МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ БССР

БЕЛОРУССКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И.ЛЕНИНА

На правах рукописи

Чеботаревский Борис Дмитриевич

ГРУППЫ ЛИ АВТОМОРФИЗМОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА МНОГООБРАЗИЯХ

(01.01.04 - геометрия и топология)

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук

Минск 1978

Работа выполнена на кафедре геометрии Белорусского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета имени В.И.Ленина.

Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор В.И.Ведерников

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор В.С.Малаховский (Калининградский государственный университет),

кандидат физико-математических наук, доцент З.Н.Четыркина (Минский радиотехнический институт).

Ведущее высшее учебное заведение: Тартусский государственный университет

Защита состоится "13" июня 1978 года в 10 часов на заседании специализированного Совета К 056.03.05 по присуждению учёной степени кандидата наук в Белорусском ордена Трудового Красного Знамени государственном университете имени В.И.Ленина (220080, г.Минск, Университетский городок, главный корпус, комната 206).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Белгосуниверситета имени В.И.Ленина.

Автореферат разослан "6" мая 1978 года.

Учёный секретарь Совета
доцент (П.Н.Князев)

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблематики. Систематическое изучение свойств симметрии дифференциальных уравнений берет начало от работ С.Ли 90-х годов XIX века. Им было введено понятие группы, допускаемой системой дифференциальных уравнений, тесно связанное со свойствами множества их решений. В последние два десятилетия теория групповых свойств дифференциальных уравнений, основы которой, как указано выше, заложены С.Ли, интенсивно применялась к изучению важнейших уравнений механики и физики. Получаемые с её помощью результаты зачастую имели глобальную трактовку, в то время как используемый математический аппарат давал право лишь на локальные рассмотрения. В связи с этим, дальнейшая разработка методики применения групп Ли в теории дифференциальных уравнений является актуальной, особенно при рассмотрениях в целом.

Цель работы: построение математического аппарата для изучения свойств симметрии дифференциальных уравнений на многообразиях, позволяющего строго разграничивать локальный и глобальный подходы; применение этого аппарата к нахождению групп Ли автоморфизмов таких уравнений и их инвариантных решений.

Научная новизна. В диссертации рассмотрена задача продолжения групп преобразований и векторных полей на пространство струй локальных сечений расслоенного многообразия и на пространства дифференциально-геометрических объектов, выяснена связь таких продолжений со свойствами симметрии дифференциальных уравнений (понимаемых в смысле Куранищи) и производными Ли поля геометрического объекта и его деформациями. Построена категория дифференциальных уравнений на многообразиях, изучены продолжения введённых в работе уравнений, выделены и рассмотрены вполне интегрируемые и инволютивные уравнения. Получены необходимые и достаточные конструктивные условия существования локальных и глобальных групп Ли автоморфизмов дифференциальных уравнений на многообразиях и изучены их инвариантные решения в целом.

Практическая значимость. Работа носит теоретический характер, но её результаты могут быть использованы при дальнейшем изучении дифференциальных уравнений механики и физики.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на IУ Республиканской конференции математиков Белоруссии "Проблемы развития прикладных математических исследований"(Минск, 1975 г.) на семинаре член-корреспондента СО АН СССР, профессора Л.В.Овсянникова (НГУ), на семинаре по дифференциальной геометрии многообразий фигур при Калининградском университете, на Геометрическом семинаре Казанского университета, на семинаре кафедры алгебры и геометрии Тартусского университета, а также на геометрическом семинаре при Белгосуниверситете им.В.И.Ленина.

Публикации. Основные результаты диссертации изложены в работах [I-4].

Структура работы. Диссертация изложена на I09 страницах, состоит из введения, трёх глав, приложения и списка литературы из 87 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дан краткий обзор основных направлений исследований советских и зарубежных математиков, непосредственно примыкающих к теме диссертации, обоснована постановка задачи и приведены в виде краткой аннотации основные результаты диссертации.

Теория групповых свойств дифференциальных уравнений возникла и развивалась как локальная теория, описывающая свойства симметрии дифференциальных уравнений, причем последние трактуются как системы функций, связывающие независимые, зависимые переменные и производные от вторых по первым. Для прояснения характера затруднений, препятствующих глобализации этой теории, и обоснования выбора направления и методов решения поставленной задачи в первой главе диссертации изучаются основные вопросы теории групповых свойств дифференциальных уравнений, понимаемых в смысле Кураниши. Следует подчеркнуть, что понятие дифференциального уравнения в смысле Кураниши является обобщением на случай неплоских пространств и нетривиальных расслоений классического понятия дифференциального уравнения.

Показано, что при попытке продолжения действия группы Ли преобразований тотального пространства M расслоенного многообразия ξ на пространство $J^k\xi$ голономных k-струй локальных сечений ξ, на $J^k\xi$ в общем случае возникает только локальная группа Ли преобразований. Кроме того, разделение переменных на независимые (x^i) и зависимые (y^α) делает неестественным рассмотрение общих преобразований вида

$$\begin{cases} 'x^i = f_1^i(x^\varepsilon, y^\beta), \\ 'y^\alpha = f_2^\alpha(x^\varepsilon, y^\beta), \end{cases} \qquad (\mathrm{I})$$

а изучение автоморфизмов уравнений в смысле Куранишн требует рассмотрения преобразований менее общего по сравнению с (I) вида.

Причиной указанных затруднений является наличие на M структуры расслоения. Один из возможных путей их преодоления состоит во введении в рассмотрение пространства параметров.

С учётом этого во второй главе дано другое определение дифференциального уравнения, отличное от используемого ранее.

Под дифференциальным уравнением понимается набор $\theta = (M,\ п,\ к,\ \mathcal{U},\ \Phi)$, где М - многообразие (все рассмотрения проводятся в классе C^∞), п и к - натуральные числа, $\mathcal{U}$ - открытое λ-инвариантное множество в пространстве $T^к_п M$ (п, к)-скоростей на М, Ф - инвариантный относительно λ локально конечно порождённый подпучок идеалов пучка функций на $\mathcal{U}$. (Здесь

$$\lambda : T^к_п M \times \mathfrak{D}^к(п) \longrightarrow T^к_п M : (\, j^к_0 f ,\ j^к_0 \varphi) \longmapsto j^к_0 (f \circ \varphi)$$

- представление дифференциальной группы $\mathfrak{D}^к(п)$.)

Пара $(\mathcal{N}, \tau)$, где $\mathcal{N}$ - многообразие размерности п, $\tau : \mathcal{N} \longrightarrow M$, удовлетворяет дифференциальному уравнению θ, если для каждой точки $x \in \mathcal{N}$ и каждой локальной карты (V, ψ) в окрестности точки x $F(\, j^к_0(\tau \circ \psi^{-I} \circ t_{\psi(x)})) = 0$ для всех функций F, принадлежащих пучку Ф ($t_{\psi(x)} : \bar{x} \longmapsto \bar{x} + \psi(x)$ - сдвиг $R^п$). Пары $(\mathcal{N}, \tau)$ и $(\hat{\mathcal{N}}, \hat{\tau})$ называются эквивалентными относительно θ, если они удовлетворяют θ и существует диффеоморфизм $\nu : \mathcal{N} \longrightarrow \hat{\mathcal{N}}$ такой, что $\tau = \hat{\tau} \circ \nu$. Решением уравнения θ называется класс $\{(\mathcal{N}, \tau)\}$ пар $(\mathcal{N}, \tau)$, эквивалентных относительно θ.

Показано, что системы уравнений Пфаффа и дифференциальные уравнения в смысле Кураниши порождают некоторые дифференциальные уравнения в смысле этого определения. Использование языка теории пучков позволяет разделять локальный и глобальный подходы, введение же в рассмотрение пространства параметров $R^п$ приводит к равноправию всех систем локальных координат на многообразии М и делает неестественным априорное выделение "независимых" и "зависимых" переменных. Применение теории струй даёт возможность проводить все рассмотрения в бескоординатной форме. В диссертации, тем не менее, с учётом потребностей практических вычислений приводятся также и функциональные описания рассматриваемых понятий на языке локальных адаптированных координат.

С целью построения категории $\mathcal{DE}$ дифференциальных уравнений определено понятие морфизма: морфизмом $\nu: \theta_1 \longrightarrow \theta_2$ дифференциального уравнения $\theta_1 = (M_1, n, k, \mathcal{U}_1, \Phi_1)$ в уравнение $\theta_2 = (M_2, n, k, \mathcal{U}_2, \Phi_2)$ называется отображение $\nu: M_1 \longrightarrow M_2$ такое, что $(T_n^k \nu)^{-1}(\mathcal{U}_2) = \mathcal{U}_1$ и $(T_n^k \nu)^* \Phi_2 \subset \Phi_1$, где $(T_n^k \nu)^* \Phi_2$ - подпучок идеалов на $\mathcal{U}_1$, порождённый функциями $F_2 \circ T_n^k \nu$, $F_2 \in \Phi_2$.

В связи с этим определением доказано: если пара $(\mathcal{N}, \tau)$ удовлетворяет уравнению θ_1 и $\nu: \theta_1 \longrightarrow \theta_2$ - морфизм, то пара $(\mathcal{N}, \nu \circ \tau)$ удовлетворяет θ_2.

Воспользовавшись формальными производными $\partial_i^* F$, которые в диссертации определены равенством

$$(\partial_i^* F)(j_0^{k+1} f) = \frac{\partial}{\partial x^i}(F(j_0^k (f \cdot t_x)))_{x=0},$$

приходим к понятию продолженного уравнения: если $\theta = (M, n, k, \mathcal{U}, \Phi)$ - дифференциальное уравнение, то набор $p\theta = (M, n, k+1, \mathcal{U}', p(\Phi))$ определяет на M дифференциальное уравнение, называемое продолжением уравнения θ. Подпучок идеалов $p(\Phi)$ порождён функциями $F \circ \pi_k^{k+1}$ и $\partial_i^* F$, $F \in \Phi$; $\mathcal{U}' = (\pi_k^{k+1})^{-1}(\mathcal{U})$.

Доказаны следующие утверждения.

Продолжение дифференциальных уравнений является ковариантным функтором из категории $\mathcal{DE}$ в себя.

Пара $(\mathcal{N}, \tau)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению θ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет продолженному уравнению $p\theta$.

Вполне интегрируемые и инволютивные уравнения определяются в диссертации аналогично тому, как это сделано Куранищи (*Kuranishi M. Lectures on involutive systems of partial differential equations. Sao Paulo, 1967*). Понятие инволютивного уравнения является локальным, что позволяет установить связь между всеми утверждениями, описывающими структуру таких уравнений на расслоенных многообразиях и структуру объектов из категории DE . Вторая глава диссертации заканчивается доказательством аналога теоремы Картана-Келера-Лаптева-Куранищи о продолжении.

Пусть $\theta_к = (M, п, к, \mathcal{U}_к, \Phi_к)$, $к \geqslant к_I$, - дифференциальные уравнения, $I(\theta_к) = \{ z \in \mathcal{U}_к \mid F(z) = 0,\ F \in \Phi_к \}$, $z_к \in I(\theta_к)$, $\pi^{к+I}_к(z_{к+I}) = z_к$, $\mathrm{id} \mid V_{к+I} : \theta_{к+I} \mid V_{к+I} \longrightarrow p\theta_к \mid V_{к+I}$ - морфизм для некоторой окрестности $V_{к+I}$ точки $y_0 = \pi^к_0(z_к)$, подпучок $\Phi_к$ регулярен в точке $z_к$. Если существует окрестность $W_к$ точки $z_к$ такая, что $W_к \cap I(\theta_к)$ - подмногообразие в $T^к_п M$, $((\pi^{к+I}_к)^{-I}(W_к)) \cap I(\theta_{к+I})$ - подмногообразие в $T^{к+I}_п M$ и $(((\pi^{к+I}_к)^{-I}(W_к)) \cap I(\theta_{к+I}),\ W_к \cap I(\theta_к),\ \pi^{к+I}_к)$ - расслоенное многообразие, то существует $к_2$ такое, что для всех $к > к_2$ уравнение $\theta_к$ инволютивно в точке $z_к$ и ограничения уравнений $\theta_{к+I}$ и $p\theta_к$ на некоторую окрестность точки y_0 совпадают.

В третьей главе изучаются вопросы, связанные с нахождением и использованием групп Ли автоморфизмов дифференциальных уравнений. С этой целью строятся продолжения групп преобразований и векторных полей на пространства $FB^к M$ геометрических объектов и, в частности, на пространство $T^к_п M$. Доказано, что продолжения

$$T^к_п : \mathfrak{D}^I(M) \longrightarrow \mathfrak{D}^I(FB^к M) : X \longmapsto T^к_п(X)$$

векторных полей являются инъективными гомоморфизмами алгебр Ли, и раскрыта связь между продолжениями полей и производными Ли поля геометрического объекта и его деформациями. Для римановой структуры локальное рассмотрение этих вопросов было произведено Н.Х.Ибрагимовым (ДАН СССР, 1968, Т. 178, № I, с. 27-30). Такой подход позволяет провести параллель при рассмотрении групп автоморфизмов между дифференциально-геометрическими объектами и дифференциальными уравнениями на многообразиях.

С целью изучения локальных автоморфизмов дифференциального уравнения определено понятие допускаемого им векторного поля. Для каждого векторного поля X строится вспомогательный пучок Ф', связанный с уравнением $\Theta = (M, n, k, \mathcal{U}, \Phi)$:

$$\Phi'_{*} = \{F' = T^k_n(t_0 X)F \mid F \in \Phi, t_0 \in R\}.$$

Два ростка в стебле Φ'_z пучка Ф' над точкой z, порожденные функциями F_I и F_2, будем называть z-эквивалентными, если росток, порождённый разностью $F_I - F_2$, лежит в Ф. Через Ф/X обозначен фактор-пучок по этому отношению эквивалентности. В диссертации доказано, что каждое регулярное дифференциальное уравнение допускает алгебру Ли векторных полей (она может быть нулевой); для того, чтобы уравнение $\Theta = (M, n, k, \mathcal{U}, \Phi)$ с регулярным пучком Ф и $\mathcal{U} = T^k_n M$ допускало векторное поле X, необходимо и достаточно, чтобы каждый стебель пучка Ф/X состоял из одного ростка. Связная односвязная конечномерная группа Ли G является группой автоморфизмов дифференциального уравнения $\Theta = (M, n, k, T^k_n M, \Phi)$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

а) алгебра Ли глобальных сечений пучка $\mathcal{B}$ ростков векторных полей, допускаемых уравнением Θ, содержит $\mathcal{I}m\,\psi^+$;

б) продолжение псевдогруппы $\mathcal{G}(\mathcal{B})$, порождённой пучком $\mathcal{B}$, сохраняет $I(\Theta)$;

в) векторные поля $\psi^{*}(L_i)$ полны, $i = 1, \dots, \dim G$;

здесь

$$\psi : G \times M \longrightarrow M - \qquad (2)$$

G-пространство, L_i - базис в алгебре Ли группы Ли G.

При изучении более общей ситуации ($\mathcal{U}$ - собственное подмножество $T^k_n M$) необходимо рассматривать такие пучки алгебр Ли ростков векторных полей на M, для каждого локального сечения X которых выполняется условие: для любой точки $y \in M$ и любого t из достаточно малой окрестности нуля в $\mathbb{R}$ существует такая окрестность W точки y, что

$$(T^k_n \lambda_t)(\mathcal{U} \cap ((\pi^k_0)^{-1}(W))) = \mathcal{U} \cap ((\pi^k_0)^{-1}(\lambda_t(W))).$$

Поэтому в предложении, описывающем глобальные группы Ли автоморфизмов дифференциальных уравнений к условиям а) - в) следует добавить условие

г) продолжение псевдогруппы $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ сохраняет $\mathcal{U}$.

Если известна группа Ли G автоморфизмов дифференциального уравнения θ, то естественно поставить вопрос об отыскании G-инвариантных решений θ, то-есть таких решений $\{(\mathcal{N}, \tau)\}$, что $\{(\mathcal{N}, \tau)\}$ и $\{(\mathcal{N}, \psi_g \circ \tau)\}$ совпадают для всех $g \in G$. Изучение локальной стороны этого вопроса начато ещё, по-видимому, С.Ли (см. Овсянников Л.В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск, изд-во СО АН СССР, 1962). При рассмотрении глобальных аспектов, связанных с нахождением G-инвариантных решений, удалось получить следующие утверждения.

Если представление (2) группы Ли G размерности $r < n$ задает на M структуру главного G-пространства и определяет автоморфизмы дифференциального уравнения $\theta = (M, n, k, \mathcal{U}, \Phi)$, то на пространстве орбит $\overline{M}$ естественным образом возникает дифференциальное уравнение $\bar{\Theta} = (\bar{M}, n-r, к, \bar{\mathcal{U}}, \bar{\Phi})$.

Каждая пара ($\bar{\mathcal{N}}$, $\bar{\tau}$), удовлетворяющая уравнению $\bar{\Theta}$, позволяет указать пару ($\mathcal{N}$, τ), удовлетворяющую Θ, и при этом решение $\{(\mathcal{N}, \tau)\}$ будет G-инвариантным.

При некотором дополнительном ограничении имеет место и обратное утверждение: если $\{(\mathcal{N}, \tau)\}$ - G-инвариантное решение дифференциального уравнения Θ, то на $\mathcal{N}$ индуцируется структура главного G-пространства, определяется отображение $\bar{\tau}: \bar{\mathcal{N}} \longrightarrow \bar{M}$ его пространства орбит, являющееся морфизмом G-пространств; пара ($\bar{\mathcal{N}}$, $\bar{\tau}$) удовлетворяет уравнению $\bar{\Theta}$. Объекты $\bar{\mathcal{U}}$, $\bar{\Phi}$, $\bar{\mathcal{N}}$, $\bar{\tau}$ описаны в доказательствах соответствующих теорем, которые носят конструктивный характер.

Все изложенные в диссертации теоретические положения иллюстрируются на примере дифференциального уравнения на трехмерном торе.

В приложении приведены определения части используемых понятий и некоторые необходимые результаты.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

I) Рассмотрены основные вопросы теории групповых свойств дифференциальных уравнений на расслоенных многообразиях.

2) Дано инвариантное относительно выбора локальных координат построение категории дифференциальных уравнений на многообразиях.

3) Изучены локальные и глобальные группы Ли автоморфизмов дифференциальных уравнений на многообразиях и их применение к нахождению инвариантных решений.

Перечисленные результаты и выносятся на защиту.

Выражаю глубокую благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору В.И.Ведерникову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Чеботаревский Б.Д. К теории групповых свойств дифференциальных уравнений. - В кн.: Проблемы развития прикладных математических исследований (IУ Республиканская конференция математиков Белоруссии 3-4 июня 1975 года). Тезисы докладов. Часть II. Ротапринт ИМ АН БССР, Минск, 1975, с. 88-89.

2. Чеботаревский Б.Д. Построение категории дифференциальных уравнений. Рукопись депонирована в ВИНИТИ, рег. № 658-76 Деп.

3. Чеботаревский Б.Д. Деформации пространства с фундаментальным объектом. Рукопись депонирована в ВИНИТИ, рег. № 659-76 Деп.

4. Чеботаревский Б.Д. Автоморфизмы дифференциальных уравнений. - "Вестник Белорусского ун-та. Сер. I, мат., физ., мех.", 1977, № 2, с.72-73.

АО - 01185 Подписано к печати I.04.1978 г
Заказ № 940, тираж I00 экз. Объем I2 кн стр.
Формат I/I6 листа 60 х 84

Отпечатано на ротапринте Вычислительного центра
Статуправления Могилевской области