

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ “НОРМАЛЬНОГО РАЗМЕРА” УКОРОЧЕННОЙ СИСТЕМЫ КУКЛЕСА С СИММЕТРИЕЙ

В настоящей работе предложены методы построения укороченной системы Куклеса с симметрией и различными распределениями предельных циклов “нормального размера” (т.е. циклами, которые могут быть построены численными методами). Рассматриваются системы Куклеса, которые имеют в конечной части плоскости специальные конфигурации особых точек. Построены конкретные примеры рассматриваемых систем Куклеса. Для доказательства точности полученных распределений используются функции Дюлака –Черкаса.

1. Введение

В работе [1] рассматривалась система Куклеса

$$\frac{dx}{dt} = x, \quad \frac{dy}{dt} = -x + a_8 y + a_1 x^2 + a_2 xy + a_3 y^2 + a_4 x^3 + a_5 x^2 y + a_6 xy^2 + a_7 y^3, \quad (1)$$

где $a = (a_1, \dots, a_8) \in \mathbb{R}^8$. Там же дан обзор основных результатов известных по системе (1). Сформулируем некоторые из них. Впервые проблема различения центра и фокуса для особой точки $O(0, 0)$ системы (1) была рассмотрена И.С. Куклесом в 1944 [2], где были получены практически все условия центра для системы (1). В работе [3] без вычисления фокусных величин были найдены достаточные условия центра, которые, как выяснилось позже, оказались и необходимыми [4]. Проблема центра и фокуса для случая $a_7 = 0$ была решена в работах [5, 6], причем в работе [6] доказано, что в этом случае существуют системы (1) с $a_7 = 0$, имеющие пять предельных циклов. Случай, когда $a_2 = 0$ рассматривался в работах [7, 8], где проблема центра фокуса решалась путем анализа фокусных величин и было также доказано существование системы (1) с шестью предельными циклами. Для общего случая $a_2 a_7 \neq 0$ проблема центра и фокуса решена в [9, 10]. Найденные там условия центра требуют вычисления пяти фокусных величин, однако, система (1) в этом случае может иметь негрубый фокус $O(0,0)$ седьмого порядка, и это – максимальный порядок негрубости. Таких систем всего семь, и все они выписаны в [10]. В [11] найдены необходимые и достаточные условия существования у систем (1) двух центров. В [1] предложены методы построения систем Куклеса с различными распределениями предельных циклов “нормального размера” [12] (т.е. предельными циклами, которые могут быть построены численными методами). При помощи этих методов построены системы Куклеса со следующими распределениями предельных циклов: $((0,7),0)$, $((0,6),0)$, $((1,5),0)$,

$((1,4),1)$, $((2,2),1)$, $((0,1),3)$. Здесь, например, распределение $((0,1),3)$ означает, что вокруг левого седла предельных циклов нет, вокруг правого – не менее одного предельного цикла, и не менее трех предельных циклов, окружающих группу особых точек. Для расширенной системы Куллеса (в которой первое уравнение системы (1) заменяется уравнением $\frac{dx}{dt} = y(1 + Dx + Px^2)$, $P, D \in \mathbb{R}$) с одним фокусом кратности восемь и другим негрубым фокусом удалось построить систему, имеющую восемь предельных циклов вокруг одного фокуса, при этом второй фокус остается негрубым.

В настоящей работе рассматриваются укороченные системы Куллеса

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x(1+x^2) + (V_0 + Wx^2)y + Ry^3, \quad (2)$$

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x(1-x^2) + (V_0 + Wx^2)y + Ry^3, \quad (3)$$

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x(1-x^2) + (V_0 + Wx^2)y + Ry^3, \quad (4)$$

где V_0, W, R – действительные числа. Системы (2-4) имеют векторные поля симметричные относительно начала координат. Целью данной работы является построение всевозможных распределений предельных циклов у рассматриваемых систем, а также доказательства точности полученных результатов при помощи построения функции Дюлака – Черкаса.

Сформулируем некоторые предварительные результаты, которые понадобятся в дальнейшем.

2. Предварительные результаты

2.1 Метод построения систем с максимальным числом предельных циклов нормального размера с помощью возмущения кратного фокуса [1]

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y, a), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y, a), \quad (5)$$

где P, Q – полиномы от переменных x, y, a – вектор их коэффициентов. Пусть при $a = a_0$ система (5) имеет негрубый фокус $O(0,0)$ кратности k . Тогда можно определить функцию последования $\Delta(x_0, a) = x(T, x_0, a) - x_0$, где $x(t), y(t)$ – решение системы (5), $x(0) = x_0, y(0) = 0, T$ – период обхода дуги соответствующей траектории вокруг особой точки $O(0,0)$. Выберем на промежутке $I = [p, q], p > 0$ точки x_1, \dots, x_{k+1} и рассмотрим функцию последования $\Delta(x, a_0 + \Delta a), x \in I, \Delta a$ некоторое возмущение системы (5). Разложим функцию последования в ряд Тейлора в окрестности точки a^0 ,

учитывая, что $\Delta(x_i, a^0) \neq 0$, т.к. траектории в окрестности a^0 являются спиралями. Тогда

$$\Delta(x_i, a^0 + \Delta a) = \Delta(x_i, a^0) + \sum_{j=1}^n tp(i, j) \Delta a_j + o(\Delta a),$$

где $tp(i, j) = \frac{\partial \Delta(x_i, a^0)}{\partial a_j}$ находятся численно. Как известно [14], вопрос о

числе предельных циклов у системы (5) эквивалентен вопросу о числе достаточно малых действительных корней функции последования. Поэтому потребуем, чтобы в точке x_1 функция последования была отрицательна (положительна), если фокус устойчивый (неустойчивый), в точке x_2 положительна (отрицательна) и т.д. При этом Δa должны быть достаточно малыми, чтобы $o(\Delta a)$ в разложении Тейлора не влияло на знак функции последования. Все перечисленные условия соответствуют задаче линейного программирования

$$L \rightarrow \min, \pm (-1)^i \left(\Delta(x_i, a^0) + \sum_{j=1}^n tp(i, j) \Delta a_j \right) \geq 0, i = \overline{1, k+1}, |\Delta a_j| \leq L. \quad (6)$$

В неравенствах (6) выбираем знак “плюс”, если фокус неустойчивый, и знак “минус” – в противном случае. Если задача (6) имеет решение $\Delta a = \Delta a^*$, $L = L^*$, то проверяем неравенства $(-1)^i \Delta(x_i, \Delta a^*) > 0$, $i = \overline{1, k+1}$, если они выполняются, то система (5) имеет, по крайней мере, k предельных циклов. Если же неравенства не выполняются и $\Delta a^* > 1$ и при последующих итерациях увеличивается, то это означает, что метод расходится. Если неравенства не выполняются и $\Delta a^* < 1$, то систему можно “улучшить”, взяв вместо точки a_0 точку $a_0 + \Delta a^*$ сделав, таким образом, процесс “улучшения” итерационным. Здесь важно следить за тем, чтобы, улучшая систему, мы не пришли к системе с центром. На каждом шаге итерации знак функции $\Delta(x, a^0 + \Delta a^*)$ должен проверяться на более мелкой сетке узлов.

Замечание 1. С помощью описанного метода можно также “передвинуть” или “раздвинуть” предельные циклы, полученные другими методами.

2.2 Построение функции Дюлака – Черкаса.

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \quad (7)$$

где $P(x, y), Q(x, y) \in C^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Определение. Функция $\Psi(x, y)$ называется функцией Дюлака – Черкаса для системы (7) в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, если существует такое $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, что справедливо неравенство

$$\Phi = k\Psi \operatorname{div}(f) + \frac{\partial \Psi}{\partial x} P + \frac{\partial \Psi}{\partial y} Q > 0 (< 0), \forall (x, y) \in \Omega.$$

где $f = (P, Q)$.

Замечание 2. Если функция $\Psi(x, y)$ является функцией Дюлака – Черкаса, то функция $B(x, y) = |\Psi(x, y)|^k$ является функцией Дюлака в классическом смысле в каждой из областей $\Psi > 0$, $\Psi < 0$.

В работе [15] Л.А. Черкасом получено обобщение критерия Дюлака для односвязной области.

Теорема 1. [15] Пусть в односвязной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ система (7) имеет единственную особую точку – антиседло A , $\operatorname{div} f(A) \neq 0$, $f = (P, Q)$. Пусть также функция $\Psi(x, y) \in C^1(\Omega)$ при некотором значении $k \in \mathbb{R}$, $k < 0$, удовлетворяет условию

$$\Phi = k\Psi \operatorname{div} f + \frac{\partial \Psi}{\partial x} P + \frac{\partial \Psi}{\partial y} Q > 0,$$

при этом уравнение $\Psi(x, y) = 0$ определяет гнездо из q вложенных друг в друга овалов. Тогда в каждой $q-1$ из двусвязных областей, ограниченных соседними овалами, система (1) имеет точно один предельный цикл, а в целом в области Ω она имеет не более q предельных циклов.

Для точной оценки числа предельных циклов конкретной системы Куклеса будем использовать следующую теорему, основанную на редукции к задаче линейного программирования.

Теорема 2 [16]. Полином $\Psi(x, y) = \sum_{i=1}^n \Psi_i(x) y^{i-1}$, $n \in \mathbb{N}$, является функцией Дюлака – Черкаса для системы (1) в полосе $\Omega_x = \{(x, y) : x \in [x_1, x_{N_0}], y \in \mathbb{R}\}$, если имеет место условие

$$\Phi(x, y) = \Phi_{n+1}(x) y^{n+1} + \Phi_n(x) y^n + \dots + \Phi_1(x) y + \Phi_0(x) > 0, \quad (8)$$

для выполнения которого существуют конструктивные методы редукции $\Phi(x, y)$:

а) неравенству $\Phi = \Phi_0(x) > 0$, где равенство нулю всех остальных коэффициентов достигается за счет решения системы из n линейных дифференциальных уравнений относительно n функций $\Psi_i(x)$;

б) полиному, у которого при всех нечетных степенях y^p все коэффициенты $\Phi_p(x) = 0$, при четных степенях y^p все $\Phi_p(x) \geq 0$, а $\Phi_0(x) > 0 \quad \forall x \in [x_1, x_{N_0}]$.

Для реализации метода б) применимы следующие алгоритмы:

1) Если $a_7 \neq 0$, то при нечетном (четном) $n+1$ функции $\Psi_1(x)$, $\Psi_2(x)$, $\Psi_4(x)$, ..., $\Psi_{n-2}(x)$ ($\Psi_1(x)$, $\Psi_3(x)$, $\Psi_5(x)$, ..., $\Psi_{n-2}(x)$) выбираются произвольным образом, а функции $\Psi_3(x)$, $\Psi_5(x)$, ..., $\Psi_{n-1}(x)$ ($\Psi_2(x)$, $\Psi_4(x)$, ..., $\Psi_{n-1}(x)$) последовательно алгебраически выражаются через них из условий $\Phi_{n-1} \equiv 0, \dots, \Phi_3 \equiv 0$ ($\Phi_n \equiv 0, \dots, \Phi_3 \equiv 0$);

2) При нечетном (четном) $n+1$ произвольными выбираем функции $\Psi_1(x)$, $\Psi_3(x)$, $\Psi_5(x)$, ..., $\Psi_{n-1}(x)$ ($\Psi_1(x)$, $\Psi_1(x)$, ..., $\Psi_{n-1}(x)$), а функции $\Psi_2(x)$, $\Psi_4(x)$, ..., $\Psi_5(x)$ ($\Psi_2(x)$, $\Psi_5(x)$, ..., $\Psi_n(x)$) находятся через них с помощью решения линейных дифференциальных уравнений $\Phi_{n-1} \equiv 0, \dots, \Phi_1 \equiv 0$;

3) Все функции $\Psi_i(x)$ из Ψ выбираются произвольным образом.

3. Укороченная система Куклеса с одной особой точкой в конечной части плоскости.

Рассмотрим систему (2)

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x(1+x^2) + (V_0 + Wx^2)y + Ry^3.$$

Она имеет единственную особую точку в конечной части плоскости $O(0,0)$, которая является седлом. Как показывает проведенный анализ фокусных величин, фокус может быть кратности 2. Построим систему Куклеса (2) с двумя предельными циклами нормального размера.

Для того чтобы система (2) имела двукратный фокус необходимо выполнение условий:

$$V_0 = 0, \quad W = -3R. \quad (8)$$

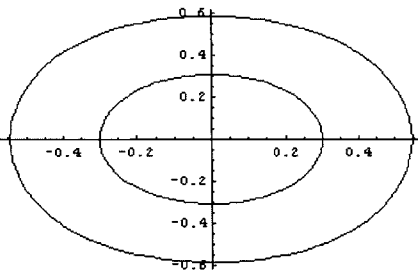


Рис. 1. Предельные циклы системы (2) с коэффициентами из примера 1

– 0.010827), имеющую два предельных цикла, которые проходят примерно через точки $(x_i^0, 0)$, $x_i^0 \in \{0.3, 0.5\}$ (рисунок 1).

Замечание 2. Описанным методом также можно возмущать и грубый фокус.

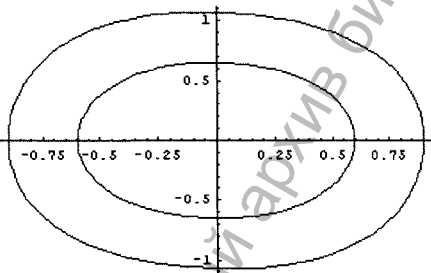


Рис. 2. Предельные циклы системы (2) с коэффициентами из примера 2

систему (2) с $(V_0, W, R) = (-0.0052831876, 0.2243829694, -0.04700867449)$, имеющую два предельных цикла, которые проходят примерно через точки $(x_i^0, 0)$, $x_i^0 \in \{0.5, 0.8\}$ (рисунок 2).

Теорема 3. Система (2) с коэффициентами $V_0 = -0.0052831876$, $W = 0.2243829694$, $R = -0.04700867449$ имеет точно два предельных цикла окружающие $O(0,0)$.

Пример 1. Рассмотрим систему (2) при $V_0 = 0$, $R = -0.07$, $W = 0.21$ и с ее помощью найдем систему Куклеса с двумя предельными циклами, т.е. $k = 2$. Их будем искать на промежутке $[0.3, 0.9]$. Для этого зафиксируем точки $x_i = 0.3 + 0.3(i-1)$, $i = 1, k+1$ и будем возмущать систему (8) методом, представленным в пункте 2.1. После применения метода получим систему (2) с $(V_0, W, R) = (-0.000111, 0.038824,$

Пример 2. Рассмотрим систему (2) при $V_0 = 1$, $R = -2/7$, $W = -12/7$, в этом случае она имеет грубый фокус в начале координат. Найдем с ее помощью систему Куклеса (2) с двумя предельными циклами ($k = 2$). Их будем искать на промежутке $[0.3, 0.9]$. Для этого зафиксируем точки $x_i = 0.3 + 0.3(i-1)$, $i = 1, k+1$ и будем возмущать систему (2) методом, представленным в пункте 2.1. После трех итераций получили

Доказательство: Функцию Дюлака – Черкаса будем искать в виде полинома $\Psi(x, y) = \sum_{i=1}^n \Psi_i(x) y^{n-1}$ степени $n-1 = 4$ в полосе $I = [-1.2, 1.2]$. По теореме 2 для этого необходимо проверить выполнения условия (8), причем $\Phi(x, y)$ будем искать в виде полинома у которого при всех нечетных степенях y^p все коэффициенты $\Phi_p(x) = 0$, а при четных степенях $y^p - \Phi_p(x) \geq 0$, а $\Phi_0(x) > 0 \quad \forall x \in [x_1, x_{N_0}]$. Зафиксируем $k = -4/3$, и выберем на промежутке I равномерную сетку с $N_0 = 422$ узлами. Так как $n = 5$, то произвольными будем выбирать функции $\Psi_2(x)$, $\Psi_4(x)$, а функции $\Psi_1(x)$, $\Psi_3(x)$, $\Psi_5(x)$ находятся через них с помощью решения линейных дифференциальных уравнений $\Phi_4 \equiv 0, \Phi_3 \equiv 0, \Phi_2 \equiv 0, \Phi_1 \equiv 0$.

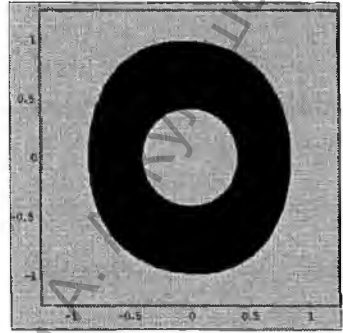


Рис. 3. Овалы кривой $\Psi(x, y)$ для системы (2)

В результате получим $\Psi(0, y) = 0.072164684 - 5.55612 \cdot 10^{-12}y - 1.02817y^2 - 6.29723 \cdot 10^{-10}y^3 + y^4$, которая в $\Omega_x = \{(x, y) : x \in [-1.2, 1.2], y \in \mathbb{R}\}$ определяет два вложенных друг в друга овала (рисунок 3), а следовательно, по теореме 1 система (2) с коэффициентами $V_0 = -0.0052831876, W = 0.2243829694, R = -0.04700867449$ имеет точно два предельных цикла.

4. Система Куклеса $2S+1A$ и симметричным векторным полем

Рассмотрим теперь систему (3)

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x(1-x^2) + (V_0 + Wx^2)y + Ry^3.$$

Она имеет три конечные особые точки, две из которых седла $A(-1,0)$ и $E(1,0)$ и одно антиседло $O(0,0)$. Как показывает проведенный анализ фокусных величин, фокус может быть кратности 2. Построим систему Куклеса (3) с двумя предельными циклами нормального размера.

Пример 2. Выберем коэффициенты в системе (3) таким образом, чтобы фокус $O(0,0)$ был двукратным. Для того чтобы первая фокусная величина равнялась нулю, необходимо, чтобы

$$R = -\frac{W}{3(1+V_0^2)}.$$

Зафиксируем $V_0 = 0.1, W = 1$ тогда $R = 100/303$, система (3) при таких значениях коэффициентов имеет двукратный фокус. С ее помощью найдем систему Куклеса (3) с $k = 2$ предельными циклами. Их будем искать на промежутке $[0.2, 0.8]$. Для этого зафикси-

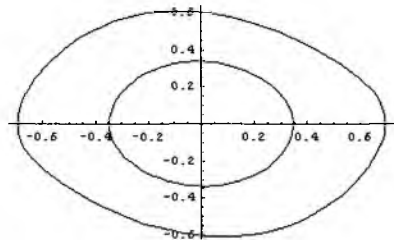


Рис. 4. Предельные циклы системы (3) с коэффициентами из примера 2

руем точки $x_i = 0.2 + 0.1(i - 1)$, $i = \overline{1, k+1}$ и будем возмущать систему (3) методом, представленным в пункте 2.1. После двух итераций получим систему (3) с $(V_0, W, R) = (0.00906191, 0.886197526, -0.422)$, имеющую два предельных цикла, которые проходят примерно через точки $(x_i^0, 0)$, $x_i^0 \in \{0.35, 0.7\}$ (рисунок 4).

Теорема 4. Система (3) с коэффициентами $V_0 = -0.00906191$, $W = 0.886197526$, $R = -0.442$ имеет точно два предельных цикла окружающие $O(0,0)$.

Доказательство: Функцию Дюлака – Черкаса будем искать по алгоритму описанному при доказательстве теоремы 3, при $k = -4/3$, $n = 5$ в полосе $I = [-1.2, 1.2]$.

В результате получим

$\Psi(0, y) = 0.0080281952 - 1.5149 \cdot 10^{-12}y + 0.354027y^2 - 1.15884 \cdot 10^{-11}y^3 + y^4$, которая в $\Omega_x = \{(x, y) : x \in [-1.2, 1.2], y \in \mathbb{R}\}$ определяет два вложенных друг в друга овала, а следовательно, по теореме 1 система (3) с коэффициентами $V_0 = -0.00906191$, $W = 0.886197526$, $R = -0.442$ имеет точно два предельных цикла.

Так как система (3) имеет седла $A(-1,0)$ и $E(1,0)$, а функция Дюлака – Черкаса построена в полосе $[-1.2, 1.2]$ и в этой полосе она является положительной, то можно утверждать, что полученная оценка является справедливой во всей плоскости Oxy .

5. Система Куклеса $2A+1S$ и симметричным векторным полем

Рассмотрим теперь систему (4)

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x(1 - x^2) + (V_0 + Wx^2)y + Ry^3.$$

Она имеет три особые точки: седло $O(0,0)$ и два антиседла $A(-1,0)$ и $E(1,0)$. Построим конкретные примеры систем (4) с различными распределениями предельных циклов с помощью описанных выше методов. Очевидно, что система (4) является обобщением кубической системы Льенара с квадратичной функцией трения [17]. При построении конкретных примеров систем (4) можно возмущать систему Льенара

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x(1 - x^2) + (V_0 + Wx^2)y. \quad (8)$$

Пример 3. Построим систему Куклеса (4) с максимальным числом предельных циклов, окружающие все особые точки. За первоначальную систему возьмем систему Льенара с симметрией (8) при $V_0 = -1.8$, $W = 1$, имеющей один предельный цикл, окружающий все конечные особые точки. Так как система (4) имеет только три параметра, которые можно изменять, не нарушая структуру системы, то по замечанию 2 k можно выбрать не больше чем 3. Зафиксируем $k = 3$, предельные циклы будем искать вокруг всех трех конечных особых точек на промежутке $[1.45, 2.125]$. Для этого зафиксируем точки $x_i = 1.45 + 0.27(i - 1)$, $i = \overline{1, k+1}$, и выбрав в неравенствах (6) знак “-”, будем возмущать систему (4) мето-

дом, представленным в пункте 2.1. После трех итераций получим систему (4) с $(V_0, W, R) = (0.004889, -0.006887975, -0.0007955364)$, имеющую три предельных цикла, которые проходят примерно через точки $(x_i^0, 0)$, $x_i^0 \in \{1.45, 1.72, 1.98\}$ (рисунок 6).

Аналогичным способом строятся системы (4) с распределениями $((2,2),1)$ и $((1,1),2)$ предельных циклов.

Пример 4. Система (4) при $V_0 = 0.04919$, $W = -0.048732$, $R = 0.023424$, полученная при помощи метода, представленного в 2.1, имеет распределение $((2,2),1)$ предельных циклов (рисунок 7). В качестве первоначальной системы здесь также взята система Льенара (8) при $V_0 = 1$, $W = -1.13$ с распределением $((1,1),1)$ предельных циклов, а метод применяется только для особой точки $E(1,0)$, а за счет симметричности векторного поля число предельных циклов вокруг особой точки $A(-1,0)$ будет таким же. Причем, в данном случае возмущения, проводимые над коэффициентами, не оказывают влияния на внешний (окружающий все конечные особые точки) предельный цикл.

Пример 5. Система (4) при $V_0 = -0.00394067$, $W = 0.0048241274$, $R = 0.0004215$ имеет распределение $((1,1),2)$ предельных циклов (рисунок 8). В качестве первоначальной системы здесь также взята система Льенара (8) при $V_0 = 1$, $W = -1.13$ с распределением $((1,1),1)$ предельных циклов, а метод применяется для группы особых точек $(A(-1,0), O(0,0), E(1,0))$, причем возмущения не влияют на предельные циклы, окружающие каждый из фокусов.

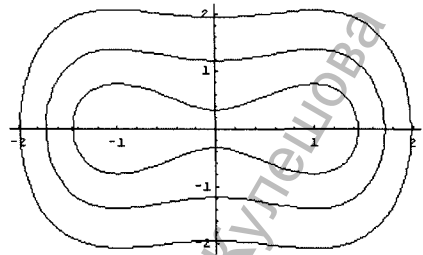


Рис. 6. Предельные циклы системы (4) с коэффициентами из примера 3

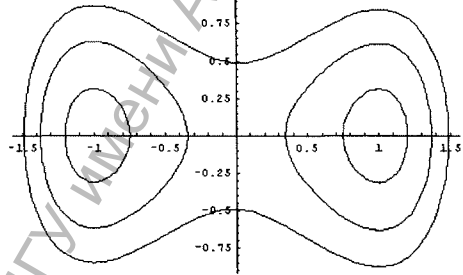


Рис. 7. Пять предельных циклов системы Куклеса в распределении $((2,2),1)$

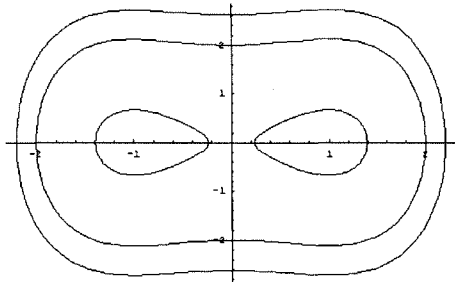


Рис. 8. Фазовый портрет системы Куклеса (4) с распределением $((1,1),2)$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Сидоренко, И.Н. Системы Куклеса с максимальным числом предельных циклов нормального размера / И.Н. Сидоренко, Л.А. Черкас // Весн. Грод. дзярж. ун-та імя Я. Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка. Вылічальная тэхніка і ўпраўленне. Біялогія. – 2008. – № 3. –

2. **Черкас, Л.А.** Условия центра для уравнения / Л.А. Черкас // Дифференц. уравнения. – 1978. – Т. 14. – № 9. – С. 1594–1600.
3. **Садовский, А.П.** Условия центра для кубической системы нелинейных колебаний / А.П. Садовский // Дифференц. уравнения. – 1978. – Т. 15. – № 10. – С. 1716–1719.
4. **Куклес, И.С.** О некоторых случаях отличия фокуса от центра / И.С. Куклес // Докл. Академии Наук СССР. – 1944. – Т. 42. – № 5. – С. 208–211.
5. **Jin, X.** On the conditions of Kukles for the existence of a Centre / X. Jin, D. Wang // Bull. London Math. Soc. – 1990. – Vol. 22. – No 1. – Pp. 1–4.
6. **Christopher, C.J.** On the paper of Jin and Wang concerning for a centre in certain cubic systems / C.J. Christopher, N.G. Lloyd // Bull. London Math. Soc. – 1990. – Vol. 22. – No 1. – Pp. 5–12.
7. **Lloyd, N.G.** Limit cycles and centres: an example / N.G. Lloyd, J.M. Pearson // Lecture Notes in Math. Bifurcations of Planar Vector Fields, New York. – 1990. – Vol. 1455. – Pp. 230–242.
8. **Садовский, А.П.** О предельных циклах кубической системы нелинейных колебаний / А.П. Садовский // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 29. – № 2. – С. 323–326.
9. **Садовский, А.П.** Решение проблемы центра и фокуса для кубической системы нелинейных колебаний / А.П. Садовский // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33. – № 2. – С. 236–244.
10. **Садовский, А.П.** Кубическая система нелинейных колебаний с семью предельными циклами / А.П. Садовский // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39. – № 4. – С. 472–481.
11. **Chen, L.** A class of cubic systems with two center or two foci / L. Chen, Z. Lu, D. Wang // J. of Math. Analysis and Applic. – 2000. – Vol. 242. – Pp. 154–163.
12. **Perko, L.M.** Limit cycles of quadratic systems in the plane / L.M. Perko // Rocky Mountain of Mathematics. – 1984. – Vol. 14. – Pp. 619–644.
13. **Сидоренко, И.Н.** Системы Куклеса с максимальным числом предельных циклов нормального размера / И.Н. Сидоренко // Дифференциальные уравнения и топология : материалы Междунар. науч. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина, Москва, 17-22 июня 2008 г. / Мат. Инст. им. В.А. Стеклова, МГУ им. М.В. Ломоносова ; редкол.: Д.В. Аносов [и др.]. – М., 2008. – С. 193–194.
14. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А.А. Андронов [и др.]. – М. : Наука, 1967. – 488 с.
15. **Черкас, Л.А.** Функция Дюлака полиномиальных автономных систем на плоскости / Л.А. Черкас // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33. – № 5. – С. 689–699.
16. **Гринь, А.А.** Функция Дюлака-Черкаса в виде полинома для обобщенной системы Куклеса / А.А. Гринь // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений, Минск, 14-19 сентябрь 2009 г. / ИМ НАНБ ; редкол.: А.А. Килбас [и др.]. – Минск, 2009. – С. 49–50.
17. **Сидоренко, И.Н.** Предельные циклы кубической системы Лъенара с квадратичной функцией трения / И.Н. Сидоренко, Л.А. Черкас // Дифференц. уравнения. – 2008. – Т. 44. – № 2. – С. 217–221.
18. **Камке, Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М. : Наука, 1961. – 704 с.
19. **Smale, S.** Mathematical problems for the next century / S. Smale // Math. Intelligencer. – 1998. – Vol. 20. – No. 2. – Pp. 7–15.