УДК 517+530.1

В.С. НОВАШИНСКАЯ

О СУЩЕСТВОВАНИИ НЕТОПОЛОГИЧЕСКИХ СОЛИТОНОВ ДЛЯ (2+1)-МЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЗАХАРОВА – КУЗНЕЦОВА С ДИСПЕРСИОННЫМИ ЧЛЕНАМИ ПЯТОГО ПОРЯДКА

Известно [1], что вопрос о существовании нетопологических солитонов для (2+1)-мерного уравнения Захарова – Кузнецова представляет значительный интерес для приложений. В работе на основе прямого метода из [2] строятся нетопологические солитоны (2+1)-мерного уравнения Захарова – Кузнецова с дисперсионными членами, содержащими производные пятого порядка. Отметим, что в [3] на основе теории возмущений исследовалось обобщенное уравнение КДФ с производными пятого порядка.

Понятие нетопологического солитона [1, 4, 5, 6] связывается с его поведением на бесконечности и формой его огибающей. Как правило, эта форма представляет собой колоколообразную функцию, которая моделируется выражением [1]

$$u(\xi) = Ach^{-p}\xi, \quad p > 0,$$

где ξ – фазовая переменная, A – амплитуда солитона. В настоящей работе эта формула выведена прямым интегрированием соответствующей краевой задачи.

Рассмотрим (2+1)-мерное уравнение Захарова – Кузнецова пятого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (a_1 u^{2m})\frac{\partial u}{\partial x} + (a_2 u^{2m})\frac{\partial u}{\partial y} + a_3 \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + a_4 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + a_5 \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} + a_6 \frac{\partial^5 u}{\partial y^5} = 0, \quad m > 0 \quad (1)$$

с произвольными действительными коэффициентами. Волновое решение будем строить в виде бегущей волны

$$u(t,x,y) = f(\xi), \quad \xi = kx + ly - \omega t, \quad (2)$$

где k, l, ω – произвольные действительные числа. Подставляя (2) в (1), найдем

$$-\omega f'(\xi) + a_1 k f^{2m}(\xi) f'(\xi) + a_2 l f^{2m}(\xi) f'(\xi) - a_3 \omega k^2 f^{(3)}(\xi) + a_4 k l^2 f^{(3)}(\xi) +$$
$$+ a_5 k^5 f^{(5)}(\xi) + a_6 l^5 f^{(5)}(\xi) = 0$$

или

$$[-\omega f(\xi) + \frac{a_1 k f^{2m+1}(\xi)}{2m+1} + \frac{a_2 l f^{2m+1}(\xi)}{2m+1} - a_3 \omega k^2 f^{(2)}(\xi) + a_4 k l^2 f^{(2)}(\xi) +$$
$$+ a_5 k^5 f^{(4)}(\xi) + a_6 l^5 f^{(4)}(\xi)]' = 0.$$

Электронный архив библиотеки МГУ имени А.А. Кулешова

Интегрируя последнее уравнение один раз по ξ и полагая постоянную интегрирования равной нулю, получим

$$-\omega f(\xi)+\frac{(a_1k+a_2l)}{2m+1}f^{2m+1}(\xi)+(a_4kl^2-a_3\omega k^2)f''(\xi)+(a_5k^5+a_6l^5)f''''(\xi)=0$$

или

$$f''''(\xi)+af''(\xi)=bf(\xi)+cf^{2m+1}, \qquad (3)$$

где

$$a=\frac{a_4kl^2-a_3\omega k^2}{a_5k^5+a_6l^5},\quad b=\frac{\omega}{a_5k^5+a_6l^5},\quad c=-\frac{(a_1k+a_2l)}{(2m+1)(a_5k^5+a_6l^5)}.$$

Уравнение (3) – нелинейное дифференциальное уравнение четвертого порядка. Добавим к нему краевые условия

$$f(\pm\infty)=0,\quad f'(\pm\infty)=0. \qquad (4)$$

Краевая задача (3), (4) определяет существование нетопологического солитона. Для ее решения заметим, что уравнение (3) представляет собой линейную комбинацию второй и четвертой производных, которая должна быть полиномом по f степени не выше $(2m + 1)$. Это условие выполняется, если взять вторую производную в виде

$$f''(\xi)=A_1f(\xi)-A_2f^{m+1}(\xi), \qquad (5)$$

где A_1, A_2 – производные действительные числа.

Действительно, из (5) последовательно найдем

$$f'''(\xi)=A_1f'(\xi)-(m+1)A_2f^{m}(\xi)f'(\xi),$$

$$f''''(\xi)=A_1f''(\xi)-m(m+1)A_2f^{m-1}(\xi)[f'(\xi)]^2-(m+1)A_2f^{m}(\xi)f''(\xi).$$

Очевидно, что первое и третье слагаемое в сумме представляют собой полином по f степени не выше $(2m + 1)$. Чтобы определить степень второго слагаемого, проинтегрируем один раз уравнение (5). Для этого обозначим $f'(\xi)=z(\xi)$. Тогда

$$f''(\xi)=\frac{dz}{d\xi}=\frac{dz}{df}\cdot\frac{df}{d\xi}=\frac{dz}{df}z.$$

Следовательно, уравнение (5) запишется в виде

$$\frac{dz}{df}z=A_1f-A_2f^{m+1}$$

или

$$zdz=(A_1f-A_2f^{m+1})df. \qquad (6)$$

Из (6) с учетом краевых условий (4) найдем

Электронный архив библиотеки МГУ имени А.А. Кулешова

$$\frac{z^2}{2} = A_1 \frac{f^2}{2} - \frac{A_2}{m+2} f^{m+2}$$

или

$$z^2 = [f'(\xi)]^2 = A_1 f^2 - \frac{2A_2}{m+2} f^{m+2}. \qquad (7)$$

Таким образом, слагаемое $m(m+1)A_2 f^{m-1}(\xi)[f'(\xi)]^2$ является полиномом степени не выше $(2m+1)$ и вместо уравнения (3) можно исследовать уравнение (5) с краевыми условиями (4).

Из (7) получим

$$\frac{df}{d\xi} = -\sqrt{A_1 f^2 - \frac{2A_2}{m+2} f^{m+2}}, \qquad (8)$$

где знак "минус" указывает на убывание решения на бесконечности. Из (8) найдем

$$I \equiv \int \frac{df}{\left[A_1 f^2 - \frac{2A_2}{m+2} f^{m+2}\right]^{\frac{1}{2}}} = -\xi + \xi_0,$$

где ξ_0 – произвольная постоянная. Вычислим интеграл I. Для этого обозначим $f^2 = S$. Тогда $2fds = ds$. Отсюда найдем

$$\frac{2df}{f} = \frac{ds}{s}.$$

Следовательно,

$$I \equiv \frac{1}{2} \int \frac{ds}{s\left[A_1 - \frac{2A_2}{m+2} s^{\frac{m}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Введем новую переменную $h = s^{\frac{m}{2}}$. Тогда

$$dh = \frac{m}{2} s^{\frac{m}{2}-1} ds$$

или

$$\frac{2dh}{mh} = \frac{ds}{s}.$$

В результате получим

Электронный архив библиотеки МГУ имени А.А. Кулешова

$$I \equiv \frac{1}{m}\int \frac{dh}{h\left[A_1 - \frac{2A_2}{m+2}h\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Сделаем замену переменной h по формуле

$$A_1 - \frac{2A_2}{m+2}h = \theta^2,$$

где θ – новая переменная. Тогда

$$h = \frac{(m+2)}{2A_2}(A_1 - \theta^2)$$

и

$$\frac{dh}{h} = -\frac{2\theta d\theta}{A_1 - \theta^2}.$$

Следовательно, получим

$$\frac{2}{m}\int \frac{d\theta}{A_1 - \theta^2} = \xi - \xi_0. \quad (9)$$

Из (9) найдем, если $A_1 > 0$, что

$$\frac{1}{m\sqrt{A_1}}\ln\left|\frac{\sqrt{A_1}+\theta}{\sqrt{A_1}-\theta}\right| = \xi - \xi_0. \quad (10)$$

Обозначим

$$\exp\left\{m\sqrt{A_1}(\xi - \xi_0)\right\} \equiv e.$$

Тогда из (10) получим

$$\theta = \sqrt{A_1}\left(\frac{e-1}{e+1}\right).$$

Следовательно,

$$h = \left[\frac{2(m+2)A_1}{A_2}\right]\frac{e}{(e+1)^2} \quad \Rightarrow \quad s = \left[\frac{(m+2)A_1}{2A_2}\frac{1}{ch^2\left(\frac{1}{2}\eta\right)}\right]^{\frac{2}{m}},$$

$$\eta = m\sqrt{A_1}(\xi - \xi_0) \quad \Rightarrow \quad f(\xi) = \left[\frac{(m+2)A_1}{2A_2}\right]^{\frac{1}{m}} ch^{-\frac{2}{m}}\left\{\frac{1}{2}m\sqrt{A_1}(\xi - \xi_0)\right\}, \quad (11)$$

$$A_1 > 0, \quad A_2 > 0.$$

Электронный архив библиотеки МГУ имени А.А. Кулешова

Таким образом, формула (11) моделирует нетопологический солитон краевой задачи (5), (4). Сформулируем окончательный результат.

Теорема 1. *Краевая задача (5), (4) имеет решение вида*

$$f(\xi)=\left[\frac{(m+2)A_1}{2A_2}\right]^{\frac{1}{m}}ch^{-\frac{2}{m}}\left\{\frac{1}{2}m\sqrt{A_1}(\xi-\xi_0)\right\},$$

если $A_1>0$, $A_2>0$.

Тем самым получена форма нетопологического солитона, приведенная в работе [1].

Чтобы определить неизвестные коэффициенты A_1, A_2 через величины a, b, c и найти законы распространения нетопологического солитона, подставим следующий анзац

$$f(\xi)=\Gamma ch^{-\frac{2}{m}}\{\alpha(\xi-\xi_0)\} \tag{12}$$

в уравнение (3), где $\Gamma>0$ – амплитуда солитона, α – произвольный параметр. Для этого найдем соответствующие производные:

$$\begin{gathered}
f'(\xi)=-\mu\Gamma\alpha ch^{-\mu-1}(\eta)sh(\eta),\\
f''(\xi)=\mu(\mu+1)\Gamma\alpha^2ch^{-\mu-2}(\eta)sh^2(\eta)-\mu\Gamma\alpha^2ch^{-\mu}(\eta),\\
f'''(\xi)=-\mu(\mu+1)(\mu+2)\Gamma\alpha^3ch^{-\mu-3}(\eta)sh^3(\eta)+\\
+\left[2\mu(\mu+1)\Gamma\alpha^3+\mu^2\Gamma\alpha^3\right]ch^{-\mu-1}(\eta)sh(\eta),\\
f''''(\xi)=\lambda\Gamma\alpha^4ch^{-\mu-4}(\eta)sh^4(\eta)-\lambda_1\Gamma\alpha^4ch^{-\mu-2}(\eta)sh^2(\eta)+\lambda_2\Gamma\alpha^4ch^{-\mu}(\eta),\\
\mu=\frac{2}{m},\quad \eta\equiv\alpha(\xi-\xi_0),\quad \lambda=\mu(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3),\\
\lambda_1=\mu(\mu+1)(6\mu+8),\quad \lambda_2=3\mu^2+2\mu.
\end{gathered} \tag{13}$$

Подставляя (13) в (3), найдем

$$\chi_1ch^4(\eta)+\chi_2ch^2(\eta)sh^2(\eta)+\chi_3sh^4(\eta)=c\Gamma^{2m}, \tag{14}$$

где

$$\chi_1\equiv\lambda_2\alpha^4-a\mu\alpha^2-b,\quad \chi_2\equiv a\mu(\mu+1)\alpha^2-\lambda_1\alpha^4,\quad \chi_3\equiv\lambda\alpha^4.$$

Из уравнения (14), используя линейную независимость функций $e^{4\eta}, e^{2\eta}, e^0, e^{-2\eta}, e^{-4\eta}$, получим

Электронный архив библиотеки МГУ имени А.А. Кулешова

$$
\begin{aligned}
e^{4\eta}: &\quad \chi_1+\chi_2+\chi_3=0,\\
e^{-4\eta}: &\quad \chi_1+\chi_2+\chi_3=0,\\
e^{2\eta}: &\quad \chi_1-\chi_3=0,\\
e^{-2\eta}: &\quad \chi_1-\chi_3=0,\\
e^{0}: &\quad 3\chi_1-\chi_2+3\chi_3=8c\Gamma^{2m}.
\end{aligned} \tag{15}
$$

Следовательно, справедлива

Теорема 2. *Для того чтобы краевая задача (3), (4) имела решение вида (12), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (15).*

Из соотношений (15) найдем

$$\chi_1=\chi_3,\quad \chi_2=-2\chi_3,\quad \chi_3=c\Gamma^{2m}. \tag{16}$$

Соотношения (16) можно переписать в виде

$$\lambda_2\alpha^4-a\mu\alpha^2-b=\lambda\alpha^4,\quad a\mu(\mu+1)-\lambda_1\alpha^2=-2\lambda\alpha^2,\quad \lambda\alpha^4=c\Gamma^{2m}. \tag{17}$$

Они связывают коэффициенты уравнения (3) a, b, c с параметрами α, Γ солитона (12). Из (17) следует, что $c>0$, и, кроме того,

$$
\begin{gathered}
\alpha^2=-\frac{a}{2(\mu^2+2\mu+2)},\quad \Gamma^m=-\frac{a\sqrt{\lambda}}{2(\mu^2+2\mu+2)\sqrt{c}},\\
b=\frac{c}{\lambda}(\lambda_2-\lambda_1)\Gamma^{2m}+\frac{a^2\mu}{2(\mu^2+2\mu+2)},\quad a<0.
\end{gathered} \tag{18}
$$

Соотношения (18) являются законами распространения нетопологического солитона (12). Если хотя бы одно из них не выполняется, то распространение солитона (12) невозможно.

Выразим неизвестные коэффициенты A_1, A_2 уравнения (5) через a, b, c. Имеем

$$\chi_3=c\Gamma^{2m}\quad\Rightarrow\quad \lambda\alpha^4=c\Gamma^{2m}. \tag{19}$$

Из формулы (11) находим

$$\alpha=\frac{1}{2}m\sqrt{A_1},\quad \Gamma^m=\frac{(m+2)A_1}{2A_2}. \tag{20}$$

Подставляя (20) в (19), получим

$$A_2=\frac{2(m+2)\sqrt{c}}{m^2\sqrt{\lambda}}.$$

Найдем коэффициент A_1. Из (18) имеем

Электронный архив библиотеки МГУ имени А.А. Кулешова

$$\alpha^2 = \frac{a\mu(\mu+1)}{\lambda_1 - 2\lambda} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4}m^2 A_1 = \frac{a\mu(\mu+1)}{\lambda_1 - 2\lambda} \quad \Rightarrow$$

$$A_1 = \frac{4a\mu(\mu+1)}{m^2(\lambda_1 - 2\lambda)} = -\frac{2a}{m^2(\mu^2 + 2\mu + 2)}.$$

Таким образом, в работе полностью решен вопрос о законах распространения нетопологических солитонов для уравнения Захарова – Кузнецова пятого порядка.

Полученные результаты могут быть использованы для исследования нетопологических солитонов систем связанных уравнений КДФ и Захарова – Кузнецова [7, 8].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Biswas, A.*** Topological and non-topological solitons for the generalized Zakharov – Kuznetsov modified equal width equation / A. Biswas // Int. J. Theor. Phys. – 2009. – Vol.48. – P. 2698–2703.
2. ***Жестков, С.В.*** Конструктивные методы построения глобальных решений нелинейных уравнений в частных производных : монография / С.В. Жестков. – Могилев : МГУ им. А.А. Кулешова, 2006.
3. ***Biswas, A.*** Soliton perturbation theory for the generalized fifth-order KdV equation / A. Biswas, E. Zerrad, S. Konar // Commun. Nonlinear Sci. and Numer. Simul. – 2008. – Vol. 13. – N 7. – P. 1281–1286.
4. ***Жестков, С.В.*** О построении солитоноподобных решений (2+1)-мерного уравнения Захарова – Кузнецова со степенными законами нелинейности / С.В. Жестков, В.С. Новашинская // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования : мат-лы науч. конф. “Герценовские чтения – 2011”. – LXIV. – СПб., 2011. – С. 54–56.
5. ***Жестков, С.В.*** Конструктивный анализ топологических и нетопологических солитонов (2+1)-мерных обобщенных уравнений Захарова – Кузнецова / С.В. Жестков, В.С. Новашинская // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. – Сер.В. – 2011. – № 2(38).
6. ***Жестков, С.В.*** Об аналитическом моделировании волновых и солитонных решений нелинейных уравнений, связанных с классическим уравнением КДФ / С.В. Жестков, В.С. Новашинская // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. – Сер.В. – 2010. – № 1(35). – С. 4–12.
7. ***Новашинская, В.С.*** О построении солитоноподобных решений систем второго порядка связанных нелинейных уравнений КДФ и уравнений мелкой воды / В.С. Новашинская // Научное творчество молодых : сб. статей Междунар. науч.-практич. конф. – Тула : АНО ВПО “ИЭУ”, 2011. – С. 296–303.
8. ***Новашинская, В.С.*** Об одном подходе к исследованию солитоноподобных решений системы связанных уравнений КДФ / В.С. Новашинская // Оптика неоднородных структур – 2011 : материалы III Междунар. науч.-практич. конф. – Могилев : УО “МГУ им. А.А. Кулешова”, 2011. – С. 248–251.

Поступила в редакцию 28.06.2011 г.

Электронный архив библиотеки МГУ имени А.А. Кулешова