec{a}(a_1, \dots, a_n)$, $\vec{b}(b_1, \dots, b_n)$. Тогда следующие формулы определяют соответственно результат операций умножения вектора $\vec{a}$ на действительное число λ и сложения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

$$\lambda\vec{a} = \overrightarrow{(\lambda a_1, \dots, \lambda a_n)},$$
$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{(a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)}.$$

Аффинной системой координат называется совокупность точки O – начало координат и некоторого базиса данного векторного пространства. В произвольной аффинной системе координат векторы в базисе могут составлять любые углы. Если же угол между всеми базисными векторами прямой, то такая аффинная система координат называется ***прямоугольной***.

Радиус-вектором точки M в аффинной или декартовой системе координат называется вектор $\overrightarrow{OM}$, соединяющий эту точку с началом системы координат O.

Координатами точки М в некоторой системе координат называются координаты ее радиус-вектора в ней.

Если известны координаты концов $A(a_1, \dots, a_n)$ и $B(b_1, \dots, b_n)$ вектора $\overrightarrow{AB}(x_1, \dots, x_n)$, то координаты данного вектора можно найти по формулам

$$x_1 = b_1 - a_1, \dots, x_n = b_n - a_n.$$

Расстоянием между точками $A(a_1, \dots, a_n)$ и $B(b_1, \dots, b_n)$ называют длину вектора $\overrightarrow{AB}$.

Для точек M_1, M, M_2, расположенных на одной прямой, по координатам точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ можно найти координаты точки $M(x, y, z)$, если известно отношение λ $(\lambda \neq -1)$, в котором точка M делит отрезок M_1M_2, по формулам

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \qquad (1)$$

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число $(\vec{a}, \vec{b})$, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними.

Длиной вектора $\vec{a}$ называют корень квадратный из его скалярного квадрата, т.е.

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})}.$$

Скалярное произведение векторов $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ можно найти по одной из следующих формул.

1) Если известна длина векторов и угол φ между ними, то

$$(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi; \qquad (2)$$

2) если известна длина одного из векторов и проекция второго вектора на него, то

$$(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{b}|\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}|\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b};$$

3) если известны координаты векторов, то

$$(\vec{a},\vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Для того, чтобы два вектора $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$ и $\vec{b}(b_1,b_2,b_3)$ были перпендикулярны (ортогональны) необходимо и достаточно, чтобы их скалярное произведение было равно нулю, т.е. чтобы выполнялось равенство

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0.$$

Вектор называется ***ортом***, если его длина равна 1. Базис, у которого все векторы ортогональны, называется ***ортогональным***. Ортогональный базис, у которого все векторы орты, называется ***ортонормированным***.

В декартовой системе координат справедливы следующие соотношения для длины вектора и расстояния между точками.

1) Длина вектора $\overrightarrow{AB}(x_1,\dots,x_n)$ есть

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2};$$

2) Если даны точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, то расстояние между ними

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}.$$

Образцы решения задач

Задача 1. Даны точки $A(1;-3;-2)$ и $B(8;0;-4)$ – вершины параллелограмма $ABCD$ и точка $O(0;4;-3)$ пересечения его диагоналей. Найдите точки C и D.

Решение. Пусть $C(c_1,c_2,c_3)$, $D(d_1,d_2,d_3)$. Так как диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, то воспользуемся формулами (1) координат середины отрезка ($\lambda = 1$). Рассматривая точку O, как середину диагонали AC, имеем соотношения

$$0 = \frac{1+c_1}{2};\ 4 = \frac{-3+c_2}{2};\ -3 = \frac{-2+c_3}{2},$$

из которых находим

$$c_1 = -1, c_2 = 11, c_3 = -4.$$

Рассматривая теперь точку O, как середину диагонали BD, имеем соотношения

$$0 = \frac{8+d_1}{2};\ 4 = \frac{0+d_2}{2};\ -3 = \frac{-4+d_3}{2},$$

которые дают равенства

$$d_1 = -8, d_2 = 8, d_3 = -2.$$

Таким образом, получаем $C(-1;11;-4)$ и $D(-8;8;-2)$.

Задача 2. Найти скалярные произведения всех возможных пар данных векторов, если известно, что $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 4$, $|\vec{d}| = 1$, угол φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $\frac{\pi}{3}$, $\vec{c} \downarrow\uparrow \vec{d}$, а вектор $\vec{d}$ образует с вектором $\vec{a}$ угол $\delta = \frac{5\pi}{6}$.

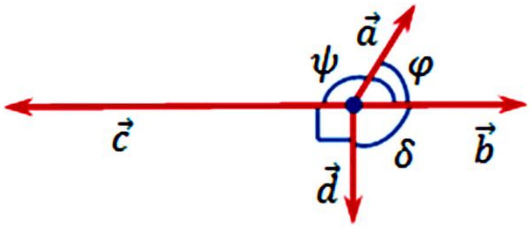


Рисунок 1

Решение. По формуле (2) находим

$$(\vec{a},\vec{b}) = 1 \cdot 2 \cdot \cos\varphi = 2 \cdot \cos\frac{\pi}{3} = 1.$$

Так как по условию векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ противоположно направленные, то угол ψ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{c}$ равен $\pi - \varphi = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ (см. рис. 1). Поэтому по формуле (2) имеем соотношения

$$(\vec{a},\vec{c}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{c}| \cdot cos\psi = 1 \cdot 4 \cdot cos\frac{2\pi}{3} = -2.$$

Угол между противоположно направленными векторами $\vec{b}$ и $\vec{c}$ равен π, поэтому

$$(\vec{b},\vec{c}) = |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos\pi = 2 \cdot 4 \cdot (-1) = -8.$$

Вектор $\vec{d}$ ортогонален вектору $\vec{b}$ (и вектору $\vec{c}$), так как величина угла между ними равна $\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$. Тогда $(\vec{b},\vec{d}) = (\vec{c},\vec{d}) = 0$, так как $\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

Учитывая, что угол δ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{d}$ равен по условию $\frac{5\pi}{6}$, имеем равенства

$$(\vec{a},\vec{d}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos\frac{5\pi}{6} = 1 \cdot 1 \cdot \cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Задания для аудиторной работы

№ 1. Даны векторы $\vec{a}(2;-5;3)$, $\vec{b}(1;3;-7)$. Найти векторы $\vec{c} = 4\vec{a} + 3\vec{b}$, $\vec{d} = 5\vec{a} - 2\vec{b}$.

№ 2. Даны точки $A(1;-3;-2)$, $B(8;0;-4)$, $C(4;8;-3)$. Найти такую точку D, чтобы четырехугольник $ABCD$ был параллелограммом.

№ 3. Вершины четырехугольника находятся в точках $A(2;0;4)$, $B(7;-15;16)$, $C(-1;-1;11)$, $D(-14;28;-6)$. Показать, что $ABCD$ есть трапеция.

№ 4. Найти координаты концов отрезка, который точками $C(7;0;3)$ и $D(-5;0;0)$ разделен на три равные части.

№ 5. Известно, что $|\vec{a}| = 6$ и $|\vec{b}| = \sqrt{2}$. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в каждом из следующих случаев $\varphi_1 = 45^\circ$, $\varphi_2 = 90^\circ$, $\varphi_3 = 135^\circ$, $\varphi_4 = 180^\circ$, где φ_i, $i = \overline{1;4}$, – угол между данными векторами.

№ 6. Вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданных своими координатами, и углы между ними, если

1) $\vec{a}(3;-4)$, $\vec{b}(5;12)$;

2) $\vec{a}(2;-3;2)$, $\vec{b}(4;2;-1)$.

Задания для самостоятельного выполнения

№ 1. Даны векторы $\vec{a}(4;8;3)$, $\vec{b}(2;-1;5)$. Найти векторы $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{d} = 4\vec{a} + 3\vec{b}$.

№ 2. Даны точки $A(-1;2;3)$, $B(1;4;2)$, $C(0;2;1)$. Найти такую точку D, чтобы четырехугольник $ABCD$ был параллелограммом.

№ 3. Найти координаты концов отрезка, который точками $C(1;-2;0)$ и $D(0;2;1)$ разделен на три равные части.

№ 4. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 3$ и $|\vec{b}| = 2$, а угол между ними $\varphi_1 = 30^\circ$, $\varphi_2 = 60^\circ$, $\varphi_3 = 120^\circ$.

№ 5. Вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданных своими координатами, и углы между ними, если

1) $\vec{a}(-2;3)$, $\vec{b}(1;-2)$;

2) $\vec{a}(1;-2;1)$, $\vec{b}(2;1;0)$.

Для проверки правильности ответов в заданиях для самостоятельного выполнения воспользуйтесь QR-кодом

Практическое занятие № 2
ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Рекомендуемая литература для подготовки к занятию в соответствии со списком литературы: [9], с. 133–136; [17], с. 20–21.

Вопросы для подготовки к занятию

1. Определение матрицы второго порядка.
2. Определение матрицы третьего порядка.

3. Определение определителя квадратной матрицы.
4. Правило вычисления определителя второго порядка
5. Правило вычисления определителя третьего порядка.
6. Определение минора элемента.
7. Определение алгебраического дополнения элемента.

Теоретический материал

Числовой матрицей второго порядка называется таблица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

составленная из чисел $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$.

Числовой матрицей третьего порядка называется таблица вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Определителем квадратной матрицы (у нее одинаковое число строк и столбцов) называется число, которое ее определяет.

Правило нахождения определителя второго порядка

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} \end{vmatrix} = \boldsymbol{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}.$$

Правило нахождения определителя третьего порядка (правило Саррюса)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{32}} & \boldsymbol{a_{33}} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{32}} & \boldsymbol{a_{33}} \end{vmatrix} =$$

$$= \boldsymbol{a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} -}$$
$$\boldsymbol{- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11}}. \quad (1)$$

Видео, поясняющее правило нахождения определителя третьего порядка, можно посмотреть, воспользовавшись QR-кодом

Минором M_{ij} элемента a_{ij} матрицы A называется определитель матрицы, полученной из матрицы A вычёркиванием из нее i-ой строки и -го столбца (т. е. строки и столбца, на пересечении которых находится элемент a_{ij}).

Алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij} матрицы находится по формуле

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}, \quad (2)$$

где M_{ij} – минор элемента a_{ij}.

Образцы решения задач

Задача 1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Решение. По правилу (1) находим

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{-1\cdot 1\cdot(-1)} + \mathbf{(-2)\cdot(-3)\cdot 0} + \mathbf{5\cdot 1\cdot 1} -$$

$$-\left(\mathbf{5\cdot 1\cdot 0} + \mathbf{(-2)\cdot 1\cdot(-1)} + \mathbf{(-1)\cdot 1\cdot(-3)}\right) = 1.$$

Задача 2. Найти алгебраическое дополнение элемента a_{23} матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & 8 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составим минор M_{23} матрицы А, для чего вычеркнем из нее вторую строку и третий столбец.

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 4 - 12 - 0 - 6 - 1 = -23.$$

По формуле (2) находим алгебраическое дополнение элемента a_{23}.

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\cdot M_{23} = -(-23) = 23.$$

Задания для аудиторной работы

№ 1. Найти определители второго порядка.

а) $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} -7 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} -8 & 3 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 10 & 0{,}2 \\ 70 & 3{,}5 \end{vmatrix}$.

№ 2. Найти определители третьего порядка.

а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 7 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 5 & 8 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

№ 3. Найти x из уравнения.

а) $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4$; б) $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 3 & x & 1 \\ x & -1 & 2 \end{vmatrix} = -1$.

№ 4. Найти алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A, если а) $i = 1, j = 2$; б) $i = 4, j = 1$; в) $i = 2, j = 3$;

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & 8 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задания для самостоятельного выполнения

№ 1. Найти определители.

а) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 8 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.

№ 2. Найти алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A, если а) $i = 2, j = 2$; б) $i = 3, j = 4$; в) $i = 4, j = 3$;

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

№ 3. Найти x из уравнения $\begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ x & 4 & x \end{vmatrix} = 0.$

№ 4. Найти решение (x, y) системы $\begin{cases} \begin{vmatrix} x & 2 \\ y & 5 \end{vmatrix} = 0; \\ \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ y & x \end{vmatrix} = 7. \end{cases}$

Для проверки правильности ответов в заданиях для самостоятельного выполнения воспользуйтесь QR-кодом

Практическое занятие № 3
МЕТОД КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ. ВЕКТОРНОЕ И СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

Рекомендуемая литература для подготовки к занятию в соответствии со списком литературы: [5], с. 155–160, 163–170; [16], с. 226–232; [17], с. 51–57.

Вопросы для подготовки к занятию

1. Определение одинаково ориентированных базисов.
2. Определение противоположно ориентированных базисов.
3. Определение векторного произведения.
4. Свойства (аксиомы) векторного произведения.
5. Правило нахождения векторного произведения по координатам векторов.

6. Механический смысл векторного произведения.
7. Определение смешанного произведения векторов.
8. Геометрический смысл смешанного произведения.
9. Свойства смешанного произведения.
10. Правило нахождения смешанного произведения по координатам векторов.

Теоретический материал

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ некоторого ориентируемого евклидова векторного пространства называется вектор $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$, являющийся результатом операции векторного умножения, которая удовлетворяет условиям:

1. $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$.
2. $[\vec{a} + \vec{c}, \vec{b}] = [\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{c}, \vec{b}]$, $[\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{a}, \vec{c}]$.
3. $\alpha[\vec{a}, \vec{b}] = [\alpha\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{a}, \alpha\vec{b}]$.
4. Тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, [\vec{a}, \vec{b}]$ той же ориентации, что и координатный базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.
5. (*геометрический смысл векторного произведения*). $|\vec{c}| = |[\vec{a}, \vec{b}]|$ равен площади параллелограмма, построенного на приведенных к общему началу векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
6. Для того, чтобы ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы $[\vec{a}, \vec{b}] = 0$. В частности $[\vec{a}, \vec{a}] = 0$.
7. Если заданы декартовы координаты векторов $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$, то $[\vec{a}, \vec{b}]$ можно представить в виде

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{j} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

Смешанным произведением векторов называется число, полученное в результате векторного произведения двух векторов, скалярно умноженного на третий вектор. Обозначается

$$(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}]\vec{c}) = (\vec{a}[\vec{b}, \vec{c}]).$$

Свойства смешанного произведения:

1. Смешанное произведение равно нулю, если векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарны, один из них нулевой или какие-либо два из них коллинеарные.
2. Смешанное произведение меняет знак на противоположный при перестановке двух множителей.
3. Смешанное произведение не меняется при циклической перестановке множителей, т. е.

$$(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}) = (\,\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}) = (\vec{c}\,\vec{b}\,\vec{a}).$$

4. Смешанное произведение линейно относительно каждого множителя, а именно, дистрибутивно относительно сложения и однородно относительно числового множителя для каждого множителя в смешанном произведении.

5. (*геометрический смысл смешанного произведения).* Смешанное произведение по абсолютной величине равно объёму параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ как на составляющих, т.е.

$$\left|\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right)\right| = V_{\text{пар}}. \tag{2}$$

6. Если $\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right) > 0$, то у векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ правая ориентация, если $\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right) < 0$, то у векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ левая ориентация.

Если $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c}(x_3, y_3, z_3)$, то смешанное произведение этих векторов можно найти по формуле

$$\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Образцы решения задач

Задача 1. Для векторов $\vec{a}(2;1;2)$ и $\vec{b}(3;0;1)$ найти векторное произведение, синус угла между ними и площадь параллелограмма, построенного на этих векторах, как на сторонах.

Решение. По формуле (1) получим, что

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}.$$

Исходя из геометрического смысла векторного произведения, найдем площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, как на сторонах.

$$S = \left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right| = |i + 4j - 3k| = \sqrt{1^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{26}\ \text{(ед}^2\text{)}.$$

По формуле площади параллелограмма, известной из школы,

$$S = a \cdot b \cdot \sin\alpha.$$

Отсюда находим

$$\sin\alpha = \frac{\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right|}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|} = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{\sqrt{13}}{5}.$$

Задача 2. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}(2;\,-1;3)$, $\vec{b}(1;2;1)$, $\vec{c}(3;1;2)$, как на ребрах.

Решение. Согласно геометрическому смыслу смешанного произведения (2) и формуле (3), имеем

$$\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 3 - 3 - 18 + 2 - 2 = -10,$$

$$V = |-10| = 10\ \text{(ед}^3\text{)}.$$

Задания для аудиторной работы

№ 1. Для векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, известны их длины $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5$. Найти векторное произведение $[\vec{a}, \vec{b}]$, если угол φ между ними: а) 0; б) $\frac{\pi}{3}$; в) $\frac{\pi}{2}$.

№ 2. Найти векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

а) $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$;

б) $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 34\vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$;

в) $\vec{a}(-1; 4; -2)$, $\vec{b}(2; 2; -4)$.

№ 3. Упростить выражения.

а) $[2\vec{a} + 3\vec{b}, -\vec{a} + 4\vec{b}]$; б)$[3\vec{a} - 2\vec{b}, 5\vec{a} - \vec{b}]$.

№ 4. Даны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, удовлетворяющие условию $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Доказать, что

$$[\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{b}, \vec{c}] = [\vec{c}, \vec{a}].$$

№ 5. Для векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ найти их векторное произведение, синус угла между ними и площадь параллелограмма, построенного на этих векторах.

а) $\vec{a}(1; 2; -2)$, $\vec{b}(0; 3; 4)$; б) $\vec{a}(2; 3; -1)$, $\vec{b}(1; -1; 2)$.

№ 6. Вычислить площадь треугольника с вершинами в точках A, B, C.

1) $A(1; 0; 2)$, $B(-1; 2; 3)$, $C(3; 1; 0)$;

2) $A(-1; 2; 1)$, $B(3; 0; 1)$, $C(2; -2; 5)$.

№ 7. Доказать тождество $\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\left(\vec{c} + \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}\right)\right) = \left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right)$.

№ 8. Найти смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Какую ориентацию имеет базис, ими образованный, если координатный базис $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ правый.

1) $\vec{a}(1; -2; 1)$, $\vec{b}(3; 2; 1)$, $\vec{c}(0; 1; 2)$;

2) $\vec{a}(1; 1; 3)$, $\vec{b}(-1; 2; -2)$, $\vec{c}(1; -2; -1)$.

№ 9. Доказать, что векторы $\vec{a}(1; 2; -2)$, $\vec{b}(2; 4; -4)$, $\vec{c}(6; 1; 0)$ компланарны.

№ 10. Для тетраэдра с вершинами в точках $A(1; -1; 2)$, $B(1; 0; 1)$, $C(2; 3; 2)$, $D(4; 3; 5)$ найти длину его высоты, опущенной из вершины D.

Задания для самостоятельного выполнения

№ 1. Найти векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

а) $\vec{a} = \vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{k}$; б) $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.

№ 2. Показать, что векторы $[\vec{b}, \vec{a}]$ и $[3\vec{b}, 4\vec{a} + 5\vec{b}]$ коллинеарны.

№ 3. Для векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ найти их векторное произведение, синус угла между ними и площадь параллелограмма, построенного на этих векторах.

а) $\vec{a}(1; -2; 2)$, $\vec{b}(3; 1; -1)$; б) $\vec{a}(0; 1; -1)$, $\vec{b}(4; 1; -2)$.

№ 4. Дан треугольник с вершинами $A(4; -14; 8)$, $B(2; -18; 12)$, $C(12; -8; 12)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины C на сторону AB.

№ 5. Найти смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Какую ориентацию имеет базис, ими образованный, если координатный базис $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ правый.

1) $\vec{a}(1; 1; 2)$, $\vec{b}(1; 4; -1)$, $\vec{c}(0; 2; 1)$;

2) $\vec{a}(4; 3; -1)$, $\vec{b}(-2; 1; 0)$, $\vec{c}(1; 1; -2)$.

№ 6. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}(3; 4; 6)$, $\vec{b}(4; 1; 1)$, $\vec{c}(2; 0; 3)$, как на ребрах.

№ 7. Доказать, что векторы $\vec{a}(1; 5; 4)$, $\vec{b}(6; -4; 4)$, $\vec{c}(10; -1; 10)$ компланарны.

№ 8. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках $A(5; 2; 2)$, $B(-8; -2; 5)$, $C(6; 3; 0)$, $D(9; 3; 2)$ и длину его высоты, опущенной из вершины D.

Для проверки правильности ответов в заданиях для самостоятельного выполнения воспользуйтесь QR-кодом

Практическое занятие № 4
ПРЯМАЯ НА КООРДИНАТНОЙ ПЛОСКОСТИ

Рекомендуемая литература для подготовки к занятию в соответствии со списком литературы: [5], с. 58–69; [16], с. 232–238, 240–245; [17], с. 64–74.

Вопросы для подготовки к занятию

1. Дать понятие плоской кривой.
2. Дать понятие замкнутой плоской кривой.
3. Способы задания кривых.
4. Определение прямой.
5. Векторное уравнение прямой.
6. Параметрические уравнения прямой на плоскости и в пространстве.
7. Канонические уравнения прямой на плоскости и в пространстве.
8. Уравнение прямой, проходящей через 2 заданные точки.
9. Общее уравнение прямой.
10. Взаимное расположение прямых на плоскости.
11. Угол между прямыми и формула для его нахождения.
12. Расстояние от точки до прямой.

Теоретический материал

Пусть для плоскости $M_0(x_0, y_0)$, $M(x, y)$, $\vec{a}(a_1, a_2)$, $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, для пространства $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M(x, y, z)$, $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

Таблица 1 – Виды уравнений прямой на плоскости и в пространстве

Вид уравнения прямой	На плоскости	В пространстве
Параметрические уравнения	$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a_1, \\ y = y_0 + \lambda a_2 \end{cases}$	$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a_1, \\ y = y_0 + \lambda a_2, \\ z = z_0 + \lambda a_3 \end{cases}$ (1)
Канонические уравнения	$\dfrac{x - x_0}{a_1} = \dfrac{y - y_0}{a_2}$	$\dfrac{x - x_0}{a_1} = \dfrac{y - y_0}{a_2} = \dfrac{z - z_0}{a_3}$
Уравнение по двум заданным точкам M_1 и M_2	$\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$	$\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$
Общее уравнение прямой	$Ax + By + C = 0$	-

Возможно следующее расположение двух прямых с общими уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, A_2x + B_2y + C_2 = 0 \tag{2}$$

в зависимости от соотношений между коэффициентами этих уравнений:

1. Прямые совпадают, если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

2. Прямые параллельны и не имеют общих точек, если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$.

3. Прямые имеют единственную точку пересечения, если $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$.

Нормальным вектором прямой, заданной общим уравнением

$$Ax + By + C = 0, \tag{3}$$

называется вектор $\vec{n}(A, B)$, который перпендикулярен направляющему вектору прямой $\vec{a}(-B, A)$.

Углом между прямыми называется угол между их направляющими векторами.

Для прямых, заданных уравнениями (2), угол между векторами можно найти по формуле

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \tag{4}$$

Расстоянием $\boldsymbol{\rho}$ от точки $\boldsymbol{M_1}$ до прямой $\boldsymbol{l}$ называется длина перпендикуляра, опущенного из точки M_1 на эту прямую.

Если прямая задана уравнением (3), то расстояние от точки $M_1(x_1, y_1)$ до нее можно вычислить по формуле

$$\rho = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (5)$$

Образцы решения задач

Задача 1. Прямая проходит через точки $M_1(1; 2)$ и $M_2(4; 3)$. Составить общее уравнение этой прямой.

Решение. Воспользуемся уравнением прямой по двум точкам. В результате получим равенство

$$\frac{x-1}{4-1} = \frac{y-2}{3-2},$$

из него после выполнения преобразований приходим к общему уравнению прямой

$$x - 3y + 5 = 0.$$

Задача 2. Составить параметрические уравнения прямой с начальной точкой $M_0\ (2; 1; -2)$ и направляющим вектором $\vec{a}(-1; 3; 4)$.

Решение. Подставляя данные из условия задачи в уравнения (1), получим параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} x = 2 - \mathrm{t}, \\ y = 1 + 3\mathrm{t}, \\ z = -2 + 4\mathrm{t}. \end{cases}$$

Задача 3. Найти угол между прямыми $x - 2 = 0$ и $2x - 2y + 3 = 0$.

Решение. Воспользуемся формулой (4) для нахождения угла между прямыми. Подставив в нее данные из условия задачи, получим

$$\cos\varphi = \frac{|1 \cdot 2 + 0 \cdot (-2)|}{\sqrt{1}\sqrt{4+4}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \varphi = 45°.$$

Задача 4. Найти расстояние от точки $M(2; 4)$ до прямой

$$3x - 4y + 12 = 0.$$

Решение. Воспользуемся формулой (5) для нахождения расстояния от точки до прямой. После подстановки в нее данных из условия задачи имеем

$$\rho(M, l) = \frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 4 + 12|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{2}{5}.$$

Задания для аудиторной работы

№ 1. Написать уравнение прямой, параллельной биссектрисе первого координатного угла и отсекающей на оси Oy отрезок, равный четырем единицам.

№ 2. Построить прямую $3x - 5y - 15 = 0$. Где лежат точки, для которых: 1) $3x - 5y - 15 > 0$, 2) $3x - 5y - 15 < 0$?

№ 3. Указать, какие из следующих прямых:

1) $3x - 15y + 16 = 0$; 2) $3x + 15y - 8 = 0$;

3) $6x - 30y + 13 = 0$; 4) $30x + 6y + 7 = 0$

параллельны и перпендикулярны.

№ 4. Вычислить площадь треугольника, стороны которого лежат на прямых, заданных уравнениями

$$x - 3y + 11 = 0,\ 5x + 2y - 13 = 0,\ 9x + 7y - 3 = 0.$$

№ 5. Через точку $M(1; -2)$ провести прямую, параллельную прямой $4x + 7y - 3 = 0$, и прямую, перпендикулярную данной прямой.

№ 6. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2; 3)$ и параллельной биссектрисе второго координатного угла.

№ 7. Дан треугольник с вершинами $A(0; 5)$, $B(-3; 1)$, $C(1; -2)$. Найти длину высоты, опущенной из точки C.

Задания для самостоятельного выполнения

№ 1. Написать уравнение прямой, перпендикулярной биссектрисе второго координатного угла и отсекающей на оси Ox отрезок длиной 3 единицы.

№ 2. Найти углы между прямыми.

а) $y = 3x + 4$, $y = \frac{1}{3}x + 2$; б) $2x - 4y - 1 = 0$, $3x + 2y + 3 = 0$;

в) $-3x + 2y + 3 = 0$, $4x - 5y - 2 = 0$.

№ 3. Найти внутренние углы треугольника, стороны которого лежат на прямых

$$l_1: 4x - 3y + 2 = 0,\ l_2: 3x + 4y - 1 = 0,\ l_3: x - 7y + 2 = 0.$$

№ 4. Даны две стороны параллелограмма

$$x - y + 1 = 0,\ \ 3x + 2y - 12 = 0$$

и точка $E(6; 4)$ пересечения его диагоналей. Написать уравнения двух других сторон параллелограмма.

№ 5. Составить уравнения прямых, удовлетворяющих указанным условиям.

а) прямая параллельна прямой $2x - 3y + 7 = 0$ и проходит через точку $(-1; 2)$;

б) прямая перпендикулярна прямой $4x - 5y + 1 = 0$, пересекает прямую $x - y + 3 = 0$ и проходит через точку $(-1; y)$.

Для проверки правильности ответов в заданиях для самостоятельного выполнения воспользуйтесь QR-кодом

Практическое занятие № 5
ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

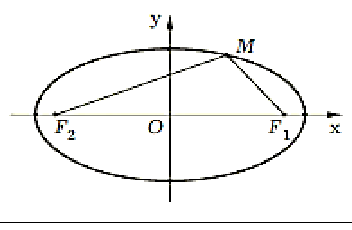
Рекомендуемая литература для подготовки к занятию в соответствии со списком литературы: [5], с. 74–84, 96–97, 105–110; [16], с. 259–276; [17], с. 74–86.

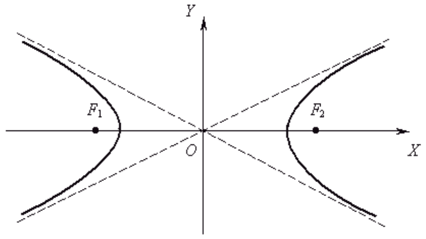
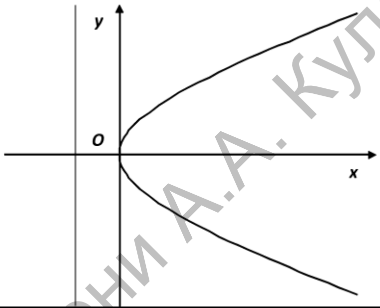
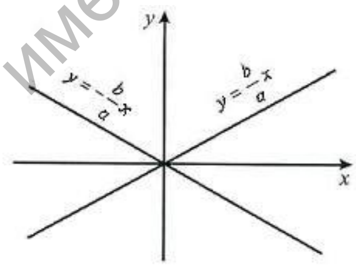
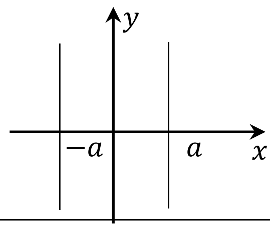
Вопросы для подготовки к занятию

1. Дать определения эллипса, его вершин, полуосей, эксцентриситета, фокусов, директрис.
2. Уравнение окружности с центром в начале координат и радиуса R.
3. Уравнение окружности с центром в точке $O(x_0, y_0)$ и радиуса R.
4. Геометрическое свойство эллипса.
5. Параметрические уравнения эллипса.
6. Фокально-директориальное свойство эллипса.
7. Формула расстояния от точки эллипса до его фокусов.
8. Дать определения гиперболы, ее вершин, асимптот, действительной и мнимой полуосей, эксцентриситета, фокусов, директрис, сопряженной гиперболы.
9. Определение равносторонней гиперболы.
10. Геометрическое свойство гиперболы.
11. Фокально-директориальное свойство гиперболы.
12. Формула расстояния от точки гиперболы до ее фокусов.
13. Дать определения параболы, ее фокуса, директрисы, фокального параметра, эксцентриситета.
14. Формула расстояния от точки параболы до ее фокуса.

Теоретический материал

Таблица 2 – Виды кривых второго порядка

	Название кривой	Уравнение кривой	Изображение кривой
1.	Эллипс	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ $a \geq b > 0.$	
2.	Мнимый эллипс	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$	-

	Название кривой	Уравнение кривой	Изображение кривой
3.	Гипербола	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	
4.	Парабола	$y^2 = 2px, p > 0$	
5.	Пара пересекающихся прямых	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$	
6.	Пара мнимых пересекающихся прямых	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$	-
7.	Пара параллельных прямых	$x^2 = a^2$	
8.	Пара мнимых параллельных прямых	$x^2 = -a^2$	-

Замечание 1. Если $a < b$, то в уравнениях таблицы 2 для эллипса и гиперболы следует сделать соответствующую замену этих величин.

Замечание 2. Кроме гиперболы, заданной уравнением (2), рассматривают ей сопряженную гиперболу

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Для нее в уравнениях для характеристик гиперболы в таблице 1 следует поменять a и b местами.

Замечание 3. Наряду с параболой, заданной уравнением (3), рассматривают параболы, определяемые уравнениями $y^2 = -2px$, $x^2 = 2py$, $x^2 = -2py$. Для них уравнения для характеристик параболы в таблице 1 следует изменить соответствующим образом.

Замечание 4. Если $a = b$, то формула (1) принимает вид

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Это ***уравнение окружности*** с центром в начале координат и радиусом a. Уравнение окружности с центром в точке $O(x_0, y_0)$ и радиуса a имеет вид

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2.$$

Часто используются ***параметрические уравнения эллипса*** с центром в точке $O(x_0, y_0)$, которые задаются системой

$$\begin{cases} x = x_0 + a\cos t\,, \\ y = y_0 + b\sin t\,. \end{cases}$$

Таблица 3 – Основные характеристики эллипса, гиперболы, параболы

Основные характеристики кривых	Эллипс	Гипербола	Парабола
Каноническое уравнение	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (1)$ $a > 0, b > 0$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (2)$ $a > 0, b > 0$	$y^2 = 2px \quad (3)$
Вершины	$(\pm a, 0), (0, \pm b)$	$(\pm a, 0)$	$(0; 0)$
Эксцентриситет	$\varepsilon = \frac{c}{a}$, $c^2 = a^2 - b^2$, $a > b$	$\varepsilon = \frac{c}{a}$, $c^2 = a^2 + b^2$, $a > b$	$\varepsilon = 1$
Фокусы	$F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$	$F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$	$F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$
Фокальный радиус точки M	MF_1, MF_2	MF_1, MF_2	MF $r = x + \frac{p}{2}$
Фокальный параметр	$p = \frac{b^2}{a}$	$p = \frac{b^2}{a}$	p
Уравнения директрис	$x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$	$x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$	$x = -\frac{p}{2}$
Уравнения асимптот	-	$y = \pm\frac{b}{a}x$	-

Теорема 1 (геометрическое свойство эллипса). Точка M принадлежит эллипсу тогда и только тогда, когда сумма расстояний от этой точки до двух фиксированных точек $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$, $a > b$, где $c^2 = a^2 - b^2$, есть величина постоянная, равная $2a$, т.е.

$$|MF_1| + |MF_2| = 2a.$$

Теорема 2 (геометрическое свойство гиперболы). Точка М принадлежит гиперболе тогда и только тогда, когда разность расстояний от этой точки до фокусов гиперболы, есть величина постоянная, равная $2a$, т. е.

$$|MF_1| - |MF_2| = 2a.$$

Фокально-директориальное свойство эллипса. Пусть точка M – произвольная точка эллипса. Тогда отношение расстояния от точки М до фокуса F_i к расстоянию от точки M до соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету эллипса, т.е.

$$\frac{|MF_i|}{\rho(M, l_i)} = \varepsilon.$$

Фокально-директориальное свойство гиперболы. Пусть точка М – произвольная точка гиперболы. Тогда отношение расстояния от точки М до фокуса F_i к расстоянию от точки М до соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету гиперболы, т. е.

$$\frac{|MF_i|}{\rho(M, l_i)} = \varepsilon.$$

Образцы решения задач

Задача 1. Найти полуоси, фокусы и эксцентриситет эллипса

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Решение. В условии задачи дано каноническое уравнение (1) эллипса, в котором большая полуось $a = 5$, малая полуось $b = 4$. Пользуясь таблицей 1, находим, что

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 16} = 3,$$

фокусы имеют координаты $F_1(-3; 0), F_2(3; 0)$, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$.

Задача 2. Составить каноническое уравнение гиперболы, если расстояние между фокусами равно 10 и действительная ось равна 8.

Решение. Каноническое уравнение гиперболы имеет вид (2). Из условия следует, что действительная полуось $a = 4$ и расстояние между фокусами $c = 5$. Тогда мнимая полуось $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$. Искомое уравнение имеет вид

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Задача 3. Определите тип кривой второго порядка, заданной общим уравнением $x^2 + 2y^2 + 2x - 4y - 6 = 0$.

Решение. Данное уравнение не является каноническим. Выделим полные квадраты относительно переменных.

$$(x^2 + 2x + 1 - 1) + 2(y^2 - 2y + 1 - 1) - 6 = 0,$$
$$(x + 1)^2 + 2(y - 1)^2 = 9.$$

Из последнего уравнения после выполнения преобразований приходим к уравнению эллипса

$$\frac{(x+1)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{\frac{9}{2}}=1$$

с центром в точке $(-1;1)$.

Задания для аудиторной работы

№ 1. Написать уравнение окружности радиусом 6 с центром в точке $M(2;-3)$.

№ 2. Для окружности $x^2+y^2-6x+10y-15=0$ найти координаты центра и радиуса.

№ 3. Для эллипса $4x^2+9y^2=16$ найти полуоси, фокусы, эксцентриситет и директрисы.

№ 4. На эллипсе $9x^2+16y^2=144$ найти точку, расстояние от которой до левого фокуса в 2 раза больше расстояния до правого фокуса.

№ 5. Найти полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис гиперболы $9x^2-16y^2=144$.

№ 6. Составить простейшее уравнение гиперболы, симметричной относительно координатных осей, пересекающей ось Oy и проходящей через две точки $M\left(24;5\sqrt{5}\right)$, $N(0;5)$. Найти ее фокусы.

№ 7. Найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы $y^2=16x$. Определить расстояние от точки $M(4;8)$ до фокуса.

№ 8. Найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы $x^2=12y$. Определить расстояние от точки $M(6;3)$ до фокуса.

№ 9. Написать уравнение параболы, симметричной относительно оси Ox и проходящей через точки пересечения прямой $x+y=0$ и окружности $x^2+y^2+8y=0$.

Задания для самостоятельного выполнения

№ 1. Написать уравнение окружности с центром в точке $(2;-3)$ и радиусом 4.

№ 2. Записать уравнение эллипса с большей полуосью равной 6, эксцентриситетом 0,5 и с центром в точке $(0;0)$.

№ 3. Найти координаты центра и радиус окружности.

а) $x^2+y^2-25x+4y+25=0$; б) $x^2+y^2-14x-2y+41=0$.

№ 4. Найти длины осей, координаты фокусов, эксцентриситет и директрисы эллипса.

а) $9x^2+25y^2=225$; б) $9x^2+y^2=25$.

№ 5. Составить простейшее уравнение гиперболы, если:

а) расстояние между фокусами 8, а расстояние между вершинами 6;

б) действительная полуось 5 и эксцентриситет 2,6.

№ 6. Найти длины осей, координаты фокусов, эксцентриситет, асимптоты и директрисы гиперболы $9y^2-16x^2=144$.

№ 7. Записать уравнение параболы, если:

а) ее фокус находится в точке $F(0;5)$, директриса – ось абсцисс, ось симметрии – ось ординат;

б) парабола симметрична относительно оси Oy и проходит через точку $A(3;2)$ и начало координат.

№ 8. Найти координаты фокусов и уравнение директрисы параболы, заданной уравнением: а) $y^2=-10x$; б) $x^2=4y$.

Для проверки правильности ответов в заданиях для самостоятельного выполнения воспользуйтесь QR-кодом

Практическое занятие № 6
ПЛОСКОСТИ И ПРЯМЫЕ В ПРОСТРАНСТВЕ

Рекомендуемая литература для подготовки к занятию в соответствии со списком литературы: [5], с. 176-193; [16], с. 245-248, 251-259; [17], с. 90-104.

Вопросы для подготовки к занятию

1. Дать определение плоскости.
2. Векторное уравнение плоскости.
3. Параметрические уравнения плоскости.
4. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки.
5. Общее уравнение плоскости.
6. Определение угла между плоскостями и формула для его вычисления.
7. Определение угла между прямыми и формула для его вычисления.
8. Определение угла между прямой и плоскостью и формула для его вычисления.
9. Случаи расположения двух прямых в пространстве и признаки им соответствующие.
10. Формула расстояния от точки до прямой в пространстве.
11. Формула расстояния между параллельными прямыми.
12. Расстояние между скрещивающимися прямыми и формула для его нахождения.

Теоретический материал

Таблица 4 – Виды уравнений плоскости

Вид уравнения плоскости	Уравнение (-я)
Векторное уравнение	$\vec{R} = \vec{r_0} + \lambda\vec{a} + \beta\vec{b}$
Параметрические уравнения	$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a_1 + \beta b_1, \\ y = y_0 + \lambda a_2 + \beta b_2, \\ z = z_0 + \lambda a_3 + \beta b_3, \end{cases}$ (1)
Уравнение плоскости, проходящей через 3 заданные точки	$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$ (2)
Уравнение плоскости по точке и двум направляющим векторам	$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$
Общее уравнение	$Ax + By + Cz + D = 0$

Здесь $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M(x, y, z)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ – точки плоскости, $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ – векторы плоскости. Коэффициенты общего уравнения определяют нормальный вектор плоскости $\vec{n}(A, B, C)$.

Углом между плоскостями называется угол между их нормальными векторами. Если координаты нормальных векторов двух плоскостей $\vec{n_1}(A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{n_2}(A_2, B_2, C_2)$ (они легко находятся, если плоскости заданы общими уравнениями), то угол между ними можно найти, используя формулу

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{n_1}, \vec{n_2})}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ***до плоскости***, заданной уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, находится по формуле

$$\rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Формула ***расстояния*** d ***от точки*** $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ***до прямой*** имеет вид

$$d = \frac{|[\vec{m}, \vec{a}]|}{|\vec{a}|},$$

где $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка прямой, $\vec{m}(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$, $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ – ее направляющий вектор.

Угол между двумя прямыми – это угол между их направляющими векторами. Если $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ – направляющие векторы данных прямых, то найти угол между прямыми в пространстве можно по формуле

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

Углом между прямой и плоскостью называется угол между этой прямой и ее ортогональной проекцией на эту плоскость. Его синус вычисляется по формуле

$$|\sin\varphi| = \frac{|Aa_1 + Ba_2 + Ca_3|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

где $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ – направляющий вектор прямой, $\vec{n}(A, B, C)$ – нормальный вектор плоскости.

Пусть $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ – точки, принадлежащие прямым l_1 и l_2 соответственно, а $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ – направляющие векторы этих прямых. Обозначим через $\vec{m} = \overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.

Если прямые параллельны, то расстояние между ними можно найти по формуле

$$d = \frac{|[\vec{m}, \vec{a}]|}{|\vec{a}|}.$$

Если прямые скрещивающиеся, то для вычисления расстояния между ними применяется формула

$$d = \frac{\left|\left(\vec{m}\,\vec{a}\,\vec{b}\right)\right|}{\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right|}. \qquad (3)$$

Образцы решения задач

Задача 1. Составить параметрические уравнения плоскости с начальной точкой $M_0\,(1; 0; -2)$ и направляющими векторами $\vec{a}(2; 3; 0)$ и $\vec{b}(-3; 4; 5)$. Выяснить, лежит ли в этой плоскости точка $A(3; 1; 1)$.

Решение. Подставив в параметрические уравнения плоскости (1) данные из условия задачи, получим параметрические уравнения плоскости

$$\begin{cases} x = 1 + 2\alpha - 3\beta, \\ y = 3\alpha + 4\beta, \\ z = -2 + 5\beta. \end{cases}$$

Для того, чтобы определить, принадлежит ли данная точка данной плоскости, проверим удовлетворяют ли её координаты уравнениям плоскости. Так как система уравнений

$$\begin{cases} 3 = 1 + 2\alpha - 3\beta, \\ 1 = 3\alpha + 4\beta, \\ 1 = -2 + 5\beta, \end{cases}$$

полученная после подстановки координат точки A в уравнения плоскости, имеет решение $\left\{\alpha = -\frac{7}{15}, \beta = \frac{3}{5}\right\}$, то точка A принадлежит этой плоскости.

Задача 2. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1; -1; 2), M_2(3; 1; 3)$, $M_3(2; 1; 0)$.

Решение. Воспользуемся уравнением (2) плоскости по трем точкам. Подставив в него координаты точек из условия задачи, получим уравнение

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

из него после соответствующих преобразований имеем общее уравнение плоскости

$$6x - 5y - 2z - 7 = 0.$$

Задача 3. Найти расстояние между прямыми

$$l_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-1}{3}, \quad l_2: \frac{x+1}{3} = y+2 = \frac{z}{-2}.$$

Решение. Из уравнений прямых находим точки $M_1(2;3;1) \in l_1$, $M_2(-1;-2;0) \in l_2$ и направляющие векторы $\vec{a}(2;-4;3)$ и $\vec{b}(3;1;-2)$ этих прямых соответственно. Составляем вектор $\vec{m} = \overrightarrow{M_1M_2}(-3;-5;-1)$ и находим смешанное произведение векторов $\vec{m}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$, чтобы определить взаимное расположение данных прямых в пространстве.

$$(\vec{m}\,\vec{a}\,\vec{b}) = \begin{vmatrix} -3 & -5 & -1 \\ 2 & -4 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -94.$$

Прямые l_1 и l_2 скрещивающиеся, поскольку $(\vec{m}\,\vec{a}\,\vec{b}) \neq 0$. Тогда по формуле (3) получаем, что

$$d = \frac{|-94|}{4} = 23{,}5,$$

где $\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right| = |6 - 4 - 6| = 4.$

Задания для аудиторной работы

№ 1. Составить уравнение плоскости, если:

а) она перпендикулярна вектору $\vec{n}(3;-1;2)$ и проходит через точку $M(2;1;0)$;

б) она перпендикулярна оси Ox и проходит через точку $N(-1;0;4)$;

в) она проходит через точки $M_1(1;2;0)$, $M_2(-2;3;4)$, $M_3(1;1;5)$.

№ 2. Вычислить расстояние от точки $M(2;-1;2)$ до плоскости, заданной уравнением $3x - 2y + 4z + 1 = 0$.

№ 3. Найти угол между плоскостями

$$4x + 3y - 2z = 0, 3x + y - z + 2 = 0.$$

№ 4. Составить уравнение плоскости, параллельной плоскости $x - y + 3z - 2 = 0$ и отстоящей от нее на расстоянии равном $\sqrt{11}$ единиц.

№ 5. Найти угол между прямыми $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{6} = \frac{z+3}{2}$ и $\frac{x+8}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{2}$.

Задания для самостоятельного выполнения.

№ 1. Составить уравнение плоскости, если:

а) она параллельна оси Ox и проходит через точки $M(1;-2;1)$ и $N(-2;1;3)$;

б) она проходит через точку $N(3;2;-2)$ и ось Oy;

в) она проходит через точки $M_1(1;1;-2)$, $M_2(1;3;0)$, $M_3(2;0;3)$.

№ 2. Вычислить расстояние от точки $M(1;5;2)$ до плоскости, заданной уравнением $2x-3y+z-7=0$.

№ 3. Найти угол между плоскостями:

а) $x+2y-3z-6=0$, $3x+6y-9z-2=0$;

б) $2x-y+z-5$, $3x+2y-z+6=0$.

№ 4. Найти угол между прямыми $\frac{x-4}{2}=\frac{y+1}{7}=\frac{z-3}{8}$ и $\frac{x+1}{7}=\frac{y-7}{11}=\frac{z+1}{-8}$.

№ 5. Найти расстояние от точки $M(1;-2;8)$ до прямой $x=3+t$, $y=-2-3t$, $z=1+2t$.

№ 6. Найти угол между прямой $x=8-2t$, $y=7-2t$, $z=9+4t$ и плоскостью $6x-3y-3z+1=0$.

Для проверки правильности ответов в заданиях для самостоятельного выполнения воспользуйтесь QR-кодом

Практическое занятие № 7
ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рекомендуемая литература для подготовки к занятию в соответствии со списком литературы: [5], с. 216–244; [16], с. 281–298; [17], с. 104–115.

Вопросы для подготовки к занятию

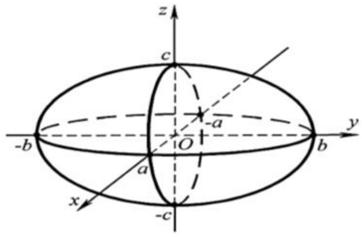
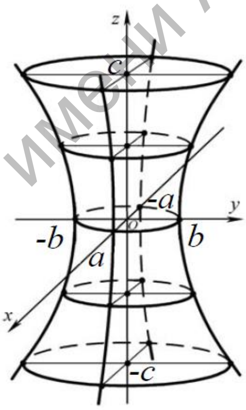
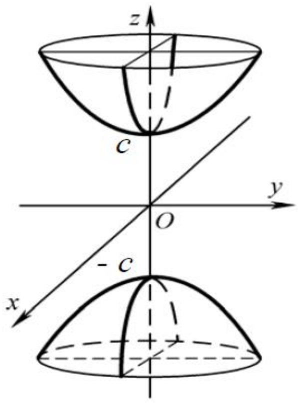
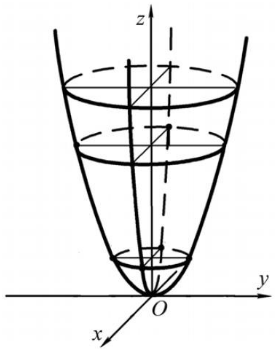
1. Дать определение алгебраической поверхности второго порядка.
2. Виды поверхностей второго порядка (17 простейших видов), их уравнения и изображения.
3. Суть метода сечений для исследования формы поверхностей второго порядка.

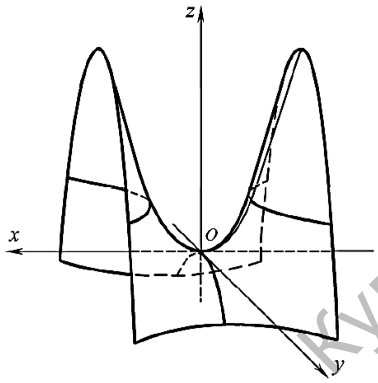
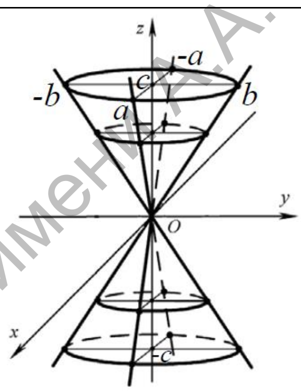
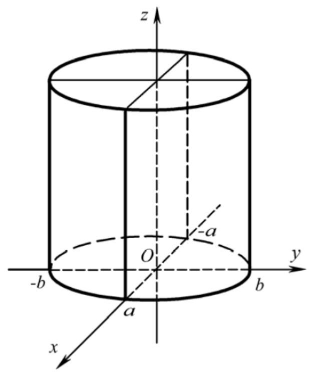
Теоретический материал

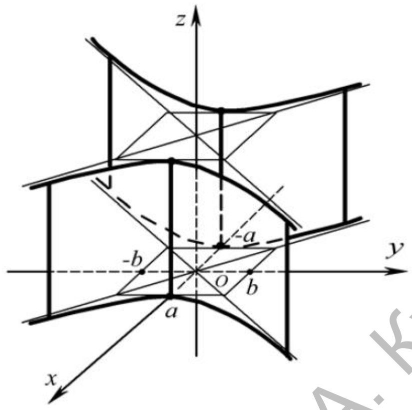
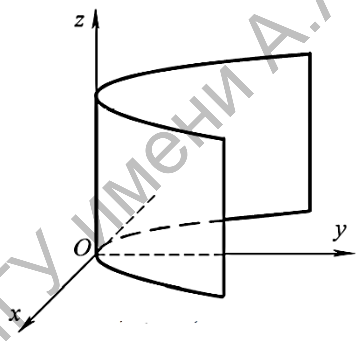
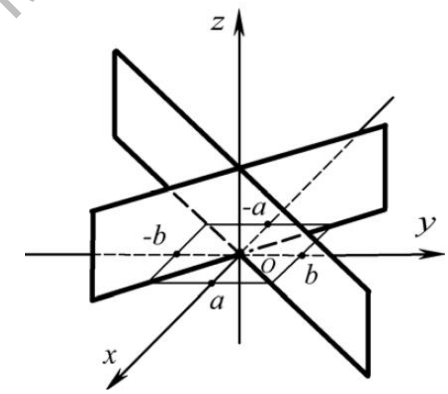
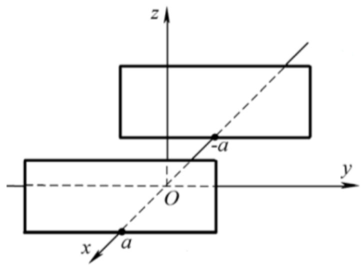
Алгебраической поверхностью второго порядка называется геометрическое место точек плоскости, которое в какой-либо аффинной системе координат $Ox_1x_2x_3$ может быть задано уравнением вида

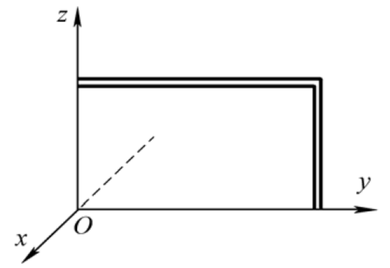
$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+$$
$$+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{10}x+2a_{20}y+2a_{30}z+a_{00}=0.$$

Таблица 5 – Виды поверхностей второго порядка

	Название поверхности	Уравнение поверхности	Изображение поверхности
1	Эллипсоид	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$ $a,b,c>0$	
2	Мнимый эллипсоид	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1,$ $a,b,c>0$	
3	Однополостный гиперболоид	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$ $a,b,c>0$	
4	Двуполостный гиперболоид	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,$ $a,b,c>0$	
5	Эллиптический параболоид	$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z,$ $p>0,q>0$	

	Название поверхности	Уравнение поверхности	Изображение поверхности
6	Гиперболический параболоид	$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z,$ $p > 0, q > 0$	
7	Конус	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$ $a, b, c > 0$	
8	Мнимый конус	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0,$ $a, b, c > 0$	
9	Эллиптический цилиндр	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$ $a, b > 0$	
10	Мнимый эллиптический цилиндр	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1,$ $a, b > 0$	

	Название поверхности	Уравнение поверхности	Изображение поверхности
11	Гиперболический цилиндр	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1,$ $a,b>0$	
12	Параболический цилиндр	$x^2=2pz,$ $p>0$	
13	Пара пересекающихся плоскостей	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0,$ $a,b>0$	
14	Пара мнимых пересекающихся плоскостей	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0,$ $a,b>0$	
15	Пара параллельных плоскостей	$x^2=a^2,$ $a>0$	
16	Пара мнимых параллельных плоскостей	$x^2=-a^2,$ $a>0$	

	Название поверхности	Уравнение поверхности	Изображение поверхности
17	Пара совпавших плоскостей	$x^2 = a^2$, $a > 0$	

Образцы решения задач

Задача 1. Привести уравнение поверхности $x - 8y^2 - 2z^2 = 0$ к каноническому виду. Определить вид поверхности и построить ее методом сечений.

Решение. 1. Приводим уравнение поверхности к каноническому виду

$$\frac{y^2}{\frac{1}{16}} + \frac{z^2}{\frac{1}{4}} = 2x.$$

2. Записываем уравнения секущих плоскостей и уравнения кривых в сечениях. Главные сечения представляют собой пару мнимых пересекающихся прямых и две параболы:

$$\begin{cases} x = 0, \\ 4x^2 + z^2 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0, \\ z^2 = \frac{1}{2}x, \end{cases} \qquad \begin{cases} z = 0, \\ y^2 = \frac{1}{8}x. \end{cases}$$

Сечения плоскостями, параллельными Oyz, представляют собой эллипсы:

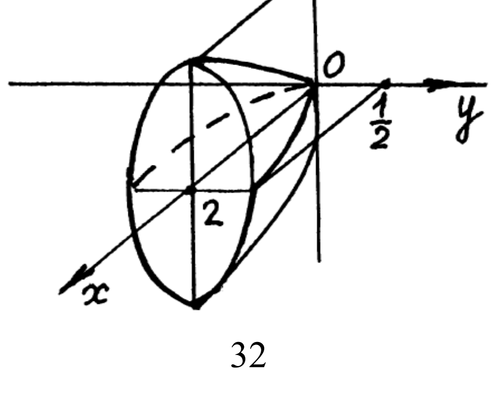
$$\begin{cases} x = h, \\ \dfrac{y^2}{\frac{h}{8}} + \dfrac{z^2}{\frac{h}{2}} = 1. \end{cases}$$

Выберем h = 2, тогда уравнения примут вид

$$\begin{cases} x = 2, \\ 4y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

3. Название поверхности – эллиптический параболоид.

4. Строим поверхность. Для этого строим каждую кривую в соответствующем сечении.



Задача 2. Привести уравнение поверхности $x^2 + y^2 - z^2 - 4y + 8 = 0$ к каноническому виду. Определить вид поверхности и построить её методом сечений.

Решение. 1. Приводим уравнение поверхности к каноническому виду. Для этого группируем члены с одинаковыми переменными

$$x^2 + (y^2 - 4y) - z^2 + 8 = 0.$$

Выделяем полный квадрат относительно y и делим обе части на – 4.

$$x^2 + (y-2)^2 - z^2 = -4,$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{4} - \frac{z^2}{4} = -1.$$

Это поверхность вращения с центром, смещённым в точку $M(0;2;0)$.

2. Записываем уравнения секущих плоскостей и кривых в сечениях. Главные сечения представляют собой две гиперболы и мнимую окружность:

$$\begin{cases} x = 0 \\ \frac{(y-2)^2}{4} - \frac{z^2}{4} = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2 \\ \frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{4} = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} z = 0 \\ x^2 + (y-2)^2 = -4. \end{cases}$$

Сечения плоскостями, параллельными Oxy и находящимися от неё на расстоянии большем 2, представляют собой окружности

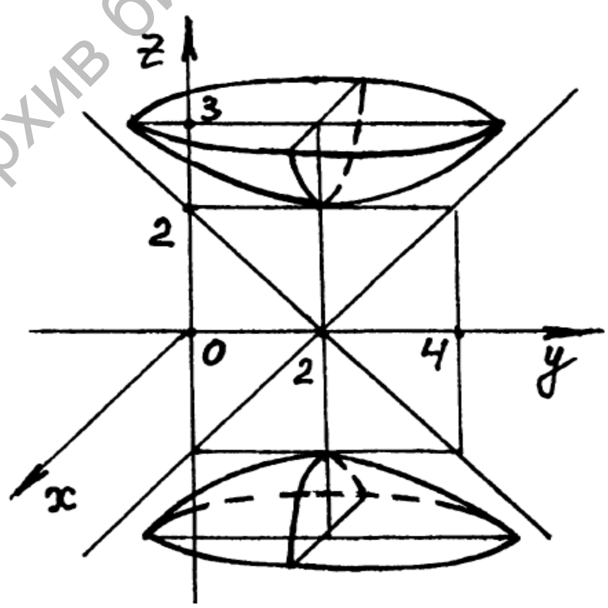
$$\begin{cases} z = \pm h, (h > 2) \\ x^2 + (y-2)^2 = h^2 - 4. \end{cases}$$

Пусть $h = 3$. Тогда система примет вид

$$\begin{cases} z = \pm 3, \\ x^2 + (y-2)^2 = 5. \end{cases}$$

3. Название поверхности – двуполостный гиперболоид.

4. Строим поверхность. Для этого строим каждую кривую в соответствующем сечении.



Задания для аудиторной работы

№ 1. Составить уравнение сферы, если известно, что точки $M_1(4; -3; 7)$ и $M_2(2; 1; 3)$ являются концами одного из ее диаметров.

№ 2. Привести уравнение поверхности к каноническому виду, определить вид поверхности и построить ее методом сечений.

а) $9x^2 + 16y^2 + 36z^2 - 18x + 64y - 216z + 253 = 0$;

б) $4x^2 - 9y^2 + 36z^2 - 16x - 54y - 72z - 65 = 0$;

в) $3x^2 - 4y^2 + 6z^2 + 24x + 8y - 36z + 122 = 0$;

г) $4x^2 - 9y^2 - 8x - 36y - 72z + 184 = 0$;

д) $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 9 = 0$;

ж) $y^2 - 4x - 6y + 17 = 0$.

Задания для самостоятельного выполнения

№ 1. Привести уравнение поверхности к каноническому виду, определить вид поверхности и построить ее методом сечений.

а) $2x^2 - 6y^2 + 3z^2 - 12x - 24y - 24z + 30 = 0$;

б) $x^2 + 2y^2 - 3z^2 - 2x + 8y + 27z - 18 = 0$;

в) $x^2 + 2y^2 + 6x - 18y - 8z + 49 = 0$;

г) $x^2 - 3y^2 + 8x + 6y + 10 = 0$;

д) $x^2 + 4x - 6y + 22 = 0$.

Для проверки правильности ответов в заданиях для самостоятельного выполнения воспользуйтесь QR-кодом

Практическое занятие № 8
МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Рекомендуемая литература для подготовки к занятию в соответствии со списком литературы: [9], с. 120–129, 133–153, 159; [17], с. 16–27.

Вопросы для подготовки к занятию

1. Дать определения матрицы, квадратной матрицы и ее порядка, скалярной матрицы, единичной матрицы.
2. Дать определение равных матриц.
3. Определение суммы матриц. Свойства сложения матриц.
4. Определение произведения матрицы на число и его свойства.

5. Определение умножения матриц и его свойства.
6. Транспонирование матриц и его свойства.
7. Свойства определителей.
8. Теорема о разложении определителя по элементам строки (столбца).
9. Определитель произведения матриц.
10. Обратная матрица (определение, основные теоремы).
11. Нахождение обратной матрицы с помощью присоединенной.

Теоретический материал

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица, составленная из $m \cdot n$ элементов (m строк, n столбцов). Если все элементы матрицы – числа, то матрица называется ***числовой***.

Если $m = n$, т. е. число строк матрицы равно числу ее столбцов, то матрица называется ***квадратной***, а число строк (столбцов) – ее ***порядком***.

Матрица, у которой по главной диагонали стоят числа (не все равны нулю), а все остальные элементы нули, называется ***диагональной***. Она имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Диагональная матрица, у которой все элементы по главной диагонали равны, называется ***скалярной***. Если у скалярной матрицы все диагональные элементы равны 1, то она называется ***единичной*** и имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Если все элементы матрицы равны нулю, то она называется ***нулевой***.

Две матрицы равны, если они одного размера и имеют одинаковые соответствующие элементы, т.е.

$$A = \left(\boldsymbol{a_{ij}}\right)_{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}} = B = \left(\boldsymbol{b_{ij}}\right)_{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}} \Leftrightarrow \boldsymbol{a_{ij}} = \boldsymbol{b_{ij}}, \forall i, j.$$

Суммой двух ***матриц*** $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ и $B = \left(b_{ij}\right)_{m\times n}$ одинакового размера называется матрица $C = \left(c_{ij}\right)_{m\times n}$ того же размера, элементы которой находятся по формуле $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall i, j$. Обозначают $C = A + B$.

Произведением матрицы $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ ***на число*** α называется матрица $C = \alpha A = \left(\alpha a_{ij}\right)_{m\times n}$, получающаяся из матрицы A умножением всех ее элементов на число α.

Пусть даны матрицы $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, $B = \left(b_{ij}\right)_{n\times k}$, причем число столбцов первой матрицы равно числу строк второй. ***Произведением матриц*** A и B называется матрица $C = \left(c_{ij}\right)_{m\times k}$, элементы которой находятся по формуле

$$c_{ij} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip} \cdot b_{pj}.$$

Обозначается $C = A \cdot B$.

Видео, поясняющее правило нахождения произведения матриц, можно посмотреть, воспользовавшись QR-кодом

Операция ***транспонирование*** матрицы состоит в том, что строки матрицы записываются столбцами в порядке их следования. Обозначается A^{T}.

Свойства определителей.

1. Транспонирование определителя не меняет его величины.

2. Если в определителе есть нулевая строка (столбец), то он равен нулю.

3. Если в определителе поменять местами две строки (столбца), то величина определителя останется той же, а знак изменится на противоположный.

4. Если в определителе элементы одной строки (столбца) имеют общий множитель, то его можно вынести за определитель.

5. Если в определителе есть две равные строки (столбца), то он равен нулю.

6. Если в определителе две строки (столбца) пропорциональны, то он равен нулю.

7. Если в определителе какая-либо строка (например, i –ая строка) есть сумма двух векторов А и В, то такой определитель равен сумме определителей, у которых все строки, кроме i –ой, совпадают со строками исходного определителя, а i –ая строка первого слагаемого равна первому вектору А, i –ая строка второго слагаемого – второму вектору В.

8. Если в определителе умножить (мысленно) i –ую строку на число и прибавить к j –ой строке, то величина полученного определителя будет совпадать с величиной исходного определителя.

9. Если все элементы ниже (выше) главной диагонали определителя нули, то такой определитель равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали. Если все элементы ниже (выше) побочной диагонали определителя нули, то такой определитель равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали, умноженных на $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Теорема 1. Определитель матрицы равен сумме произведений элементов какой-нибудь его строки (столбца) на их алгебраические дополнения, т. е.

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}. \qquad (1)$$

Теорема 2 (об определителе произведения матриц). Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению определителей сомножителей, т.е. $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

Если $A \cdot B = E$, то матрица A называется ***левой обратной для матрицы*** B, а B называется ***правой обратной для матрицы*** A.

Квадратная матрица A такая, что ее определитель равен 0, называется ***вырожденной***.

Теорема 3. Для любой невырожденной матрицы А существует правая обратная матрица В и притом единственная. Кроме того, для всякой невырожденной матрицы А левая обратная совпадает с правой обратной.

Теорема 4. Для всякой невырожденной матрицы существует единственная обратная ей матрица.

Обозначается обратная матрица A^{-1}.

Теорема 5. Вырожденная матрица обратной не имеет.

Найти обратную для матрицы А матрицу можно через алгебраические дополнения по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^*, \qquad (2)$$

где A^* – это присоединенная матрица, которая получается путем транспонирования матрицы, элементы которой есть алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы А, т.е.

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Образцы решения задач

Задача 1. Даны две матрицы A и B. Найти: а) $3A + 2B$; б) AB; если

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. а) По определениям операций умножения матрицы на число и сложения матриц имеем

$$3A + 2B = 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 9 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 5 \\ 3 & 1 & 15 \\ 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

б) По определению операции умножения матриц имеем

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}0&2&1\\1&1&3\\-1&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-1&3\\2&1&4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0\cdot1+2\cdot0+1\cdot2 & 0\cdot2+2\cdot(-1)+1\cdot1 & 0\cdot1+2\cdot3+1\cdot4\\ 1\cdot1+1\cdot0+3\cdot2 & 1\cdot2+1\cdot(-1)+3\cdot1 & 1\cdot1+1\cdot3+3\cdot4\\ -1\cdot1+1\cdot0+0\cdot2 & -1\cdot2+1\cdot(-1)+0\cdot1 & -1\cdot1+1\cdot3+0\cdot4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2&-1&10\\7&10&16\\-1&-3&2\end{pmatrix}.$$

Задача 2. Найти определитель матрицы А, разложив его по элементам строки (столбца).

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1&0\\2&1&3&-2\\1&4&2&1\\2&0&3&1\end{pmatrix}.$$

Решение. Воспользуемся формулой (1) для нахождения определителя. Наиболее «выгодные» для разложения строки (столбцы) – те, которые содержат нулевые элементы, поскольку в этом случае соответствующие слагаемые в разложении (1) будут нулевые. В данном случае, это первая и четвертая строки или второй и четвертый столбцы. Выберем, например, для разложения первую строку. Для нее равенство (1) примет вид

$$|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}+a_{14}A_{14}. \qquad (3)$$

Вычислим алгебраические дополнения.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{pmatrix}1&3&-2\\4&2&1\\0&3&1\end{pmatrix}=1\cdot2\cdot1+3\cdot1\cdot0+4\cdot3\cdot(-2)-$$
$$-(0\cdot2\cdot(-2)+3\cdot1\cdot1+4\cdot3\cdot1)=2+0-24-(0+3+12)=-37;$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{pmatrix}2&3&-2\\1&2&1\\2&3&1\end{pmatrix}=-(2\cdot2\cdot1+3\cdot1\cdot2+1\cdot3\cdot(-2)-$$
$$-(2\cdot2\cdot(-2)+3\cdot1\cdot2+3\cdot1\cdot1))=-\big(4+6-6-(-8+6+3)\big)=-3;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{pmatrix}2&1&-2\\1&4&1\\2&0&1\end{pmatrix}=2\cdot4\cdot1+1\cdot1\cdot2+1\cdot0\cdot(-2)-$$
$$-(2\cdot4\cdot(-2)+0\cdot1\cdot2+1\cdot1\cdot1)=8+2+0-(-16+0+1)=25;$$

$$A_{14}=(-1)^{1+4}\cdot\begin{pmatrix}2&1&3\\1&4&2\\2&0&3\end{pmatrix}=-(2\cdot4\cdot3+1\cdot2\cdot2+1\cdot0\cdot3-$$
$$-(2\cdot4\cdot3+0\cdot2\cdot2+1\cdot1\cdot3))=-\big(24+4+0-(24+0+3)\big)=-1.$$

Подставляя найденные значения в формулу (3), находим

$$|A|=1\cdot(-37)+2\cdot(-3)-1\cdot25+0\cdot(-1)=-68.$$

Задача 3. Найти определитель матрицы, используя элементарные преобразования строк (столбцов) и разложение его по элементам строки (столбца).

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1&0&1\\2&1&3&-2&-1\\1&4&2&1&1\\2&0&3&1&0\\-2&1&3&2&1\end{pmatrix}.$$

Решение. Способ вычисления определителя матрицы с использованием элементарных преобразований строк (столбцов) и разложение его по элементам строки (столбца) (по-другому говорят вычисление определителя понижением порядка) приводит к нахождению определителя более низкого порядка. Он основан на свойстве 8 определителя. Суть его сводится к выполнению элементарных преобразований над строками (столбцами) определителя, в результате которых делаются нулями все элементы в выбранной строке (столбце), кроме разрешающего. Далее, применяя формулу (1), для полученного определителя, получаем, что он равен произведению разрешающего элемента на его алгебраическое дополнение (поскольку все остальные слагаемые в разложении (1) нули). Этот метод при необходимости можно применять несколько раз, до тех пор, пока не получится определитель третьего или второго порядка.

Учитывая, что в матрице A данного примера есть нулевые элементы, в качестве разрешающего выберем, например, элемент a_{55}. С его помощью «сделаем нули» в пятом столбце. В четвертой строки элемент $a_{45}=0$, поэтому для нее никакие преобразования не производятся. Для обнуления элементов a_{35}, a_{25}, a_{15} вычтем (прибавим, вычтем) пятую строку соответственно из третьей (второй, первой). Далее, применяя равенство (1), приходим к определителю четвертого порядка, для которого проделываем аналогичные преобразования, взяв в качестве разрешающего элемента a_{44}. Таким образом, имеем

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&-1&0&1\\2&1&3&-2&-1\\1&4&2&1&1\\2&0&3&1&0\\-2&1&3&2&\mathbf{1}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathbf{3}&\mathbf{1}&\mathbf{-4}&\mathbf{-2}&0\\\mathbf{0}&\mathbf{2}&\mathbf{6}&\mathbf{0}&0\\\mathbf{3}&\mathbf{3}&\mathbf{-1}&\mathbf{-1}&0\\\mathbf{2}&\mathbf{0}&\mathbf{3}&\mathbf{1}&0\\-2&1&3&2&\mathbf{1}\end{vmatrix}=$$

$$=\mathbf{1}\cdot(-1)^{5+5}\cdot\begin{vmatrix}3&1&-4&-2\\0&2&6&0\\3&3&-1&-1\\2&0&3&\mathbf{1}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathbf{7}&\mathbf{1}&\mathbf{2}&0\\\mathbf{0}&\mathbf{2}&\mathbf{6}&0\\\mathbf{5}&\mathbf{3}&\mathbf{2}&0\\2&0&3&\mathbf{1}\end{vmatrix}=$$

$$=\mathbf{1}\cdot(-1)^{4+4}\cdot\begin{vmatrix}7&1&2\\0&2&6\\5&3&2\end{vmatrix}=7\cdot2\cdot2+1\cdot6\cdot5+0\cdot3\cdot2-$$

$$-(5\cdot2\cdot2+3\cdot6\cdot7+0\cdot1\cdot2)=28+30+0-(20+126+0)=-88.$$

Задача 4. Для матрицы A найти обратную с помощью присоединенной матрицы.

$$A=\begin{pmatrix}0&2&1\\1&1&3\\-1&1&0\end{pmatrix}.$$

Решение. Для того чтобы найти обратную матрицу для матрицы A, можно воспользоваться формулой (2).

В нашем случае эта формула имеет вид

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij}.

Вычислим определитель матрицы, данной в условии задачи.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \cdot (-1) -$$

$$-2 \cdot 1 \cdot 0 - 3 \cdot 1 \cdot 0 = 1 - 6 + 1 = -4.$$

Вычислим алгебраические дополнения всех элементов данной матрицы.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - 3 \cdot 1 = -3,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -\big(1 \cdot 0 - 3 \cdot (-1)\big) = -3,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) = 2,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 0 - 1 \cdot 1) = 1,$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) = 1,$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -\big(0 \cdot 1 - 2 \cdot (-1)\big) = -2,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 = 5,$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(0 \cdot 3 - 1 \cdot 1) = 1,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = -2.$$

Подставляя найденные числовые значения в формулу для нахождения обратной матрицы, получим

$$A^{-1} = -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{5}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Задания для аудиторной работы

№ 1. Найти сумму матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & -6 & 7 \\ 5 & 8 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 & -4 \\ 1 & -9 & 8 & 11 \\ -4 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & -4 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

№ 2. Найти матрицу $-3A+2B-4C$, если
$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 3 & 6 & -2\\ 4 & -1 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 3 & 2 & -2\\ 4 & 3 & 6\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4 & -2 & 1\\ 3 & 7 & -3\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

№ 3. Транспонируйте матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 4 & 3\\ 2 & 5 & -6 & 7\\ 5 & 8 & 1 & 3\\ -4 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix}4 & 9 & 2 & -4\\ 1 & -9 & 8 & 11\\ -4 & 3 & 5 & 2\\ 1 & -4 & 9 & 1\end{pmatrix}.$$

№ 4. Найти произведение матриц.

а) $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & -2\\ 4 & -1 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 3 & 2 & -2\\ 4 & 3 & 0\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 3\\ 4 & -1 & 2\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 2\\ 4 & 1\\ 0 & 2\\ 1 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

№ 5. Найти определитель, разложив его по элементам строки (столбца).

а) $\begin{vmatrix}2 & 3 & -1\\ 2 & 4 & 5\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 1 & 4\\ -2 & 1 & 3 & -5\\ 2 & 1 & 1 & -1\end{vmatrix}$.

№ 6. Найти определитель матрицы, используя элементарные преобразования строк (столбцов) и разложение его по элементам строки (столбца).

а) $\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 4 & 2 & 0\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 3\\ 4 & 2 & 0 & 3\\ 1 & 4 & 1 & 2\\ -1 & -2 & -2 & 0\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & -2 & 1\\ 2 & 3 & 0 & 4 & 1\\ 2 & -1 & 0 & 2 & 1\\ 3 & 5 & 1 & -2 & 3\\ 4 & 5 & 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

№ 7. Найти обратные матрицы для матриц из № 6 с помощью присоединенной матрицы.

Задания для самостоятельного выполнения

№ 1. Найти сумму матриц

$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1 & 2\\ 3 & 1 & 0 & -1\\ 2 & 0 & 1 & 6\\ 7 & 4 & 2 & 3\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 6 & -3\\ 9 & 7 & 3 & -15\\ 2 & 4 & -5 & 1\\ 3 & -8 & 10 & -1\end{pmatrix}$.

№ 2. Найти матрицу $2A+3B-5C$, если

$$A=\begin{pmatrix}2&0&3\\3&2&-2\\-2&-1&4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-3&4&2\\1&0&-2\\-3&2&5\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-1&-2&1\\2&1&0\\3&2&4\end{pmatrix}.$$

№ 3. Транспонируйте матрицы

$$A=\begin{pmatrix}3&-4&1&8\\5&9&-6&4\\11&3&5&-2\\7&2&3&0\end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix}10&7&6&-1\\3&5&-3&1\\4&13&-5&9\\2&-4&-3&8\end{pmatrix}.$$

№ 4. Найти произведения AB и BA матриц A и B, если они существуют.

а) $A=\begin{pmatrix}3&-1&-1\\1&3&-2\\2&-1&4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2&1&2\\3&0&-2\\1&3&5\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}1&3&-2&0\\-1&2&3&1\\2&-1&1&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4&2\\3&0\\-1&3\\1&2\end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\2&4&-1\\0&1&3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2&1&3\\1&1&-1\\0&2&2\\-2&1&4\\6&1&2\end{pmatrix}$.

№ 5. Найти определитель, разложив его по элементам строки (столбца).

а) $\begin{vmatrix}1&4&-2\\2&1&3\\1&-2&1\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix}5&2&-1&2\\2&-1&1&3\\-2&1&0&-4\\3&1&1&1\end{vmatrix}$.

№ 6. Найти определитель матрицы, используя элементарные преобразования строк (столбцов) и разложение его по элементам строки (столбца).

а) $\begin{pmatrix}1&5&1\\4&1&2\\1&-1&3\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1&-1&2&1\\-2&2&1&3\\5&2&1&2\\-1&0&-2&4\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}1&1&3&-2&1\\2&-2&1&3&1\\4&-1&2&2&1\\0&5&1&-2&2\\-1&5&2&4&-1\end{pmatrix}$.

№ 7. Найти обратные матрицы для матриц из № 6 с помощью присоединенной матрицы.

Для проверки правильности ответов в заданиях для самостоятельного выполнения воспользуйтесь QR-кодом

Для заданий № 1-4 Для заданий № 5-7

Практическое занятие № 9
МАТРИЧНЫЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. ФОРМУЛЫ КРАМЕРА

Рекомендуемая литература для подготовки к занятию в соответствии со списком литературы: [9], с. 160–162; [17], с. 29–30, 32–34.

Вопросы для подготовки к занятию

1. Дать определения линейного уравнения и его решения.
2. Дать определения системы линейных уравнений и ее решения.
3. Определения совместных и несовместных систем линейных уравнений, определенных и неопределенных систем линейных уравнений.
4. Определение равносильных систем линейных уравнений.
5. Матричное представление систем линейных уравнений.
6. Решение систем линейных уравнений матричным способом.
7. Главный и вспомогательные определители систем линейных уравнений.
8. Формулы Крамера.

Теоретический материал

Линейным уравнением называется уравнение вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

$b \in \boldsymbol{R}$ – свободный член, $a_i \in \boldsymbol{R}$, $i = \overline{1, n}$ – коэффициенты уравнения, x_i, $i = \overline{1, n}$, – неизвестные.

Решением линейного уравнения называется n-ка чисел $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ такая, что подстановка чисел c_i, $i = \overline{1, n}$, вместо x_i в уравнение дает верное числовое равенство, т. е.

$$a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_nc_n \equiv b.$$

Системой линейных уравнений (СЛУ) называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

Решением СЛУ называется n-ка чисел $(c_1, c_2, \dots, c_n)$, которая является решением каждого уравнения системы (1) или, другими словами, такая, что подстановка чисел c_i, $i = \overline{1, n}$, вместо x_i в каждое уравнение системы (1) обращает его в верное числовое равенство.

СЛУ может иметь 1) бесконечно много решений; 2) единственное решение; 3) не иметь решений.

СЛУ называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение, в противном случае она называется ***несовместной***.

СЛУ, имеющая единственное решение, называется ***определенной***; имеющая бесконечно много решений – ***неопределенной***.

Две системы линейных уравнений называются ***равносильными***, если у них одно и то же множество решений.

Пусть $n = m$ в системе линейных уравнений (1). Введем обозначения
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Матрицу А называют ***основной матрицей*** системы, матрицу, составленную из элементов матрицы А и столбца свободных членов В, т. е. матрицу
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix},$$
называют ***расширенной матрицей*** системы.

С учетом введенных обозначений, систему (1) можно записать в ***матричном виде***
$$AX = B.$$

Если матрица A невырожденная, т. е. ее определитель не равен 0, то ее можно решать с помощью обратной матрицы. Умножим обе части уравнения на матрицу A^{-1}, обратную матрице A, т. е.
$$A^{-1} \cdot (AX) = A^{-1}B,$$
По свойству ассоциативности умножения матриц имеем
$$(A^{-1}A) \cdot X = A^{-1}B,$$
$$E \cdot X = A^{-1}B,$$
$$X = A^{-1}B. \quad (2)$$

Таким образом, чтобы найти решение системы X надо найти обратную матрицу A^{-1}, а затем найти произведение ее и матрицы B.

Правило Крамера применяется, если число уравнений СЛУ равно числу неизвестных. Если определитель D основной матрицы системы линейных уравнений (главный определитель) не равен нулю, то система имеет единственное решение, которое находится по ***формулам Крамера***
$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \dots, x_n = \frac{D_n}{D}, \quad (3)$$
где D_k, $k = \overline{1, n}$, – это вспомогательный определитель, который получается из определителя D путем замены k-ого столбца на столбец B свободных членов.

Образцы решения задач

Задача 1. Решить систему линейных уравнений а) по формулам Крамера и б) матричным способом.
$$\begin{cases} x + y - z = 1, \\ 8x + 3y - 6z = 2, \\ 4x + y - 3z = 3. \end{cases}$$

Решение. Для решения данной системы линейных уравнений матричным способом воспользуемся формулой (2). Для данной системы

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 8 & 3 & -6\\ 4 & 1 & -3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}.$$

а) Найдем решение системы по формулам (3) Крамера. Найдем главный определитель

$$D=|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 8 & 3 & -6\\ 4 & 1 & -3\end{vmatrix}=1\cdot3\cdot(-3)+1\cdot(-6)\cdot4+8\cdot1\cdot(-1)-$$
$$-(4\cdot3\cdot(-1)+8\cdot1\cdot(-3)+1\cdot(-6)\cdot1)=-9-24-8-$$
$$-(-12-24+6)=1.$$

Вычислим вспомогательные определители.

$$D_1=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 3 & -6\\ 3 & 1 & -3\end{vmatrix}=1\cdot3\cdot(-3)+1\cdot(-6)\cdot3+2\cdot1\cdot(-1)-$$
$$-\big(-1\cdot3\cdot3+1\cdot2\cdot(-3)+1\cdot1\cdot(-6)\big)=-9-18-2-$$
$$-(-9-6-6)=-8.$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 8 & 2 & -6\\ 4 & 3 & -3\end{vmatrix}=1\cdot2\cdot(-3)+8\cdot(-1)\cdot3+4\cdot1\cdot(-6)-$$
$$-\big(-1\cdot2\cdot4+1\cdot8\cdot(-3)+1\cdot3\cdot(-6)\big)=-6-24-24-$$
$$-(-8-24-18)=-4.$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 8 & 3 & 2\\ 4 & 1 & 3\end{vmatrix}=1\cdot3\cdot3+8\cdot1\cdot1+4\cdot1\cdot2-$$
$$-(1\cdot3\cdot4+1\cdot8\cdot3+1\cdot2\cdot1)=9+8+8-(12+12+2)=-13.$$

$$x=\frac{D_1}{D}=-8,\qquad y=\frac{D_2}{D}=-4,\qquad z=\frac{D_3}{D}=-13.$$

Таким образом, $\{(-8;-4;-13)\}$ – решение данной системы линейных уравнений.

б) Для нахождения обратной матрицы воспользуемся формулой (2) занятия № 8, которая для нашего примера принимает вид

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}.$$

Поскольку определитель матрицы А отличен от нуля ($|A|=1$), для нее существует обратная матрица, а соответствующая система имеет единственное решение.

Найдем алгебраические дополнения.

$$A_{11}=\begin{vmatrix}3 & -6\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-9+6=-3,\ A_{12}=-\begin{vmatrix}8 & -6\\ 4 & -3\end{vmatrix}=-(-24+24)=0,$$

$A_{13} = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 8 - 12 = -4$, $A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -(-3+1) = 2$,

$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -3 + 4 = 1$, $A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -(1-4) = 3$,

$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = -6 + 3 = -3$, $A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 8 & -6 \end{vmatrix} = -(-6+8) = -2$,

$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 8 = -5$.

Тогда обратная матрица

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -4 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

По формуле (2) получаем

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -4 & 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+4-9 \\ 0+2-6 \\ -4+6-15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ -13 \end{pmatrix}.$$

Итак, $\{(-8; -4; -13)\}$ – решение данной системы линейных уравнений.

Задания для аудиторной работы

№ 1. Решить системы линейных уравнений матричным способом. Указание. При решении воспользуйтесь результатами задания № 7 для аудиторной работы практического занятия 8.

а) $\begin{cases} -x + 2y + 3z = 1; \\ 4x + 2y = -1; \\ x - 2y + 2z = 3. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y + 2z + 3t = 0; \\ 4x + 2y + 3t = -1; \\ x + 4y + z + 2t = -2; \\ -x - 2y - 2z = 1. \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x + y + 3z - 2u + v = 4; \\ 2x + 3y + 4u + v = -1; \\ 2x - y + 2u + v = 0; \\ 3x + 5y + z - 2u + 3v = 6; \\ 4x + 5y + 2z - v = -2. \end{cases}$

№ 2. Решить системы уравнений по формулам Крамера.

а) $\begin{cases} 3x + 2y = 7; \\ 4x - 5y = 40. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x + 2y = 4; \\ 7x + 4y = 8. \end{cases}$ в) $\begin{cases} 9x + 2y = 8; \\ 4x + y = 3. \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1; \\ x - 2y + 4z = 3; \\ 3x - y + 5z = 2. \end{cases}$ д) $\begin{cases} 2x + 4y + 6z = 3; \\ 3x + y - z = 1; \\ x + 2y + 3z = 4. \end{cases}$ ж) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4; \\ 2x + y - z = 3; \\ 3x + 3y + 2z = 10. \end{cases}$

е) $\begin{cases} (1+a)x - ay = 1 + a; \\ ax + (1-a)y = a - 1. \end{cases}$

Задания для самостоятельного выполнения

№ 1. Решить системы линейных уравнений матричным способом. Указание. При решении воспользуйтесь результатами задания № 7 для самостоятельного выполнения практического занятия 8.

а) $\begin{cases} x+5y+z=4; \\ 4x+y+2z=1; \\ x-y+3z=-2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-y+2z+t=-3; \\ -2x+2y+z+3t=2; \\ 5x+2y+z+2t\ \ =1; \\ -x\qquad -2z+4t=-2. \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x+y+3z-2u+v=7; \\ 2x-2y+z+3u+v\ =0; \\ 4x-y+2z+2u+v\ =5; \\ \quad 5y+z-2u+2v=-2; \\ -x+5y+2z+4u-v=3. \end{cases}$

№ 2. Решить системы уравнений по формулам Крамера.

а) $\begin{cases} 5x+3y=21; \\ 2x+7y=20. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6x+5y=1; \\ 8x+3y=5. \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x+3y=9; \\ 5x+2y=6. \end{cases}$

г) $\begin{cases} x+2y+3z=6; \\ 4x+y+4z=9; \\ 3x+5y+2z=10. \end{cases}$ д) $\begin{cases} 2x+y+3z=3; \\ 4x+2y+5z=5; \\ 3x+4y+7z=2. \end{cases}$ ж) $\begin{cases} x+3y+2z=4; \\ 2x+6y+z=2; \\ 4x+8y-z=2. \end{cases}$

Для проверки правильности ответов в заданиях для самостоятельного выполнения воспользуйтесь QR-кодом

Практическое занятие № 10
МЕТОД ГАУССА РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рекомендуемая литература для подготовки к занятию в соответствии со списком литературы: [9], с. 48–62; [17], с. 34–37.

Вопросы для подготовки к занятию

1. Перечислить элементарные преобразования уравнений системы линейных уравнений.
2. Определение нулевого уравнения.
3. Определение противоречивого уравнения.
4. Леммы о решениях линейных уравнений и систем линейных уравнений.
5. Суть метода Гаусса.

Теоретический материал

Элементарные преобразования уравнений состоят в следующем:

1) любое уравнение системы можно умножить на любое, отличное от нуля число;

2) любое уравнение системы можно прибавить к любому другому уравнению системы.

Теорема 1. Элементарные преобразования уравнений системы линейных уравнений приводят к системе равносильной исходной.

Нулевым уравнением называется уравнение вида

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = 0.$$

Его решением является множество n-ок действительных чисел.

Противоречивым уравнением называется уравнение вида

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = b,\ b \neq 0.$$

Леммы 1-4 содержат свойства решений линейных уравнений, использование которых упрощает решение систем линейных уравнений.

Лемма 1. Линейное уравнение

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \tag{1}$$

удовлетворяется любой n-кой чисел тогда и только тогда, когда оно нулевое.

Лемма 2. Линейное уравнение (1) не удовлетворяется ни одной n-кой чисел тогда и только тогда, когда оно противоречивое.

Лемма 3. Если из системы линейных уравнений удалить нулевое уравнение, то получится система равносильная исходной.

Лемма 4. Если в системе линейных уравнений есть противоречивое уравнение, то она несовместна.

Метод Гаусса решения систем линейных уравнений основан на выполнении элементарных преобразований над уравнениями системы и теореме 1. Целью этих преобразований является получение системы, в каждом уравнении которой остается ненулевой коэффициент только при одном неизвестном, причем это неизвестное входит в остальные уравнения с нулевыми коэффициентами. На практике принято записывать систему матрицей коэффициентов, отделяя от них столбец свободных членов вертикальной чертой. На первом шаге выбирается разрешающий элемент (он всегда отличен от нуля!), исходя из следующих соображений. Он должен быть мал (например, единица) и в столбце, в котором будут обнулять коэффициенты, желательно присутствие нулей. Однако, эти условия необязательны и ими руководствуются только для упрощения вычислений. После выполнения преобразований на первом шаге выбирается следующий разрешающий элемент, при этом в рассмотрении не участвуют элементы из строки и столбца, на пересечении которых находился первый разрешающий элемент. Процесс продолжается до тех пор, пока в каждой строке и столбце не останется по одному ненулевому элементу.

Образцы решения задач

Задача 1. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + y - z = 1, \\ 8x + 3y - 6z = 2, \\ 4x + y - 3z = 3. \end{cases}$$

Решение. Запишем систему в виде матрицы и применим метод Жордана-Гаусса для исключения переменных. Выберем в качестве разрешающего элемента $a_{11} = 1$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & -1 & 1 \\ 8 & 3 & -6 & 2 \\ 4 & 1 & -3 & 3 \end{array}\right).$$

Для того чтобы получить с его помощью нули в первом столбце умножим первую строку матрицы сначала на 8 и вычтем из второй строки (результат вычислений запишем во вторую строку), а затем умножим на 4 первую строку и вычтем из третьей строки (результат вычислений запишем в третью строку). В результате получим следующую систему, равносильную исходной (по теореме 1).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & -6 \\ 0 & -3 & \mathbf{1} & -1 \end{array}\right).$$

На втором шаге выбирать разрешающий элемент можно только во второй и третьей строке и втором и третьем столбце, т. е. из элементов a_{22}, a_{23}, a_{32}, a_{33}. Возьмем в качестве разрешающего элемент $a_{33} = 1$. (Разрешающие элементы для удобство выделяем полужирным шрифтом, в тетради их можно обводить кругом). Для того, чтобы обнулить элементы в третьем столбце, умножим третью строку на 2 и вычтем из второй, затем прибавим третью строку к первой. Результаты этих действий записываются во второй и первой строках соответственно. В итоге получаем следующую, равносильную предыдущей, систему.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & -2 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -4 \\ 0 & -3 & \mathbf{1} & -1 \end{array}\right).$$

На последнем, третьем шаге, для выбора разрешающего элемента остается только элемент $a_{22} = 1$. Для обнуления элементов во втором столбце вторую строку умножаем на 2 и прибавляем к первой, затем вторую строку умножаем на 3 и прибавляем к третьей. Результаты вычислений записываем соответственно в первую и третью строки. Окончательно получаем систему

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -13 \end{array}\right),$$

которую можно записать в виде

$$\begin{cases} x = -8, \\ y = -4, \\ z = -13. \end{cases}$$

Таким образом, $\{(-8; -4; -13)\}$ – решение исходной системы линейных уравнений.

Замечание. На практике описание элементарных преобразований в решении не приводится, а само оформление решения может быть таким.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & -1 & 1 \\ 8 & 3 & -6 & 2 \\ 4 & 1 & -3 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & -6 \\ 0 & -3 & \mathbf{1} & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & -2 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -4 \\ 0 & -3 & \mathbf{1} & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -13 \end{array}\right).$$

Задача 2. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \quad + 2x_5 = 4, \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 + 3x_5 = 6. \end{cases}$$

Решение. Запишем систему в виде матрицы и применим метод Жордана-Гаусса для исключения переменных.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & -4 & 3 & -1 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Получаем систему

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 2, \\ x_2 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Считая для нее свободными неизвестными x_3, x_4, x_5, получаем

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 + 3x_4 - x_5, \\ x_2 = 2x_4. \end{cases}$$

Пусть $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$, $x_5 = c_3$. Запишем общее решение

$$\{(-C_1 + 3C_2 - C_3; 2C_2; C_1; C_2; C_3),\ C_1, C_2, C_3 \in \boldsymbol{R}\}.$$

Задача 3. Решить систему линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ -x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 = 0. \end{cases}$$

Решение. Находим ранг матрицы системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из последней матрицы ясно, что ранг равен количеству ненулевых строк, т. е. 2. Так как число неизвестных больше ранга матрицы, то исходная система имеет фундаментальный набор, состоящий из двух решений. Из последней матрицы можно записать выражение главных переменных через свободные, т. е.

$$\begin{cases} x_1 = 3x_3 + 6x_4, \\ x_2 = -2x_3 - 4x_4. \end{cases}$$

Пусть $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$. Запишем общее решение

$$\{(3C_1 + 6C_2; -2C_1 - 4C_2; C_1; C_2),\ C_1, C_2 \in \boldsymbol{R}\}.$$

Задания для аудиторной работы

№ 1. Решить системы линейных уравнений методом Гаусса.

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ -x_2 - x_3 + 2x_4 = 7, \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_4 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 2, \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 7x_4 = -11, \\ 7x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 15. \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4. \end{cases}$; г) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 2x_4 = -5, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 = 5. \end{cases}$

Задания для самостоятельного выполнения

№ 1. Решить системы линейных уравнений методом Гаусса.

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 7x_1 + 14x_2 + 20x_3 + 27x_4 = 0, \\ 5x_1 + 10x_2 + 16x_3 + 19x_4 = -2, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 13x_4 = 5. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 8, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -3, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 1, \\ -x_2 + x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 - 5x_3 + 2x_6 = 6, \\ 2x_2 + x_4 + 3x_5 = 6, \\ 2x_1 - 7x_3 + 3x_6 = 4, \\ 3x_2 + 2x_4 + 4x_5 = 7, \\ 2x_1 - x_3 + x_6 = -12, \\ 4x_2 + 3x_4 + 5x_5 + x_6 = 9. \end{cases}$

Для проверки правильности ответов в заданиях для самостоятельного выполнения воспользуйтесь QR-кодом

Практическое занятие № 11
НАХОЖДЕНИЕ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ МЕТОДОМ ГАУССА

Рекомендуемая литература для подготовки к занятию в соответствии со списком литературы: [9], с. 131–133; [16], с. 66–68.

Вопросы для подготовки к занятию

1. Определение обратной матрицы.

2. Определение невырожденной матрицы.
3. Условие существования обратной матрицы.
4. Нахождение обратной матрицы из матричного уравнения.
5. Применение метода Гаусса для нахождения обратной матрицы.

Теоретический материал

Если для матрицы A существует такая матрица A^{-1}, что выполняются равенства

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E, \qquad (1)$$

то матрица A^{-1} называется ***обратной*** для матрицы A.

Квадратная матрица A, определитель которой отличен от нуля, называется ***невырожденной***.

Теорема 1 (условие существования обратной матрицы). Для всякой невырожденной матрицы существует единственная обратная ей матрица.

Пусть дана невырожденная матрица A. Составим матричное уравнение

$$AX = E. \qquad (2)$$

Поскольку его решение $X = A^{-1}$, для того чтобы найти обратную матрицу, достаточно решить матричное уравнение (2), которое представляет собой пакет систем линейных уравнений. Эти системы можно решать методом Гаусса, причем все преобразования выполняются одновременно над всеми уравнениями, входящим в пакет систем.

Образцы решения задач

Задача 1. Найти обратную матрицу для данной матрицы с помощью метода Гаусса.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Для нахождения обратной матрицы методом Гаусса решаем пакет систем линейных уравнений (2) с общей основной матрицей из условия задачи. Решение оформляем в матричном виде.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 5 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & \mathbf{1} & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -18 & 0 & 7 & 1 & -5 & 0 \\ 4 & \mathbf{1} & -2 & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{2} & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & \mathbf{34} & 1 & -5 & 9 \\ 0 & \mathbf{1} & -8 & 0 & 1 & -2 \\ \mathbf{2} & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 34 & 1 & -5 & 9 \\ 0 & 17 & 0 & 4 & -3 & 2 \\ 68 & 0 & 0 & -3 & 15 & 7 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{68} & \frac{15}{68} & \frac{7}{68} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{17} & -\frac{3}{17} & \frac{2}{17} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{34} & -\frac{5}{34} & \frac{9}{34} \end{array}\right).$$

Таким образом, $A^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{68} & \frac{15}{68} & \frac{7}{68} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{17} & -\frac{3}{17} & \frac{2}{17} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{34} & -\frac{5}{34} & \frac{9}{34} \end{array}\right)$.

Задания для аудиторной работы

№ 1. Найти обратную матрицу для данной матрицы с помощью метода Гаусса.

а) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & 5 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Задания для самостоятельного выполнения.

№ 1. Найти обратную матрицу для данной матрицы с помощью метода Гаусса и выполнить проверку полученного результата.

а) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Для проверки правильности ответов в заданиях для самостоятельного выполнения воспользуйтесь QR-кодом

Практическое занятие № 12
ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ И ЛИНЕЙНАЯ НЕЗАВИСИМОСТЬ ВЕКТОРОВ, БАЗИС И РАЗМЕРНОСТЬ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА. РАНГ МАТРИЦЫ И ЕГО ВЫЧИСЛЕНИЕ

Рекомендуемая литература для подготовки к занятию в соответствии со списком литературы: [1], с. 7–20; [9], с. 78–99.

Вопросы для подготовки к занятию

1. Определение арифметического вектора.
2. Определения операций сложения векторов и умножения вектора на число и их свойства.
3. Определение линейной комбинации векторов.
4. Определения линейно зависимой и линейно независимой системы векторов.
5. Определение базиса системы векторов.
6. Определение эквивалентных систем векторов. Теоремы о эквивалентности систем векторов.
7. Определение базиса арифметического векторного пространства. Пример базиса.
8. Основная теорема о линейной зависимости системы векторов.
9. Координаты вектора. Теорема о разложении вектора по базису.
10. Ранг системы векторов.
11. Определение ступенчатой системы векторов.
12. Элементарные преобразования векторов. Теорема об элементарных преобразованиях системы векторов.
13. Вертикальный и горизонтальный ранги матрицы и связь между ними.
14. Определение ранга матрицы.
15. Элементарные преобразования матрицы и их свойства.

Теоретический материал

Арифметическим вектором называется любая упорядоченная -ка чисел $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $a_i \in \boldsymbol{R}$, $i = \overline{1,n}$.

Числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ называются ***компонентами*** вектора. Их число определяет ***размерность*** вектора.

Два вектора одной размерности называются ***равными***, если равны их соответствующие компоненты, т.е.

$$\vec{a} = \vec{b} \iff (\forall i)(a_i = b_i).$$

Для арифметических векторов операции сложения векторов и умножения вектора на число вводятся так же, как и в случае линейного векторного пространства, и обладают теми же свойствами (см. занятие № 1).

Система векторов называется ***линейно зависимой***, если существует ее нетривиальная линейная комбинация равная нуль-вектору (хотя бы один коэффициент в линейной комбинации не равен 0). Система векторов называется ***линейно независимой***, если любая ее линейная комбинация, равная нуль-вектору, имеет только нулевые коэффициенты.

Максимальная линейно независимая подсистема системы векторов называется ***базисом*** этой системы векторов.

Максимальность определяется по числу векторов, т. е. добавление хотя бы одного вектора к этой подсистеме делает ее линейно зависимой.

Система векторов (1) ***линейно выражается*** через систему векторов (2), если каждый вектор системы (1) есть линейная комбинация векторов системы (2).

Если система векторов (1) линейно выражается через систему векторов (2) и наоборот система векторов (2) линейно выражается через систему векторов (1), то такие системы называются ***эквивалентными***.

Теорема 1. Любая система векторов эквивалентна своему базису.

Следствие 1. Базисы одной и той же системы векторов эквивалентны между собой.

Следствие 2. Базисы эквивалентных систем векторов эквивалентны.

Базисом арифметического векторного пространства называется такая линейно независимая система векторов, что любой вектор пространства линейно выражается через эту систему.

Теорема 2 (основная теорема о линейной зависимости системы векторов). Система векторов, линейно выражающаяся через другую систему векторов и имеющая большее количество векторов, линейно зависима.

Теорема 3. Вектор системы векторов выражается через базис единственным образом.

Коэффициенты разложения вектора по базису называются ***координатами вектора***.

Число векторов в базисе системы векторов называется ***рангом*** этой системы.

Система векторов $\overrightarrow{b_1}$, $\overrightarrow{b_2}$, …, $\overrightarrow{b_n}$ называется ***ступенчатой***, если матрица, составленная из координат этих векторов (записаны по строкам), имеет ступенчатый вид, т. е.

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2m} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{mm} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Теорема 4. Ранг ступенчатой системы векторов равен числу векторов этой системы.

К *элементарным преобразованиям векторов* относятся:

1. Умножение вектора на число, отличное от нуля.
2. Прибавление одного вектора к другому.

Теорема 5. Элементарные преобразования векторов системы не изменяют ранга этой системы.

В матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

будем рассматривать систему строк, как систему горизонтальных векторов A_1, A_2, …, A_m, и систему столбцов, как систему вертикальных векторов A^1, A^2, …, A^n.

Теорема 6. Элементарные преобразования строк (столбцов) матрицы не изменяют оба ее ранга (ранг системы вертикальных векторов и ранг системы горизонтальных векторов).

Теорема 7. Ранг системы вертикальных векторов равен рангу системы горизонтальных векторов в любой матрице.

Ранг системы вертикальных (горизонтальных) векторов матрицы называется ***рангом матрицы***.

Для того чтобы найти ранг матрицы требуется с помощью элементарных преобразований привести ее к ступенчатому виду. Из рассмотрения исключаются нулевые строки. Количество ненулевых строк в получившейся матрице и есть ее ранг.

Образцы решения задач

Задача 1. Найти линейную комбинацию $2\vec{a}_1 + \overrightarrow{a_2} - 3\overrightarrow{a_3}$ системы векторов $\overrightarrow{a_1}(1; 0; -2)$, $\overrightarrow{a_2}(3; 1; 0)$, $\overrightarrow{a_3}(-2; 4; 1)$.

Решение. Воспользуемся определениями сложения векторов и умножения вектора на число.

$$2\vec{a}_1 + \overrightarrow{a_2} - 3\overrightarrow{a_3} = 2 \cdot \overrightarrow{(1; 0; -2)} + \overrightarrow{(3; 1; 0)} - 3 \cdot \overrightarrow{(-2; 4; 1)} =$$
$$= \overrightarrow{(2; 0; -4)} + \overrightarrow{(3; 1; 0)} - \overrightarrow{(-6; 12; 3)} = \overrightarrow{(11; -11; -7)}.$$

Задача 2. Установить с помощью элементарных преобразований векторов линейную зависимость или независимость системы векторов $\overrightarrow{a_1}(1; 1; -1)$, $\overrightarrow{a_2}(2; -1; 2)$, $\overrightarrow{a_3}(1; 2; -1)$.

Решение. Составим линейную комбинацию данных векторов с произвольными коэффициентами, равную нулевому вектору, т. е.

$$x\overrightarrow{a_1} + y\overrightarrow{a_2} + z\overrightarrow{a_3} = \vec{0}.$$

Подставив данные из условия задачи, получим систему линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0, \\ x - y + 2z = 0, \\ -x + 2y - z = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет только нулевое решение

$$\begin{cases} x = 0, \\ z = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Следовательно, нулевому вектору равна только тривиальная комбинация и данная система векторов линейно зависимая.

Задача 3. Вычислить ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Выберем в качестве разрешающего элемента для выполнения элементарных преобразования элемент $a_{31} = 1$ и с его помощью сделаем нули в первом столбце в остальных строках. В результате получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -7 & -4 \end{pmatrix}.$$

Умножим вторую и четвертую строки на -1 и переставим строки матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Выберем в качестве разрешающего элемента для выполнения элементарных преобразования элемент $a_{22} = 1$ и с его помощью сделаем нули во втором столбце в третьей и четвертой строках. В результате получим матрицу

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 2 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{-2} & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Выберем в качестве разрешающего элемента для выполнения элементарных преобразований элемент $a_{33} = -2$ и с его помощью обнулим элемент a_{43}. В результате получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -11 \end{pmatrix}.$$

Она имеет ступенчатый вид и ее ранг равен 4, значит, и ранг матрицы А равен 4.

Задания для аудиторной работы

№ 1. Найти указанную линейную комбинацию данной системы векторов.

а) $3\vec{a}_1 - 2\overrightarrow{a_2} + 7\overrightarrow{a_3}$, если $\overrightarrow{a_1}(-2; 6; 0)$, $\overrightarrow{a_2}(5; 1; 2)$, $\overrightarrow{a_3}(0; -2; 1)$;

б) $4\vec{a}_1 + \overrightarrow{a_2} - 5\overrightarrow{a_3}$, если $\overrightarrow{a_1}(1; 7; -3)$, $\overrightarrow{a_2}(-2; 11; 4)$, $\overrightarrow{a_3}(-4; 8; 4)$.

№ 2. Проверить является ли система векторов линейно независимой. Найти один из ее базисов, вычислить ранг системы. Через построенный базис выразить небазисные векторы системы.

а) $\overrightarrow{a_1}(1; 2; -3; 1)$, $\overrightarrow{a_2}(3; 0; 2; -1)$, $\overrightarrow{a_3}(4; 1; 0; 1)$, $\overrightarrow{a_4}(-1; 2; -1; 1)$, $\overrightarrow{a_5}(2; 2; 3; 0)$;

б) $\overrightarrow{a_1}(-5; 4; 3; 1)$, $\overrightarrow{a_2}(0; 1; -2; 2)$, $\overrightarrow{a_3}(4; 1; 0; -1)$, $\overrightarrow{a_4}(2; 2; -2; 1)$, $\overrightarrow{a_5}(-3; 0; -1; 2)$, $\overrightarrow{a_6}(1; -2; 1; 0)$.

№ 3. Установить с помощью элементарных преобразований векторов линейную зависимость или независимость системы векторов.

а) $\overrightarrow{a_1}(-1;3;0)$, $\overrightarrow{a_2}(2;11;2)$, $\overrightarrow{a_3}(3;0;1)$; б) $\overrightarrow{a_1}(0;1;-1)$, $\overrightarrow{a_2}(-3;2;-1)$, $\overrightarrow{a_3}(-1;1;2)$.

№ 4. Найти ранг матриц с помощью элементарных преобразований.

$$\text{а)} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 & 3 \\ 8 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \text{ б)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задания для самостоятельного выполнения

№ 1. Найти указанную линейную комбинацию данной системы векторов.

а) $2\vec{a}_1 + \overrightarrow{a_2} - 3\overrightarrow{a_3}$, если $\overrightarrow{a_1}(-1;2;3)$, $\overrightarrow{a_2}(-4;1;0)$, $\overrightarrow{a_3}(6;2;-1)$;

б) $3\vec{a}_1 - 7\overrightarrow{a_2} + 6\overrightarrow{a_3}$, если $\overrightarrow{a_1}(1;-2;0)$, $\overrightarrow{a_2}(3;1;2)$, $\overrightarrow{a_3}(1;-2;1)$.

№ 2. Проверить является ли система векторов линейно независимой. Найти один из ее базисов, вычислить ранг системы. Через построенный базис выразить небазисные векторы системы.

а) $\overrightarrow{a_1}(1;-1;0;1)$, $\overrightarrow{a_2}(-2;3;2;-1)$, $\overrightarrow{a_3}(1;1;2;-1)$, $\overrightarrow{a_4}(0;2;2;1)$, $\overrightarrow{a_5}(2;1;-1;-2)$;

б) $\overrightarrow{a_1}(3;-2;3;1)$, $\overrightarrow{a_2}(1;1;2;0)$, $\overrightarrow{a_3}(-1;1;2;-1)$, $\overrightarrow{a_4}(0;1;-2;1)$, $\overrightarrow{a_5}(3;-1;1;2)$, $\overrightarrow{a_6}(1;0;1;-1)$.

№ 3. Установить с помощью элементарных преобразований векторов линейную зависимость или независимость системы векторов.

а) $\overrightarrow{a_1}(3;2;0)$, $\overrightarrow{a_2}(1;4;-2)$, $\overrightarrow{a_3}(-2;3;1)$;

б) $\overrightarrow{a_1}(2;1;-4)$, $\overrightarrow{a_2}(5;0;-1)$, $\overrightarrow{a_3}(2;1;3)$.

№ 4. Найти ранг матриц а) с помощью элементарных преобразований; б) путем приведения матрицы к ступенчатому виду.

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \text{ б)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

№ 5. При каких значениях параметра a ранг матрицы равен 1) 1; 2) 2; 3) 3?

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Для проверки правильности ответов в заданиях для самостоятельного выполнения воспользуйтесь QR-кодом

Практическое занятие № 13
ПРОИЗВОЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ. ТЕОРЕМА КРОНЕКЕРА-КАПЕЛЛИ. ОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. СТРУКТУРА ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ. ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ СИСТЕМА РЕШЕНИЙ. НЕОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ, СТРУКТУРА ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ

Рекомендуемая литература для подготовки к занятию в соответствии со списком литературы: [1], с. 27–33; [9], с. 99–104, 108–112; [17], с. 30–32, 37.

Вопросы для подготовки к занятию

1. Понятие основной и расширенной матриц системы линейных уравнений (СЛУ).
2. Критерий совместности СЛУ – теорема Кронекера-Капелли.
3. Теоремы о свойствах решений системы линейных однородных уравнений.
4. Теорема о базисе системы линейных однородных уравнений, имеющей ненулевые решения.
5. Теоремы о решениях систем неоднородных линейных уравнений и соответствующих систем однородных линейных уравнений.
6. Теорема о структуре общего решения СЛУ.

Теоретический материал

Теорема 1 (критерий совместности СЛУ, теорема Кронекера-Капелли). СЛУ совместна тогда и только тогда, когда ранг ее основной матрицы равен рангу расширенной.

Линейным однородным уравнением называется уравнение вида
$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0,$$
т. е. линейное уравнение, у которого свободный член равен нулю.

Системой линейных однородных уравнений (СЛОУ) называется система вида
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \qquad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Теорема 2. СЛОУ всегда совместна.

Теорема 3. Если в СЛОУ число уравнений меньше, чем число неизвестных, то такая система имеет бесконечно много решений.

Теорема 4. Всякая СЛОУ имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда ранг ее основной матрицы меньше числа неизвестных.

Теорема 5. Всякая линейная комбинация решений СЛОУ есть решение этой же СЛОУ.

Теорема 6. Если СЛОУ имеет ненулевые решения, то существует базис решений, состоящий из $n-r$ решений, где n – число неизвестных, r – ранг основной матрицы системы.

Базис всех решений СЛОУ называется ее ***фундаментальной системой решений***.

Наряду с системой линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (1)$$

будем рассматривать систему однородных линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Система (2), которая получается из системы (1) путем замены столбца свободных членов нулевым столбцом, называется ***соответствующей системой линейных уравнений***.

Теорема 7. Сумма решения системы (1) и решения системы (2) есть решение системы (1).

Теорема 8. Разность двух решений системы (1) есть решение системы (2).

Теорема 9 (о структуре общего решения СЛУ). Все решения системы (1) можно получить, как сумму фиксированного решения системы (1) и всех решений системы (2).

Образцы решения задач

Задача 1. С помощью теоремы Кронекера-Капелли установить совместность или несовместность системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 5; \\ 5x_1 - 8x_2 \ + 2x_2 = 8. \end{cases}$$

В случае совместности охарактеризовать множество решений (единственное или бесконечное).

Решение. Вычисляем ранг основной и расширенной матриц системы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \\ 5 & -8 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, r_A = 2;$$

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 5 \\ 5 & -8 & 2 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), r_B = 2.$$

Так как ранг основной матрицы равен рангу расширенной матрицы, то система совместна. В силу того, что число неизвестных 3, а ранги равны 2, то система имеет бесконечное множество решений при одном свободном неизвестном.

Задача 2. Найти фундаментальный набор решений системы и записать с его помощью ее общее решение.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0; \\ -x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 = 0. \end{cases}$$

Решение. Находим ранг матрицы системы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из последней матрицы ясно, что ранг равен 2. Так как число неизвестных больше ранга матрицы, то исходная система имеет фундаментальный набор, состоящий из двух решений. Из последней матрицы можно записать выражение главных переменных через свободные.

$$\begin{cases} x_1 = 3x_3 + 6x_4, \\ x_2 = -2x_3 - 4x_4. \end{cases}$$

Полагая $\begin{cases} x_3 = 1, \\ x_4 = 0. \end{cases}$, затем $\begin{cases} x_3 = 0, \\ x_4 = 1. \end{cases}$, получим два частных решения, которые и составляют фундаментальный набор решений

$$\vec{a} = (3, -2, 1, 0) \text{ и } \vec{b} = (6, -4, 0, 1).$$

Все решения данной системы выражаются через фундаментальный набор по формуле $\vec{x} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, где α, β – произвольные числа.

Задания для аудиторной работы

№ 1. С помощью теоремы Кронекера-Капелли установить совместность или несовместность систем линейных уравнений. В случае совместности указать количество решений.

а) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1; \\ 5x_1 + 3x_2 = -2; \\ 2x_1 + x_2 = -1; \\ 3x_1 + 2x_2 = -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 2; \\ 6x_1 + 2x_2 = 4; \\ 9x_1 + 3x_2 = 6; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 0; \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 2; \\ 7x_1 - 4x_2 + 9x_4 = 3. \end{cases}$

№ 2. Найти фундаментальный набор решений системы и записать с его помощью ее общее решение.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 5x_4 + x_5 = 0; \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0; \\ -4x_2 + 5x_3 + 12x_4 - 5x_5 = 0; \\ -6x_1 - x_2 - 4x_3 - 9x_4 + 7x_5 = 0. \end{cases}$$

№ 3. Решить систему линейных уравнений, используя связь ее решений с решениями соответствующей системы однородных уравнений.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 5x_4 + x_5 = -1; \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 6; \\ -4x_2 + 5x_3 + 12x_4 - 5x_5 = 8; \\ -6x_1 - x_2 - 4x_3 - 9x_4 + 7x_5 = -13. \end{cases}$$

Задания для самостоятельного выполнения

№ 1. С помощью теоремы Кронекера-Капелли установить совместность или несовместность систем линейных уравнений. В случае совместности указать количество решений.

а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 4; \\ x_1 - 3x_2 = 1; \\ 4x_1 + x_2 = -5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2; \\ -x_1 + x_2 = 4; \\ -x_1 - 3x_2 = 6; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1; \\ -x_1 + 3x_2 = 3; \\ 2x_1 - x_2 = -1. \end{cases}$

№ 2. Найти фундаментальный набор решений системы и записать с его помощью ее общее решение.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0; \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 0; \\ 4x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 + x_5 = 0; \\ -x_1 + 5x_2 - 12x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$$

№ 3. Решить систему линейных уравнений, используя связь ее решений с решениями соответствующей системы однородных уравнений.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 4; \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 6; \\ 4x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 + x_5 = 16; \\ -x_1 + 5x_2 - 12x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 10. \end{cases}$$

Для проверки правильности ответов в заданиях для самостоятельного выполнения воспользуйтесь QR-кодом

Практическое занятие № 14
ЛИНЕЙНЫЙ ОПЕРАТОР. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА. СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ И СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

Рекомендуемая литература для подготовки к занятию в соответствии со списком литературы: [1], с. 33–40, 50–54.

Вопросы для подготовки к занятию

1. Определение и свойства линейного оператора.

2. Способы задания линейного оператора.
3. Образ вектора под действием линейного оператора.
4. Связь между матрицами, задающими линейный оператор в различных базисах.
5. Определение собственного вектора и собственного значения линейного оператора.
6. Характеристическое уравнение матрицы и линейного оператора.

Теоретический материал

Пусть V – векторное пространство.

Отображение f пространства V в W называется ***линейным отображением*** или ***гомоморфизмом***, если оно удовлетворяет двум условиям:

1. $(\forall \vec{x}, \vec{y} \in V)\ [f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})]$ (свойство аддитивности)

2. $(\forall \vec{x} \in V)\ (\forall \alpha \in P)[f(\alpha\vec{x}) = \alpha f(\vec{x})]$ (свойство однородности)

Линейное отображение пространства само в себя называется ***линейным оператором***.

Свойства линейных операторов:

1. Любой линейный оператор переводит $\vec{0}$ в $\vec{0}$.

2. $(\forall f)[f(-\vec{x}) = -f(\vec{x})]$.

3. Линейный оператор всякую линейную комбинацию векторов переводит в линейную комбинацию образов этих векторов с теми же коэффициентами.

4. Любой линейный оператор задается образами базисных векторов единственным образом.

5. Существует единственный линейный оператор, переводящий данный базис пространства в заданную систему векторов.

Матрицей линейного оператора f в базисе $\boldsymbol{e}$ называется матрица, составленная (по столбцам) из координат образов базисных векторов в этом базисе, т. е.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Пусть дан базис $\boldsymbol{e} = (\overrightarrow{e_1}; \dots; \overrightarrow{e_n})$ и линейный оператор f с матрицей A в этом базисе. В базисе $\boldsymbol{e}$ вектор $\vec{x}$ имеет разложение $\vec{x} = \boldsymbol{e\alpha}$, $\boldsymbol{\alpha}$ – столбец коэффициентов этого разложения (координаты вектора в этом базисе). Тогда разложение образ вектора $\vec{x}$ по базису $\boldsymbol{e}$ определяется равенством

$$f(\vec{x}) = \boldsymbol{e}A\boldsymbol{\alpha}, \qquad (1)$$

где $A\boldsymbol{\alpha}$ – координаты образа вектора $\vec{x}$ по базису $\boldsymbol{e}$.

Если A – матрица оператора f в базисе $\boldsymbol{e}$ и T – матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e}$ к базису $\boldsymbol{u}$, то матрица оператора в базисе $\boldsymbol{u}$ находится по формуле

$$B = T^{-1}AT. \qquad (2)$$

Ненулевой вектор $\vec{b}$ называется ***собственным вектором линейного оператора*** f векторного пространства V над полем P, если его образ пропорционален самому вектору $\vec{b}$, т. е.

$$(\exists\lambda \in P)\ \left[f\left(\vec{b}\right) = \lambda\vec{b}\right].$$

Число λ называется ***собственным значением линейного оператора*** f, а вектор $\vec{b}$ называют собственным вектором, принадлежащим собственному значению λ.

Часто линейный оператор задается своей матрицей A, т.е.

$$f\left(\vec{b}\right) = \boldsymbol{e}A\boldsymbol{\alpha},$$

где $\vec{b} = \boldsymbol{e\alpha}$ – разложение вектор $\vec{b}$ в базисе $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{\alpha}$ – столбец коэффициентов этого разложения.

Для собственного вектора $\vec{b}$ получаем

$$\boldsymbol{e}A\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{e\alpha}$$

или

$$A\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}.$$

Ненулевой вектор $\vec{b}$ называется ***собственным вектором матрицы*** A, если существует такое число $\lambda \neq 0$, что $A\vec{b} = \lambda\vec{b}$. Число λ называется при этом собственным значением вектора $\vec{b}$ относительно матрицы A.

Матрица $A - \lambda E$ называется ***характеристической матрицей*** матрицы A, многочлен $|A - \lambda E|$ называется ***характеристическим многочленом***, уравнение $|A - \lambda E| = 0$ называется ***характеристическим уравнением*** матрицы A.

Образцы решения задач

Задача 1. В трехмерном векторном пространстве с базисом $\boldsymbol{e} = (\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3})$ линейный оператор f переводит всякий вектор $\vec{x}$ с координатами (x_1, x_2, x_3) в вектор $f(\vec{x})$ с координатами $(3x_1, x_1 + x_2, -x_3)$. Найдите матрицу данного линейного оператора.

Решение. Найдем образы базисных векторов. Вектор $f(\overrightarrow{e_1})$ имеет координаты $(3, 1, 0)$, $f(\overrightarrow{e_2})$ – $(0, 1, 0)$, $f(\overrightarrow{e_3})$ – $(0, 0, -1)$. Записывая координаты образа каждого вектора в столбцы матрицы, получим матрицу линейного оператора

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

линейного оператора f в трехмерном векторном пространстве с базисом $\boldsymbol{e} = (\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3})$. Найти $f(\vec{x})$, если вектор $\vec{x}$ имеет координаты $(2, -1, 0)$.

Решение. По формуле (1) находим

$$f(\vec{x}) = \boldsymbol{e}\begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{e}\cdot\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = -7\,\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} - 4\overrightarrow{e_3}.$$

Задача 3. Даны два базиса $\boldsymbol{e} = (\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$ и $\boldsymbol{u} = (\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2})$ двумерного векторного пространства и матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ линейного оператора f в базисе $\boldsymbol{e} = (\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$. Найти матрицу этого оператора в базисе $\boldsymbol{u} = (\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2})$, если известно, что $\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{u_2} = 3\overrightarrow{e_1} - 4\overrightarrow{e_2}$.

Решение. Известно, что если A – матрица оператора f в базисе $\boldsymbol{e} = (\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$ и T – матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e} = (\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$ к базису $\boldsymbol{u} = (\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2})$, то матрица оператора в базисе $\boldsymbol{u} = (\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2})$ находится по формуле (2). В нашем случае

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix},\quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 17 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Задача 4. Найти собственные векторы и собственные значения линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 8 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Из характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 8 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

находим собственные значения $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -3$ матрицы A. Для каждого из собственных значений найдем собственные векторы, решив систему линейных однородных уравнений

$$(A - \lambda E)X = \mathbf{0}.$$

При $\lambda_1 = 2$ получим СЛОУ

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решаем эту систему.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем $x_1 = 0$, $x_3 = 0$, $x_2 = c$ – любое число. Тогда собственным вектором является вектор вида $(0,\ c, 0)$, $c \in \boldsymbol{R}\backslash\{0\}$ (собственный вектор обязательно ненулевой!).

При $\lambda_2 = 3$ имеем СЛОУ

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 8 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решаем ее.

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 8 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ее решением будет $x_3 = 2x_1$, $x_2 = x_1$, $x_1 = c$, где c – любое число. Следовательно, собственным вектором является вектор вида $(c, c, 2c)$, $c \epsilon \boldsymbol{R}\backslash\{0\}$.

При $\lambda_3 = -3$ получим СЛОУ

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 8 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решаем ее.

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 8 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решением является $x_3 = 4x_1$, $x_2 = \frac{1}{5}x_1$, $x_1 = c$, где c – любое число. Значит, собственным вектором будет вектор вида $(5c, -c, -20c)$, $c \epsilon \boldsymbol{R}\backslash\{0\}$.

Задания для аудиторной работы

№ 1. В трехмерном векторном пространстве с базисом $\boldsymbol{e} = (\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3})$ линейный оператор f переводит всякий вектор $\vec{x}$ с координатами (x_1, x_2, x_3) в вектор $f(\vec{x})$ с координатами $(-x_1, x_1 + 3x_2 - x_3, x_2 - x_3)$. Найдите матрицу данного линейного оператора.

№ 2. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

линейного оператора f в трехмерном векторном пространстве с базисом $\boldsymbol{e} = (\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3})$. Найти $f(\vec{x})$, если вектор $\vec{x}$ имеет координаты $(2, -1, 0)$.

№ 3. Даны два базиса $\boldsymbol{e} = (\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$ и $\boldsymbol{u} = (\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2})$ двумерного векторного пространства и матрица $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ линейного оператора f в базисе $\boldsymbol{e} = (\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$. Найти матрицу этого оператора в базисе $\boldsymbol{u} = (\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2})$, если известно, что $\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$.

№ 4. Найти собственные векторы и собственные значения линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Задания для самостоятельного выполнения

№ 1. В трехмерном векторном пространстве с базисом $\boldsymbol{e} = (\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3})$ линейный оператор f переводит всякий вектор $\vec{x}$ с координатами (x_1, x_2, x_3) в вектор $f(\vec{x})$ с координатами $(-x_3 - x_1, 5x_2 - 3x_3, x_2 - x_3)$. Найдите матрицу данного линейного оператора.

№ 2. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 9 \\ -4 & 2 & 4 \\ 8 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

линейного оператора f в трехмерном векторном пространстве с базисом $\boldsymbol{e} = (\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3})$. Найти $f(\vec{x})$, если вектор $\vec{x}$ имеет координаты $(2, -1, 0)$.

№ 3. Даны два базиса $\boldsymbol{e} = (\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$ и $\boldsymbol{u} = (\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2})$ двумерного векторного пространства и матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ линейного оператора f в базисе $\boldsymbol{e} = (\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$. Найти матрицу этого оператора в базисе $\boldsymbol{u} = (\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2})$, если известно, что $\overrightarrow{u_1} = 3\overrightarrow{e_1} - 2\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{2e_1} - \overrightarrow{e_2}$.

№ 4. Найти собственные векторы и собственные значения линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 7 & -2 & 9 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}; \text{ б) } A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для проверки правильности ответов в заданиях для самостоятельного выполнения воспользуйтесь QR-кодом

Практическое занятие № 15
КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

Рекомендуемая литература для подготовки к занятию в соответствии со списком литературы: [5], с. 267–273; [1], с. 85–96.

Вопросы для подготовки к занятию

1. Определение квадратичной формы.
2. Построение матрицы квадратичной формы.
3. Канонический базис квадратичной формы и приведение квадратичной формы к каноническому виду.
4. Канонический базис Якоби.
5. Критерий Сильвестра знакоопределенности квадратичной формы.

Теоретический материал

Квадратичной формой n переменных $x_1, x_2, \dots x_n$ называется числовая функция вида

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j.$$

Числа a_{ij} называются ***коэффициентами*** квадратичной формы. Квадратичная форма называется ***действительной*** или ***комплексной*** в зависимости от того, являются ли ее коэффициенты действительными или комплексными числами.

Квадратичную форму можно также рассматривать как отображение $V \to \boldsymbol{R}$ в некотором базисе, где V – n-мерное векторное пространство.

Матрицей квадратичной формы называется симметрическая матрица порядка n, элементы главной диагонали которой совпадают с коэффициентами при квадратах переменных, а каждый недиагональный элемент равен половине коэффициента при $x_i x_j$ в квадратичной форме.

Рангом квадратичной формы называется ранг ее матрицы.

Невырожденной называется квадратичная форма, матрица которой является невырожденной.

Квадратичная форма называется ***канонической (имеет канонический вид)***, если она имеет вид

$$Q = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2.$$

Матрица квадратичной формы в этом случае является диагональной. Говорят, что квадратичная форма приводится к каноническому виду, если в пространстве V существует базис, в котором ее матрица является диагональной. Всякую квадратичную форму можно привести к диагональному виду. При решении практических задач квадратичную форму приводят к каноническому виду методом Лагранжа, методом Якоби или с помощью ортогонального преобразования. Канонический вид, к которому приводится данная квадратичная форма, не является для нее однозначно определенным. Однако все канонические формы, к которым приводится данная квадратичная форма, имеют:

- одно и то же число нулевых коэффициентов;
- одно и то же число положительных коэффициентов;
- одно и то же число отрицательных коэффициентов.

Это важное утверждение выражает ***закон инерции квадратичных форм***.

Квадратичная форма называется ***положительно определенной***, если она приводится к каноническому виду из n положительных квадратов и ***отрицательно определенной***, если она приводится к каноническому виду из n отрицательных квадратов. Положительно и отрицательно определенные квадратичные формы называются ***знакоопределенными***. Для ответа на вопрос о знакоопределенности квадратичной формы можно пользоваться критерием Сильвестра.

Критерий Сильвестра. Для того, чтобы квадратичная форма была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные угловые миноры матрицы этой формы были положительными. Для того чтобы квадратичная форма была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные угловые миноры четного порядка матрицы этой формы были положительными, а нечетного – отрицательными.

Образцы решения задач

Задача 1. Записать матрицу для квадратичной формы $2x_1^2 + 6x_1x_2 - x_2^2$.

Решение. Матрица данной квадратичной формы является симметрической матрицей второго порядка и имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Записать квадратичную форму для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Из данной матрицы найдем коэффициенты квадратичной формы

$a_{11} = 2, a_{22} = 3, a_{33} = -2,\ a_{12} = a_{21} = -1,\ a_{13} = a_{31} = 0,\ a_{32} = a_{23} = 5.$

Тогда квадратичная форма имеет вид

$$2x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 10x_1x_3 - 2x_3^2.$$

Задача 3. Исследовать на знакоопределенность квадратичную форму $2x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 4x_1x_3 + 2x_3^2$.

Решение. Матрица данной квадратичной формы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Главные миноры

$$\Delta_1 = 2, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 7, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 12 - 2 - 8 = 2.$$

Главные угловые миноры положительны, следовательно, данная квадратичная форма является положительно определенной.

Задача 4. Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2 + 2x_1x_3 + 3x_3^2.$$

Решение. Составим матрицу квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Главные миноры

$$\Delta_1 = 1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -14$$

отличны от нуля, следовательно, можно воспользоваться методом Якоби для приведения квадратичной формы к каноническому виду. Составим формулы линейного преобразования

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + \propto_{12} y_2 + \propto_{13} y_3, \\ x_2 = \qquad\quad y_2 + \propto_{23} y_3, \\ x_3 = \qquad\qquad\qquad y_3, \end{cases}$$

где $\propto_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\Delta_{j-1\, i}}{\Delta_{j-1}}$.

В нашем случае

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 - 0{,}4y_3, \\ x_2 = \qquad\quad y_2 + 0{,}2y_3, \\ x_3 = \qquad\qquad\qquad y_3. \end{cases}$$

Канонический вид данной квадратичной формы следующий

$$y_1^2 - 5y_2^2 + 3x_3^2.$$

Задания для аудиторной работы

№ 1. Записать матрицу для квадратичной формы

$$-x_1^2 + 3x_1x_2 + 3x_2^2 + 4x_1x_3.$$

№ 2. Записать квадратичную форму для матриц

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}; \ \text{б)} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

№ 3. Исследовать на знакоопределенность квадратичные формы.

а) $Q = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3$;

б) $Q = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 5x_1x_2 + 3x_1x_3 + 4x_2x_3$.

№ 4. Найти все значения параметра λ, при которых положительно определены следующие квадратичные формы.

а) $Q = 2x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$;

б) $Q = \lambda x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

№ 5. Найти все значения параметра λ, при которых отрицательно определены следующие квадратичные формы.

а) $Q = -x_1^2 + \lambda x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

б) $Q = -2x_1^2 - 2x_2^2 + \lambda x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$.

№ 6. Привести к каноническому виду квадратичные формы.

а) $Q = x_1^2 + 4x_1x_2$;

б) $Q = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$.

Задания для самостоятельного выполнения

№1. Записать матрицу для квадратичной формы

$$2x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2^2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3 - 2x_3^2.$$

№ 2. Записать квадратичную форму для матриц

$$\text{а)} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix};\text{б)} \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \\ 2 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

№ 3. Исследовать на знакоопределенность квадратичные формы.

а) $Q = 4x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 + x_1x_2 + 6x_1x_3 + x_2x_3$;

б) $Q = 3x_1^2 + 6x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3$.

№ 4. Найти все значения параметра λ, при которых положительно определена квадратичная форма

$$Q = 2x_1^2 + \lambda x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

№ 5. Найти все значения параметра λ, при которых отрицательно определена квадратичная форма

$$Q = -x_1^2 + 2x_2^2 + 2\lambda x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3.$$

№ 6. Привести к каноническому виду квадратичную форму $Q = x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2$.

Для проверки правильности ответов в заданиях для самостоятельного выполнения воспользуйтесь QR-кодом

Практическое занятие № 16
УПРОЩЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ФИГУР ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ. УПРОЩЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ФИГУР ВТОРОГО ПОРЯДКА В ПРОСТРАНСТВЕ

Рекомендуемая литература для подготовки к занятию в соответствии со списком литературы: [4], с. 138–143.

Вопросы для подготовки к занятию

1. Общее уравнение фигуры второго порядка на плоскости и его матричная запись.
2. Матрица квадратичной формы, соответствующая уравнению фигуры второго порядка на плоскости.
3. Эллиптический, гиперболический и параболический тип фигуры второго порядка на плоскости.

4. Общее уравнение фигуры второго порядка в пространстве и его матричная запись.
5. Алгоритм приведения уравнения фигуры второго порядка на плоскости или в пространстве к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования.

Теоретический материал

Общее уравнение фигуры второго порядка на плоскости имеет вид

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{10}x + a_{20}y + a_{00} = 0.$$

Матричная запись данного уравнения

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{10} & a_{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_{00} = 0.$$

Соответствующая ему ***матрица квадратичной формы***

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Если ее определитель положительный, то соответствующая фигура имеет ***эллиптический тип***; если ее определитель отрицательный, то соответствующая фигура имеет ***гиперболический тип***; если ее определитель равен нулю, то соответствующая фигура имеет ***параболический тип.***

Общее уравнение фигуры второго порядка в пространстве имеет вид

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz +$$
$$+a_{10}x + a_{20}y + a_{30}z + a_{00} = 0.$$

Матричная запись данного уравнения

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{10} & a_{20} & a_{30} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + a_{00} = 0.$$

Соответствующая ему ***матрица квадратичной формы***

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Для приведения уравнения фигуры второго порядка на плоскости или в пространстве к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования можно выполнить следующую последовательность действий.

1. Записать матрицу A, соответствующую уравнению квадратичной формы.
2. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы A.
3. Из нормированных собственных векторов составить матрицу T ортогонального оператора, приводящего квадратичную форму к каноническому виду.
4. Получить уравнение данной фигуры в виде:

4.1 $\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{10} & a_{20} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + a_{00} = 0$

(на плоскости).

$$4.2\ (x' \quad y' \quad z') \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} +$$

$$+(a_{10} \quad a_{20} \quad a_{30}) \cdot \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + a_{00} = 0$$

(в пространстве).

5. Выделить, если возможно, полные квадраты относительно переменных.
6. Записать каноническое уравнение данной фигуры, определить тип фигуры и, при необходимости, выполнить рисунок.

Образцы решения задач

Задача 1. Дано уравнение фигуры второго порядка

$$x^2 - 3xy + 2y^2 - 4x + 5 = 0.$$

Записать данное уравнение в матричном виде и выяснить, фигуру какого типа (эллиптического, гиперболического, параболического) оно определяет.

Решение. Матричная запись данного уравнения имеет вид:

$$(x \quad y) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (-4 \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 5 = 0.$$

Фигура имеет гиперболический тип, так как

$$\begin{vmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} < 0.$$

Задача 2. Привести к каноническому виду уравнение фигуры второго порядка на плоскости

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y + 16 = 0.$$

Решение. Квадратичная форма, соответствующая данному уравнению, имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Корнями характеристического уравнения будут числа $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 2$. Из нормированных собственных векторов составим матрицу ортогонального оператора, приводящего квадратичную форму к каноническому виду

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Получим каноническое уравнение данной фигуры

$$(x' \quad y') \cdot \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (-16 \quad -16) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 16 = 0,$$

или

$$8(x')^2 + 2(y')^2 - 16\sqrt{2}x' - 16\sqrt{2}y' + 16 = 0.$$

После выделения полных квадратов в последнем уравнении получим каноническое уравнение эллипса

$$\frac{\left(x' - \sqrt{2}\right)^2}{8} + \frac{\left(y' - 4\sqrt{2}\right)^2}{32} = 1.$$

Задания для аудиторной работы

№ 1. Дано уравнение фигуры второго порядка

$$x^2 - 3xy + 2y^2 - 4x + 5 = 0.$$

Записать данное уравнение в матричном виде и выяснить, фигуру какого типа (эллиптического, гиперболического, параболического) оно определяет.

№ 2. Привести к каноническому виду уравнение фигуры второго порядка на плоскости.

а) $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x + 12y + 10 = 0$;

б) $x^2 + 6xy + y^2 + 4\sqrt{2}x + 8\sqrt{2}y - 1 = 0$.

№ 3. Привести к каноническому виду уравнение фигуры второго порядка в пространстве.

а) $2x^2 + y^2 - 4xy - 4yz + 2x - y + 1 = 0$;

б) $6x^2 - 2y^2 + 6z^2 + 4xz + 8x - 4y - 8z + 1 = 0$.

Задания для самостоятельного выполнения

№1. Дано уравнение фигуры второго порядка

$$x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 5y = 0.$$

Записать данное уравнение в матричном виде и выяснить, фигуру какого типа (эллиптического, гиперболического, параболического) оно определяет.

№ 2. Привести к каноническому виду уравнение фигуры второго порядка на плоскости.

а) $x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$;

б) $5x^2 + 12xy + 3\sqrt{13}x - 36 = 0$.

№ 3. Привести к каноническому виду уравнение фигуры второго порядка в пространстве.

а) $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz - 14x - 4y + 14z + 16 = 0$;

б) $yz = 2$.

Для проверки правильности ответов в заданиях для самостоятельного выполнения воспользуйтесь QR-кодом

ПОДГОТОВКА К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ

Подготовка к контрольным работам по каждому из разделов «Аналитическая геометрия», «Линейная алгебра» включает следующие этапы.

I. Повторение теоретического материала, краткое содержание которого имеется в занятиях № 1-7, № 8-16 соответственно каждому разделу. Все приведенные в них формулы необходимо знать наизусть. Проверьте себя! Для этого по каждой теме, не подглядывая в конспект и методичку, выпишите основные формулы. Проговорите определения понятий и теоремы, делая краткие и схематические записи и пометки, выполняйте рисунки и чертежи, которые иллюстрируют материал.

II. Повторите алгоритмы решения задач по каждой теме. Основные из них находятся в образцах решения задач. Повторение означает НЕ ЧТЕНИЕ задач, А их самостоятельное РЕШЕНИЕ! Прорешайте еще раз некоторые задания из аудиторной или самостоятельной работы по занятиям.

III. Если вы уверены в том, что сможете решить контрольную работу, переходите к предложенным ниже заданиям для подготовки к ней. При их решении не пользуйтесь подсказками и не смотрите образцы решения.

IV. Если вы успешно прошли все три предыдущих этапа подготовки, то с большой долей вероятности можете ожидать хорошую отметку по контрольной работе, в чем авторы желают вам успехов.

Задания для подготовки к контрольной работе по разделу «Аналитическая геометрия»

1. Найти скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ и угол между ними, если $A(0;-1)$, $B(1;-2)$, $C(2;-1)$.

2. Найти векторное произведение векторов $\vec{a}(2;-3;1)$, $\vec{b}(0;1;-4)$.

3. Найти смешанное произведение векторов $\vec{a}(2;-3;1)$, $\vec{b}(0;1;-4)$, $\vec{c}(-2;0;-1)$.

4. Записать общее уравнение прямой, проходящей через точку $M(-1;2)$ и параллельную прямой $\frac{x-1}{3}=\frac{y+3}{-2}$.

5. Записать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1;-1;1)$, $M_2(-2;1;0)$ и параллельную прямой $\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{-1}=z+1$.

6. Написать уравнение параболы, симметричной относительно оси Ox и проходящей через точки $A(3,-1)$ и $O(0;0)$. Найти координаты ее фокуса и уравнение директрисы. Определить расстояние от точки $N(2;3)$ до фокуса.

7. Привести к каноническому виду уравнение поверхности

$$4x^2+9y^2-3z^2+40x-12y-18z+20=0,$$

определить вид поверхности и построить ее методом сечений.

Проверить правильность своих результатов можно, воспользовавшись QR-кодом

Задания для подготовки к контрольной работе по разделу «Линейная алгебра»

1. Найти $A \cdot B$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Найти обратную матрицу для матрицы A с помощью присоединенной матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Решить систему линейных уравнений а) по формулам Крамера; б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 2, \\ 4x + 2y + z = -3, \\ -3x + y - 2z = 1. \end{cases}$$

4. Проверить является ли система векторов линейно независимой. Найти один из ее базисов, вычислить ранг системы. Через построенный базис выразить небазисные векторы системы.

$\overrightarrow{a_1}(1; -1; 2)$, $\overrightarrow{a_2}(0; 1; -3)$, $\overrightarrow{a_3}(2; 3; -1)$, $\overrightarrow{a_4}(3; 2; 1)$

Проверить правильность своих результатов можно, воспользовавшись QR-кодом

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алгебра и аналитическая геометрия : учебное пособие для студентов математических специальностей университетов и педагогических институтов / М. В. Милованов [и др.]. – Минск : Вышэйшая школа, 1987. – Ч. 2. – 269 с.

2. Алгебра и теория чисел / под ред. Н. Я. Виленкина. – Москва : Просвещение, 1974. – Ч. 3. – 200 с.

3. Александров, А. Д. Геометрия : учебное пособие для вузов / А. Д. Александров, Н. Ю. Нецветаев. – Москва : Наука, 1990. – 672 с.

4. Апатенок, Р. Ф. Сборник задач по линейной алгебре и аналитической геометрии : учебное пособие для вузов / Р. Ф. Апатенок, А. М. Маркина, В. Б. Хейман ; под ред. В. Т. Воднева. – Минск : Вышэйшая школа, 1990. – 286 с.

5. Атанасян, Л. С. Геометрия : учебное пособие для студентов физико-математических факультетов педагогических институтов : в 2 ч. / Л. С. Атанасян, В. Т. Базылев. – Минск : Просвещение, 1986. – Ч. 1. – 336 с.

6. Атанасян, Л. С. Сборник задач по геометрии / Л. С. Атанасян. – Москва : Просвещение, 1973. – Ч. 1. –256 с.

7. Атанасян, Л. С. Сборник задач по геометрии / Л. С. Атанасян. – Москва : Просвещение, 1975. – Ч. 2. –176 с.

8. Базылев, В. Т. Сборник задач и упражнений по геометрии / В. Т. Базылев. – Москва : Просвещение, 1980. – 238 с.

9. Варпаховский, Ф. Л. Алгебра / Ф. Л. Варпаховский, А. С. Солодовников. – 2-е изд., перераб. – Москва : Просвещение, 1984. – 168 с.

10. Гельфанд, И. М. Лекции по линейной алгебре / И. М. Гельфанд. – 4-е изд., доп. – Москва : Наука, 1971. – 271 с.

11. Справочник по высшей математике / А. А. Гусак [и др.]. – 9-е изд. – Минск : ТетраСистемс , 2009. – 640 с.

12. Комиссарук, А. М. Основы аффинной геометрии на плоскости / А. М. Комиссарук. – Минск : Вышэйшая школа, 1967. – 240 с.

13. Кострыкин, А. И. Основы алгебры / А. И. Кострыкин. – Москва : Физико-математическая литература, 2000. – 272 с.

14. Ляпин, Е. С. Алгебра и теория чисел : учебное пособие для студентов физико-математических факультетов педагогических институтов / Е. С. Ляпин, А. Е. Евсееев. – Москва : Просвещение, 1974. – Ч. 1 : Числа. – 383 с.

15. Ляпин, Е. С. Алгебра и теория чисел : учебное пособие для студентов физико-математических факультетов педагогических институтов / Е. С. Ляпин, А. Е. Евсеев. – Москва : Просвещение, 1978. – Ч. 2 : Линейная алгебра и полиномы. – 447 с.

16. Милованов, М. В. Алгебра и аналитическая геометрия : в 2 ч. / М. В. Милованов, Р. И. Тышкевич, А. С. Феденко. – Минск : Вышэйшая школа, 1984. – Ч. 1. – 302 с.

17. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике : полный курс / Д. Т. Письменный. – 9-е изд. – Москва : Айрис-пресс, 2009. – 608 с.

18. Погорелов, А. В. Геометрия / А. В. Погорелов. – Москва : Наука, 1983. – 288 с.

19. Постников, М. М. Аналитическая геометрия / М. М. Постников. – Москва : Наука, 1986. – 415 с.

20. Практические занятия по алгебре и теории чисел : учебное пособие для студентов физико-математических факультетов педагогических институтов / М. П. Лельчук [и др.]. – Минск : Вышэйшая школа, 1986. –302 с.

21. Радьков, А. М. Алгебра и теория чисел : атлас для самостоятельной работы : учебное пособие для студентов физико-математических специальностей педагогических институтов / А. М. Радьков, Б. Д. Чеботаревский. – Минск : Вышэйшая школа, 1992. – 286 с.

22. Размыслович, Г. П. Геометрия и алгебра. Практикум : учебное пособие для студентов учреждений высшего образования по специальностям «Прикладная математика», «Информатика», «Актуарная математика» и направлениям специальностей «Экономическая кибернетика», «Компьютерная безопасность», «Прикладная информатика» / Г. П. Размыслович, А. В. Филипцов, В. М. Ширяев. – Минск : Выш. шк., 2018. – 380 с.

23. Расолько, Г. А. Аналитическая геометрия : практикум с использованием MathCad : учебное пособие для студентов учреждений высшего образования по математическим специальностям / Г. А. Расолько, Ю. А. Кремень. – Минск : Вышэйшая школа, 2019 . – 271 с.

24. Рябушко, А. П. Высшая математика : теория и задачи : учебное пособие для студентов учреждений высшего образования по техническим специальностям : в 5 ч. / А. П. Рябушко, Т. А. Жур. – 2-е изд. – Минск : Вышэйшая школа, 2017. – Ч. 1 : Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. – 302 с.

25. Тышкевич, Р. И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учебное пособие для математических специальностей университетов и педагогических институтов / Р. И. Тышкевич, А. С. Феденко. – 2-е изд., перераб. – Минск : Вышэйшая школа, 1976. – 544 с.

26. Шнеперман, Л. Б. Курс алгебры и теория чисел в задачах и упражнениях : учебное пособие для физико-математических факультетов педагогических институтов / Л. Б. Шнеперман. – Минск : Вышэйшая школа, 1986. – Ч. 1. – 272 с.

27. Шнеперман, Л. Б. Курс алгебры и теория чисел в задачах и упражнениях : учебное пособие для физико-математических факультетов педагогических институтов / Л. Б. Шнеперман. – Минск : Вышэйшая школа, 1987. – Ч. 2. – 256 с.

28. Шнеперман, Л. Б. Сборник задач по алгебре и теории чисел : учебное пособие для физико-математических факультетов педагогических институтов / Л. Б. Шнеперман. – Минск : Вышэйшая школа, 1982. – 223 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Марченко Ирина Васильевна
Романович Людмила Александровна

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Методические рекомендации к практическим занятиям по математике

В четырех частях

Часть 1

Технический редактор *А. Л. Позняков*
Компьютерная верстка *А.Л. Позняков*

Подписано в печать .05.2021.
Формат 60x84/16. Гарнитура Times New Roman Cyr.
Усл.-печ. л. 4,65. Уч.-изд. л. 5,8. Тираж 80 экз. Заказ № .

Учреждение образования “Могилевский государственный университет имени А.А. Кулешова”, 212022, Могилев, Космонавтов, 1
Свидетельство ГРИИРПИ № 1/131 от 03.01.2014 г.

Отпечатано в отделе оперативной полиграфии
МГУ имени А. А. Кулешова. 212022, Могилев, Космонавтов, 1