

## КОНСТРУКТИВНЫЙ АНАЛИЗ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ И НЕТОПОЛОГИЧЕСКИХ СОЛИТОНОВ (2+1)-МЕРНЫХ ОБОБЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ЗАХАРОВА – КУЗНЕЦОВА

*Известно [1], что классическое уравнение Захарова – Кузнецова описывает эволюцию ионно-акустических волн в замагниченной плазме при малых амплитудах и представляет интерес для приложений [1-10].*

*В работе исследуется вопрос о существовании топологических и нетопологических солитонов и законов их распространения для уравнений Захарова – Кузнецова с различными типами нелинейности на основе прямого метода из [11].*

### Нетопологические солитоны

I. Нетопологические солитоны, как известно [2], описываются колоколообразными функциями. Простейшим примером нетопологического солитона является решение краевой задачи

$$f''(\xi) = Af(\xi) - Bf^{2m+1}(\xi), \quad m > 0, \quad (1)$$

$$f(\pm\infty) = f'(\pm\infty) = 0, \quad \xi = kx + ly - \omega t, \quad (2)$$

где  $A, B, k, l, \omega$  – действительные числа, к которой сводится широкий класс уравнений в частных производных со степенными нелинейностями. Приведем следующий результат [12].

**Теорема 1.** *Для того чтобы краевая задача (1), (2) имела решение вида*

$$f(\xi) = \lambda ch^{-\frac{1}{m}}(\xi), \quad \lambda > 0, \quad (3)$$

где  $\lambda$  – амплитуда солитона, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$A = \frac{1}{m^2}, \quad \lambda^{2m} = \frac{(m+1)}{Bm^2}, \quad B > 0. \quad (4)$$

Соотношения (4) являются законами распространения солитона (3) и показывают зависимость амплитуды  $\lambda$  от степени нелинейности  $m$ .

Интересно, что

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \lambda(m) = 1.$$

Заметим, что  $\omega$  определяет скорость солитона, а величины  $1/k$ ,  $1/l$  — определяют ширину солитона в направлении осей  $x$ ,  $y$  соответственно.

Результаты теоремы 1 согласуются с результатами работы [2], в которой рассматривалось уравнение вида

$$q_t + a(q^n)_x + (bq_x + cq_{yy})_x = 0, \quad n > 1,$$

причем нетопологический солитон строился в виде

$$q(t, x, y) = Ach^{-p} (B_1x + B_2y - vt), \quad p > 0.$$

II. Дальнейшим развитием теории солитонов является построение и анализ нетопологических солитонов для уравнений Захарова — Кузнцова с различными типами нелинейности. Рассмотрим уравнение Захарова — Кузнцова с законом нелинейности удвоенной степени

$$u_t + (a_1u^{2m} + a_2u^{4m})u_x + (a_3u^{2m} + a_4u^{4m})u_y + a_5u_{xx} + a_6u_{xy} = 0, \quad (5)$$

где  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$  — произвольные действительные числа. Решение уравнения (5) строится в виде бегущей волны

$$u(t, x, y) = f(\xi), \quad \xi = kx + ly - \omega t,$$

где  $f(\xi)$  неизвестная функция, удовлетворяющая волновому уравнению

$$f'' = Af - Bf^{2m+1} - Cf^{4m+1}, \quad (6)$$

$$A = \frac{\omega}{a_6kl^2 - a_5\omega k^2}, \quad B = \frac{a_1k + a_3l}{(2m+1)(a_6kl^2 - a_5\omega k^2)}, \quad C = \frac{a_2k + a_4l}{(4m+1)(a_6kl^2 - a_5\omega k^2)}$$

и краевым условиям (2). Решение краевой задачи (6), (2) приведено в [13] и имеет вид

$$f(\xi) = \left[ \frac{4Ae}{\left(e + \frac{B}{m+1}\right)^2 + \frac{4AC}{2m+1}} \right]^{\frac{1}{2m}}, \quad e \equiv \exp\{-2\sqrt{Am}(\xi - \xi_0)\}, \quad (7)$$

при условии что,  $A > 0$ ,  $C > 0$ . Здесь  $\xi_0$  — произвольная постоянная. На основании формулы (7) устанавливается

**Теорема 2.** Для того чтобы задача (6), (2) имела решение вида

$$f(\xi) = F^{\frac{1}{2m}}(\xi), \quad (8)$$

где  $F = GH^{-1}$ ,  $G = \alpha e$ ,  $H = (e + \beta)^2 + q$ ,  $e \equiv \exp\{\varepsilon(\xi - \xi_0)\}$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$\varepsilon^2 = 4m^2A, \quad B\alpha = 4\beta A(1+m), \quad C\alpha^2 = 4(1+2m)Aq. \quad (9)$$

Соотношения (9) являются законами распространения солитона, профиль которого описывается колоколообразной функцией (8).

Для уравнения (5) можно построить нетопологический солитон новой дробно-рациональной формы. Оказывается, что краевая задача (6), (2) допускает решение вида

$$f(\xi) = [\lambda_0 + \lambda_1 e^\xi + \lambda_2 e^{-\xi}]^{-\mu}, \quad \mu = \frac{1}{2m}, \quad (10)$$

где  $\lambda_0 > 0$ ,  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$  – неизвестные параметры волны. Подставляя (10) в (6), получим

$$A = \mu^2, \quad \lambda_0 = \frac{B}{\mu + 2\mu^2}, \quad \lambda_1 \lambda_2 = \frac{B\lambda_0 + C - A\lambda_0^2}{4(\mu + \mu^2)} > 0. \quad (11)$$

**Теорема 3.** Для того чтобы краевая задача (6), (2) имела решение вида (10) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (11).

Условия (11) связывают параметры солитона (10) с коэффициентами уравнения (5) и представляют интерес для приложений.

**III.** Рассмотрим уравнение Захарова – Кузнецова с законом нелинейности утроенной степени

$$\begin{aligned} &u_t + (a_1 u^{2m} + a_2 u^{4m} + a_3 u^{6m})u_x + \\ &+ (a_4 u^{2m} + a_5 u^{4m} + a_6 u^{6m})u_y + a_7 u_{txx} + a_8 u_{xyy} = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

$m > 0$ ,

и произвольными действительными коэффициентами. Решение уравнения (12) строится в виде бегущей волны  $u(t, x, y) = f(\xi)$ , где  $f(\xi)$  удовлетворяет волновому уравнению

$$f'' = Af - Bf^{2m+1} - Cf^{4m+1} - Df^{6m+1}, \quad (13)$$

$$A = \frac{\omega}{\Gamma}, \quad B = \frac{a_1 k + a_4 l}{(2m+1)\Gamma}, \quad C = \frac{a_2 k + a_5 l}{(4m+1)\Gamma}, \quad D = \frac{a_3 k + a_6 l}{(6m+1)\Gamma},$$

$$\Gamma \equiv a_8 k l^2 - a_7 \omega k^2,$$

и краевым условиям (2). Краевая задача (13), (2) допускает решение вида

$$f(\xi) = [\lambda_0 + \lambda_1 e^\xi + \lambda_2 e^{-\xi}]^{-\mu}, \quad \mu = \frac{1}{2m}, \quad (14)$$

где  $\lambda_0 > 0$ ,  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$  – неизвестные параметры волны. Подставляя (14) в (13), получим

$$\begin{aligned} A = \mu^2, \quad \lambda_0 = \frac{B}{2\mu^2 + \mu}, \quad \lambda_1 \lambda_2 = \frac{2B\lambda_0 - \mu\lambda_0^2 + C - 3A\lambda_0^2}{3A + 3\mu + \gamma} > 0, \\ \frac{2B\lambda_0 - \mu\lambda_0^2 + C - 3A\lambda_0^2}{3A + 3\mu + \gamma} = \frac{D + B\lambda_0^2 + C\lambda_0 - A\lambda_0^3}{6A\lambda_0 + 4\mu\lambda_0 - 2B + 2\gamma\lambda_0}, \quad \gamma = \mu(\mu + 1). \end{aligned} \quad (15)$$

**Теорема 4.** Для того чтобы краевая задача (13), (2) имела решение вида (14) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (15).

Таким образом, нетопологические солитоны существуют для широкого класса уравнений типа Захарова – Кузнецова с дисперсионными членами, содержащими производные третьего порядка.

### Топологические солитоны

IV. Известно [2], что топологические солитоны отличаются от других солитонов поведением на бесконечности и своей структурой, которая характеризуется одной или двумя величинами, известными как топологические заряды. Простейшим примером топологического солитона является кинк.

Известно [2], что для их описания используются выражения, содержащие  $th\xi$ , а также  $th^p(\xi)$ ,  $p > 0$ . Отметим, что в основе  $th$ -метода [14] лежат следующие соотношения:

$$(th\xi)' = 1 - th^2\xi, (th\xi)'' = -2th\xi + 2th^3\xi, (th\xi)''' = -2 + 8th^2\xi - 6th^4\xi \text{ и т.д.,}$$

которые позволяют выразить любую производную функции  $th\xi$  через степени  $th\xi$ .

Рассмотрим уравнение Захарова – Кузнецова со степенным законом нелинейности

$$u_t + a_1 u^{2m} u_x + a_2 u^{2m} u_y + a_3 u_{txx} + a_4 u_{xyy} = 0, \quad m > 0, \quad (16)$$

где  $a_1, a_2, a_3, a_4$  – действительные числа. Заметим, что в работе [2] для аналогичного уравнения (при  $a_2 = 0$ ) использовался следующий анзац:

$$u(t, x, y) = f(\xi) = \lambda th^\mu \xi, \quad (17)$$

где  $\lambda, \mu > 0$  – действительные числа. Подставляя (17) в (16), найдем

$$\begin{aligned} & (a_4 k^2 - a_3 \omega k^2) \left[ (\mu-1)(\mu-2)th^{-3}(\xi) + (3\mu-3\mu^2-2)th^{-1}(\xi) + (3\mu^2+3\mu+2)th(\xi) - \right. \\ & \left. - (\mu+1)(\mu+2)th^3(\xi) \right] - \omega [th^{-1}(\xi) - th(\xi)] + (a_1 k + a_2 l) \lambda^{2m} th^{2m\mu} [th^{-1}(\xi) - th(\xi)] = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Из анализа уравнения (18) следует, что  $\mu = \frac{1}{m}$ , и, кроме того,  $\mu = 1$  или  $\mu = 2$ . В противном случае следует занулить все коэффициенты, стоящие перед функциями  $th^{-3}(\xi)$ ,  $th^{-1}(\xi)$ ,  $th(\xi)$ ,  $th^3(\xi)$ , что не приводит к содержательным результатам (см. [2]).

Пусть  $\mu = \frac{1}{m} = 1$ . Тогда  $m = 1$ . В этом случае уравнение (16) примет

вид

$$u_t + a_1 u^2 u_x + a_2 u^2 u_y + a_3 u_{txx} + a_4 u_{xyy} = 0, \quad (19)$$

а уравнение (18)

$$\begin{aligned} & (a_4 k l^2 - a_3 \omega k^2) [-2th^{-1}(\xi) + 8th(\xi) - 6th^3(\xi)] - \\ & - \omega [th^{-1}(\xi) - th(\xi)] + (a_1 k + a_2 l) \lambda^2 (th(\xi) - th^3(\xi)) = 0. \end{aligned}$$

Приравнивая к нулю коэффициенты, стоящие при одинаковых степенях  $th(\xi)$ , получим

$$\begin{aligned} th^{-1}(\xi) : & -2(a_4 k l^2 - a_3 \omega k^2) - \omega = 0, \\ th(\xi) : & 8(a_4 k l^2 - a_3 \omega k^2) + \omega + (a_1 k + a_2 l) \lambda^2 = 0, \\ th^3(\xi) : & -6(a_4 k l^2 - a_3 \omega k^2) - (a_1 k + a_2 l) \lambda^2 = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Таким образом, справедлива

**Теорема 5.** Для того чтобы уравнение (19) имело решение вида (17) с  $\mu = 1$  необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (20).

Соотношения (20) являются законами распространения топологического солитона

$$u(t, x, y) = \lambda th(kx + ly - \omega t)$$

уравнения (19). Их анализ не вызывает принципиальных затруднений. Из (20) найдем

$$\omega = \frac{2a_4 k l^2}{2a_3 k^2 - 1} \lambda^2 = \frac{6(a_3 \omega k^2 - a_4 k l^2)}{a_1 k + a_2 l} > 0.$$

Следовательно, параметр  $\lambda$  определяется с точностью до знака.

Пусть  $\mu = \frac{1}{m} = 2$ . Тогда  $m = \frac{1}{2}$ . В этом случае уравнение (16) примет вид

$$u_t + a_1 u u_x + a_2 u u_y + a_3 u_{xx} + a_4 u_{xy} = 0, \quad (21)$$

а уравнение (18)

$$\begin{aligned} & (a_4 k l^2 - a_3 \omega k^2) [-8th^{-1}(\xi) + 20th(\xi) - 12th^3(\xi)] - \omega [th^{-1}(\xi) - th(\xi)] + \\ & + (a_1 k + a_2 l) \lambda [th(\xi) - th^3(\xi)] = 0. \end{aligned}$$

Приравнивая к нулю коэффициенты, стоящие при одинаковых степенях  $th(\xi)$ , получим

$$\begin{aligned} th^{-1}(\xi) : & -8(a_4 k l^2 - a_3 \omega k^2) - \omega = 0, \\ th(\xi) : & 20(a_4 k l^2 - a_3 \omega k^2) + \omega + (a_1 k + a_2 l) \lambda = 0, \\ th^3(\xi) : & -12(a_4 k l^2 - a_3 \omega k^2) - (a_1 k + a_2 l) \lambda = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Таким образом, справедлива

**Теорема 6.** Для того чтобы уравнение (21) имело решение вида (17) с  $\mu = 2$  необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (22).

Соотношения (22) являются законами распространения солитона

$$u(t, x, y) = \lambda t h^2 (kx + ly - \omega t)$$

уравнения (21). Из (22) найдем

$$\omega = \frac{8a_4 k l^2}{8a_3 k^2 - 1}, \quad \lambda = \frac{12(a_3 \omega k^2 - a_4 k l^2)}{a_1 k + a_2 l}.$$

Таким образом, уравнение (16) имеет решение вида (17) только в двух рассмотренных случаях.

V. В качестве дальнейшего развития теории топологических солитонов рассмотрим уравнение Захарова – Кузнецова с законом нелинейности удвоенной степени

$$u_t + (a_1 u^{2m} + a_2 u^{4m}) u_x + (a_3 u^{2m} + a_4 u^{4m}) u_y + a_5 u_{xx} + a_6 u_{yy} = 0, \quad m > 0. \quad (23)$$

Решение уравнения (23) строится в виде бегущей волны  $f(\xi)$ , которая удовлетворяет волновому уравнению (6). Используя результаты аналитического моделирования из [13], будем строить решение уравнения (6) в виде

$$f(\xi) = [\lambda_0 + \lambda_1 t h \xi]^{\frac{1}{2m}}, \quad (24)$$

где  $\lambda_0, \lambda_1$  – неизвестные параметры солитона. Подставляя (24) в (6), найдем

$$\lambda_1^2 C + \mu^2 + \mu = 0, \quad \lambda_1^2 B + 4\lambda_0 \lambda_1^2 C + 2\lambda_0 \mu = 0, \quad \mu = \frac{1}{2m}, \quad (25)$$

$$-A + 3\lambda_0 B + 6\lambda_0^2 C - 2\mu^2 = 0, \quad -2A + 3\lambda_0 B + 4\lambda_0^2 C - 2\mu = 0, \quad (26)$$

$$-A\lambda_0^2 + B\lambda_0^3 + C\lambda_0^4 + \mu(\mu - 1)\lambda_1^2 = 0. \quad (27)$$

Таким образом, справедлива

**Теорема 7.** Для того чтобы уравнение (6) имело решение вида (24) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (25)–(27).

Система (25)–(27) представляет собой нелинейную систему из пяти уравнений относительно шести параметров  $A, B, C, \lambda_0, \lambda_1, \mu$ .

Приведем набор параметров, которые удовлетворяют этой системе,

$$\mu = \frac{1}{2}, \quad A = 1, \quad B = \frac{4}{\sqrt{3}}, \quad C = -1, \quad \lambda_1^2 = \frac{3}{4}, \quad \lambda_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Если положить, что  $\lambda_0 = 1$ , то из (25)–(27) найдем

$$\lambda_1^2 = 1, \quad A = 4\mu^2, \quad B = 4\mu^2 + 2\mu, \quad C = -\mu - \mu^2.$$

Замечание. Вопрос о существовании топологических солитонов для уравнения (12) с законом нелинейности утроенной степени требует отдельного рассмотрения.

Таким образом, полученные результаты развивают теорию топологических и нетопологических солитонов для новых классов  $(2+1)$ -мерных уравнений Захарова – Кузнецова со степенными законами нелинейности.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Peng, Y.Z.** Exact traveling wave solutions for the Zakharov – Kuznetsov equation / Y.Z. Peng // Appl. Math. and Comput. – 2008. – Vol. 199. – P. 397–405.
2. **Biswas, A.** Topological and non-topological solitons for the generalized Zakharov – Kuznetsov modified equal width equation / A. Biswas // Int. J. Theor. Phys. – 2009. – Vol. 48. – P. 2698–2703.
3. **Esen, A.** Solitary wave solutions of the modified equal width wave equation / A. Esen, S. Kutluay // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. – 2008. – Vol. 13. – № 8. – P. 1538–1546.
4. **Faminskii, A.V.** Nonlocal well-posedness of the mixed problem for the Zakharov – Kuznetsov equation / A.V. Faminskii // J. Math. Sci. – 2007. – Vol. 147. – № 1. – P. 6524–6537.
5. **Mustafa, Inc.** New exact solutions for the ZK-MEW equation by using symbolic computation / Inc. Mustafa // Appl. Math. Comput. – 2007. – Vol. 189. – № 1. – P. 508–513.
6. **Mustafa, Inc.** Compacton and periodic wave solutions of the nonlinear dispersive Zakharov – Kuznetsov equation / Inc. Mustafa // Cent. Eur. J. Phys. – 2007. – Vol. 5. – № 3. – P. 351–366.
7. **Peng, Y.Z.** Travelling wave-like solutions of the Zakharov – Kuznetsov equation with variable coefficients / Y.Z. Peng, E.V. Krishnan, H. Feng // Pramana. – 2009. – Vol. 71. – № 1. – P. 49–55.
8. **Tascan, F.** Travelling wave solutions of nonlinear evolution equations by using the first integral methods / F. Tascan, A. Bekir, M. Koparan // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. – 2009. – Vol. 14. – № 5. – P. 1810–1815.
9. **Wazwaz, A.M.** Exact solutions for the ZK-MEW equation by using the tanh and sine-cosine methods / A.M. Wazwaz // Int. J. Comput. Math. – 2005. – Vol. 82. – № 6. – P. 699–708.
10. **Wazwaz, A.M.** The tanh and the sine-cosine methods for a reliable treatment of the modified equal width equation and its variants / A.M. Wazwaz // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. – 2006. – Vol. 11. – № 2. – P. 148–160.
11. **Жестков, С.В.** Конструктивные методы построения глобальных решений нелинейных уравнений в частных производных : моногр. / С.В. Жестков // Могилев : МГУ им. А.А. Кулешова, 2006.
12. **Жестков, С.В.** О построении солитоноподобных решений  $(2+1)$ -мерного уравнения Захарова – Кузнецова со степенными законами нелинейности / С.В. Жестков, В.С. Новашинская // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования : матер. науч. конф. “Герценовские чтения – 2011”. – LXIV. – СПб., 2011. – С. 54–56.
13. **Жестков, С.В.** Об аналитическом моделировании волновых и солитонных решений нелинейных уравнений, связанных с классическим уравнением КДФ / С.В. Жестков, В.С. Новашинская // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова, Сер. В. – 2010. – № 1(35). – С. 4–12.

14. *Khaled, K.Al.* Traveling wave solutions using the variational method and the tanh method for nonlinear coupled equations / K.Al. Khaled, M.Al. Refai, A. Alawneh // Appl. Math. and Comput. – 2008. – Vol. 02. – P. 233–242.

Поступила в редакцію 11.05.2011 г.