

УДК 517.925.42

## ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ КУБИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЛЬЕНАРА ТИПА 2A+1S

**И. Н. Сидоренко**

кандидат физико-математических наук

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

*В настоящей работе исследуется семейство кубических систем Льенара, имеющее в конечной части плоскости два антиседла (2A) и одно седло (1S). Известно, что количество малоамплитудных предельных циклов для рассматриваемого семейства равно 2. Целью данной работы является разбиение плоскости параметров системы на области, в каждой из которых система имеет заданное распределение предельных циклов. Рассмотрены и улучшены методы построения конкретных систем Льенара с наперед заданным количеством предельных циклов, окружающих группу особых точек. Выдвинута гипотеза об отсутствии предельных циклов, окружающих группу особых точек у систем рассматриваемого типа.*

**Ключевые слова:** предельный цикл “нормального размера”, система Льенара, метод прогноза.

### Введение

Рассматривается система Льенара вида

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = g(x) - \varepsilon f(x)y, \quad (1)$$

где  $f(x)$  и  $g(x)$  – полиномы третьей степени, а  $\varepsilon$  – малый параметр  $> 0$ . Будем рассматривать системы (1), которые в конечной части плоскости имеют три простые особые точки – два антиседла (2A) и одно седло (1S). Известно [1], что количество малоамплитудных предельных циклов для рассматриваемого семейства систем равно трем.

Целью данной работы является оценка максимального числа предельных циклов “нормального размера” [2] для систем (1) с учетом их различных распределений вокруг особых точек.

### Основная часть

Системы Льенара известны тем, что все особые точки располагаются на оси  $Ox$  и седла чередуются с антиседлами. С учетом сказанного семейство систем (1) можно привести к каноническому виду:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x(1-x)(1-Lx) - \varepsilon(a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3)y, \quad (2)$$

где  $L \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$ . Поместим в точку  $O(0; 0)$  седло, а в точку  $E(1, 0)$  – антиседло, тогда  $L < 0$ . В данной работе применяются модификация прогнозного метода оценки числа предельных “нормального размера” [2; 3; 4], а также конструктивных методов возмущения систем с центром при помощи функций последования и Мельникова. Построены примеры конкретных систем с максимальным числом предельных циклов, окружающих все конечные особые точки, а также наиболее интересные распределения предельных циклов. С помощью метода прогноза [2]

произведено разбиение плоскости параметров на области с заданным распределением предельных циклов.

### 1. Предварительный результат

Рассмотрим основные методы, используемые для исследования распределений предельных циклов систем (2).

#### 1.1. Метод прогноза Смейла для систем Льенара [5]

С. Смейл в своей работе [5] поддержал гипотезу о том, что система Льенара (3)

$$\frac{dx}{dt} = y - \varepsilon F(x), \quad \frac{dy}{dt} = -g(x), \quad (3)$$

в случае  $g(x) = x$ , а  $F(x)$  – полином степени  $2k+1$  и  $F(0) = 0$ , может иметь не более  $k$  предельных циклов вокруг антиседла  $O(0,0)$ .

**Гипотеза 1.** В пространстве параметров системы (3) с  $g(x) = x$  существует область  $\Omega$ , в которой число предельных циклов системы (3) не превосходит количества  $t$  нулей нечетной части функции  $F(x)$ , т.е. положительных нулей функции

$$\varphi(x) = F(x) - F(-x), \quad (4)$$

а также внутри  $\Omega$  существует подобласть, в которой это число равно  $t$ .

**Определение.** Пусть система Льенара (3) имеет антиседло  $A(x_0, 0)$ . Обозначим через  $\xi_1$  ( $\xi_2$ ) абсциссу ближайшей слева (справа) к точке  $A$  особой точки. Если слева (справа) особых точек нет, то считаем  $\xi_1 = -\infty$  ( $\xi_2 = +\infty$ ). Системой прогноза вокруг особой точки  $A(x_0, 0)$  для системы Льенара (1) будем называть систему

$$F(\eta) = F(\mu), \quad G(\eta) = G(\mu), \quad (5)$$

где  $F(\eta) = \int_{x_0}^{\eta} f(x) dx$ ,  $G(\mu) = \int_{x_0}^{\mu} g(x) dx$ ,  $\xi_1 < \eta < x_0$ ,  $x_0 < \mu < \xi_2$ .

Таким образом, для прогноза числа предельных циклов индивидуальной системы Льенара будем использовать следующий алгоритм.

#### Алгоритм (Прогноз числа предельных циклов)

Для прогноза числа предельных циклов системы Льенара (3) вокруг антиседла  $A(x_0, 0)$  необходимо:

- 1) составить систему прогноза (5) для системы Льенара (3) и особой точки  $A$ ;
- 2) определить промежутки изменения переменных  $\eta$ ,  $\mu$ ;
- 3) определить число  $k$  – количество решений системы прогноза (3) на полученном промежутке изменения переменных  $\eta$ ,  $\mu$ .

С учетом справедливости гипотезы 1 в области  $\Omega$  существует система, которая имеет  $k$  предельных циклов вокруг рассматриваемой особой точки.

Описанный алгоритм является конечным и алгебраическим.

Сформулированные определения и алгоритм остаются справедливыми и для оценки числа предельных циклов вокруг группы особых точек с суммарным индексом, равным  $+1$ . В данном случае в качестве  $x_0$  необходимо брать “центральную” точку (это может быть и седло),  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  – абсциссы ближайших левой и правой особых точек, не входящих в группу, вокруг которой производится оценка, а  $\xi_1 < \eta < \xi_1$ ,  $\xi_2 < \mu < \xi_2$ , где  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  находятся из условия  $G(\xi_1) = G(\xi_2) = \max\{G(x_i)\}$ ,  $\xi_1 < x_i < \xi_2$ ,  $x_i$  – абсциссы всех особых точек, вокруг которых производится оценка числа предельных циклов.

### 1.2. Возмущение систем с центром

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P_0(x, y) + \varepsilon P(x, y, a) = \bar{P}(x, y, \varepsilon, a) \\ \frac{dy}{dt} = Q_0(x, y) + \varepsilon Q(x, y, a) = \bar{Q}(x, y, \varepsilon, a) \end{cases}, \quad (6)$$

где  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ,  $a = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ ,  $P_0, Q_0, P, Q$  – многочлены,  $a$  – вектор их коэффициентов. При  $a = 0$  система (6) имеет центр  $O(0,0)$ , кривые которого трансверсально пересекают ось  $Ox$  на отрезке  $[p, q]$ ,  $p > 0$ . Тогда на  $[p, q]$  определена функция Мельникова [6]

$$\Phi(x, a) = \int_{\gamma(x)} M(x, y)(Pdy + Qdx) = \sum_{i=1}^m a_i \int_{\gamma(x)} M(x, y)(P_i dy + Q_i dx) = \sum_{i=1}^m a_i \varphi_i(x), \quad (7)$$

где  $M(x, y)$  – интегрирующий множитель невозмущенной системы,  $\gamma(x)$  – овал центра, проходящий через точку  $(x, 0)$ . Тогда простым нулям функции Мельникова  $\Phi(x, a)$  соответствуют овалы, порождающие предельные циклы возмущенной системы.

Пусть требуется найти  $n_0 - 1$  предельных циклов системы (3), пересекающих  $[p, q]$  оси  $Ox$  при условии, что задача имеет решение. Для этого выберем точки  $x_i \in (p, q), i = \overline{1, n_0}$  произвольным образом (возмущаем центр):

$$(-1)^i \sum_{j=1}^{m_0} a_j \varphi_j(x_i) > L, \quad i = \overline{1, n_0}, \quad L \rightarrow \max, \quad |a_j| \leq 1. \quad (8)$$

Если задача (8) имеет решение

$$a = a^*, \quad L = L^*,$$

то в системе (3) существует достаточно малое  $\varepsilon > 0$ , при котором она имеет  $n_0 - 1$  предельных циклов, пересекающих  $[x_i, x_{i+1}], i = \overline{1, n_0 - 1}$ .

Так как функция Мельникова при  $a = a^*, L = L^*$  имеет наибольшее отклонение от нуля в выбранных точках  $x_i$ , то предельные циклы будут существовать не при слишком малых значениях  $\varepsilon > 0$ , т. е. они будут “нормального размера”. Конечно, успех зависит еще от точности приближенно найденных функций  $\varphi_j(x)$ . Для нахождения  $\varphi(k)$  на промежутке  $[p, q]$  выбираем равномерную сетку узлов

$v_k, k = \overline{1, N_0 + 1}$ , приближенно интегрируя систему

$$\frac{dx}{dt} = P_0, \quad \frac{dy}{dt} = Q_0, \quad \frac{dM}{dt} = -\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right), \quad \frac{d\Psi_j}{dt} = M(P_j Q_0 + Q_j P_0)$$

на  $[0, T_k], \Psi_j(0) = 0, x(0) = v_k, y(0) = 0, T_k$  – период обхода овала  $\gamma(v_k)$  в системе (6), который находится численно. Тогда функции  $\varphi_j(x)$  можно приближенно найти в виде многочлена или сплайн-функции по значениям  $\varphi_j(v_k) = \Psi_j(T_k), j = \overline{1, m}$ .

Если задача (8) не имеет решения, меняем набор точек  $x_i$  и повторяем вычисления. При достаточно большом числе экспериментов получим решение задачи (8), если заранее известно, что оно существует. Очевидно, данный метод имеет много источников ошибок и поэтому может применяться только при небольших значениях  $n$ . Максимальное значение, при котором был осуществлен удачный эксперимент, показывает, что  $n < 10$ .

Отметим также, что число предельных циклов  $n_0 - 1$  может быть больше  $m - 1$ . Если же  $\varphi_j(x)$  образуют систему функций Чебышева, то  $n_0 \leq m$  и максимальное число нулей функции (7) равно  $m - 1$ , при этом их можно выбрать произвольно на отрезке  $[p, q]$ .

### 1.3. Метод возмущения кратного фокуса [2]

Допустим, что при  $a = a_0$  система (6) имеет негрубый фокус  $O(0,0)$  кратности  $k$ . Тогда можно определить функцию последования

$$\Delta(x_0, a) = x(T, x_0, a, \varepsilon) - x_0,$$

где  $x(t), y(t)$  – решение системы (4),  $x(0) = x_0, y(0) = 0, T$  – период обхода дуги соответствующей траектории вокруг особой точки  $O(0,0)$ . Выберем на промежутке  $[p, q]$  точки  $x_i, i = \overline{1, n_0}$  и рассмотрим разложение функции последования в ряд Тейлора в окрестности точки  $a_0$ , учитывая, что  $\Delta(x_i, a^0) \neq 0$ , т. к. траектории в окрестности  $a_0$  являются спиралями. Тогда

$$\Delta(x_i, a^0 + \Delta a) = \Delta(x_i, a^0) + \sum_{j=1}^n tp(i, j) \Delta a_j + o(\Delta a),$$

$$\text{где } tp(i, j) = \frac{\partial \Delta(x_i, a^0)}{\partial a_j}.$$

Для нахождения  $tp(i, j)$  в общем случае необходимо решить систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \mu P_0, \quad \frac{dy}{dt} = \mu Q_0,$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x}{\partial a_j} \right) = \mu_i \left( P_j + \frac{\partial P_0}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a_j} + \frac{\partial P_0}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a_j} \right), \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial y}{\partial a_j} \right) = \mu_i \left( Q_j + \frac{\partial Q_0}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a_j} + \frac{\partial Q_0}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a_j} \right),$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x}{\partial \mu} \right) = P_0 + \mu_i \left( \frac{\partial P_0}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial P_0}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \mu} \right), \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial y}{\partial \mu} \right) = Q_0 + \mu_i \left( \frac{\partial Q_0}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial Q_0}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \mu} \right),$$

$$x(0) = x_i, \quad y(0) = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial a_j}(0) = \frac{\partial y}{\partial a_j}(0) = \frac{\partial x}{\partial \mu}(0) = \frac{\partial y}{\partial \mu}(0) = 0,$$

где  $P_0 = P(x, y, a_0, \varepsilon), Q_0 = Q(x, y, a_0, \varepsilon)$ ,

$$P_j = \frac{\partial P(x, y, a^0)}{\partial a_j}, \quad Q_j = \frac{\partial Q(x, y, a^0)}{\partial a_j}, \quad \mu_i = \frac{T(x_i)}{2\pi},$$

$T(x_i)$  – период обхода дуги, соответствующей траектории вокруг особой точки.

Тогда

$$tp(i, j) = \frac{\partial x}{\partial a_j} - \frac{\partial x}{\partial \mu} \frac{\partial y}{\partial a_j} / \frac{\partial y}{\partial \mu} \Big|_{t=T(x_i)}.$$

Как известно [6], вопрос о числе предельных циклов у системы (5) эквивалентен вопросу о числе действительных нулей функции последования. Поэтому потребуем, чтобы в точке  $x_1$  функция последования была отрицательна (положительна), если фокус устойчивый (неустойчивый), в точке  $x_2$  положительна (отрицательна) и т. д. При этом  $\Delta a$  должны быть достаточно малыми, чтобы  $o(\Delta a)$  в разложении Тейлора не влияла на знак функции последования. Все перечисленные условия соответствуют задаче линейного программирования

$$L \rightarrow \min, \pm (-1)^i \left( \Delta(x_i, a^0) + \sum_{j=1}^n tp(i, j) \Delta a_j \right) \geq 0, i = \overline{1, k+1}, |\Delta a_j| \leq L. \quad (9)$$

В неравенствах (9) выбираем знак “плюс”, если фокус неустойчивый, и знак “минус” – в противном случае. Если задача (9) имеет решение  $\Delta a = \Delta a^*, L = L^*$ , то проверяем неравенства

$$(-1)^i \Delta(x_i, \Delta a^*) > 0, i = \overline{1, k+1}.$$

Если они выполняются, то система (6) имеет, по крайней мере,  $k$  предельных циклов. Если же неравенства не выполняются и  $\Delta a^*$  велико, то это означает, что система далека от искомой. Если неравенства не выполняются и  $\Delta a^*$  сравнительно небольшое, то систему можно “улучшить”, взяв вместо точки  $a_0$  точку  $a_0 + \Delta a^*$ , сделав, таким образом, процесс “улучшения” итерационным. Здесь важно следить за тем, чтобы, улучшая систему, мы не пришли к системе с центром. На каждом шаге итерации знак функции  $\Delta(x, a_0 + \Delta a^*)$  должен проверяться на более мелкой сетке узлов.

## 2. Прогнозные бифуркационные кривые

Для нахождения систем (2) с заданным распределением предельных циклов, а также для нахождения систем с максимальным распределением предельных циклов удобно использовать прогнозные бифуркационные кривые, которые находятся алгебраическими методами, что значительно упрощает вычисления.

Определим следующие прогнозные кривые:

**2.1. Прогнозная кривая двукратных предельных циклов  $2LCp$ .** Двукратным предельным циклам системы (2) соответствуют двукратные положительные нули функции  $\varphi(u)$ . Как известно [7], отыскание положительных нулей функции  $\varphi(u)$  сводится к решению системы алгебраических уравнений (5). После упрощения и сокращения на  $(x - y) \neq 0$  получим систему

$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} - \frac{1+L}{3}(x^2 + xy + y^2) + \frac{L}{4}(x+y)(x^2 + y^2) = 0, \\ a_1 + \frac{a_2}{2}(x+y) + \frac{a_3}{3}(x^2 + xy + y^2) + \frac{a_4}{4}(x^2 + y^2)(x+y) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

По основной теореме о симметрических многочленах уравнения системы (10) алгебраически выражаются через известные симметрические многочлены. В рассматриваемом случае через

$$x + y = u, \quad xy = v.$$

Итак, получили систему из двух уравнений с семью неизвестными. Зафиксируем три параметра, например,  $L, a_3$  и  $a_4$ , и, исключив из этой системы переменные  $u$  и  $v$ , получим уравнение по  $a_1$  и  $a_2$ , которое и задает кривую двукратных предельных ци-

клов в плоскости параметров  $(a_1, a_2)$ . Так, например, для  $L = -\frac{1}{2}$ ,  $a_3 = 1, a_4 = -1$  кривая  $2LCp$  задается уравнением

$$432a_1^3 + 27a_1^2(84 + (4 - 3a_2)a_2) - (a_2 + 2)^2(4 + a_2(9a_2 - 52)) + 18a_1(8 + a_2(116 + a_2(3a_2 - 34))) = 0.$$

У найденной кривой двукратных предельных циклов имеются “ложные” участки, которые не влияют на распределение предельных циклов.

**2.2. Прогнозные кривые негрубых фокусов  $WF_1$  и  $WF_2$ .** Как видно из названия, эти кривые определяют условия негрубости фокусов:  $WF_1$  – фокуса  $E(1, 0)$ ,  $WF_2$  – фокуса  $D(1/L, 0)$ . Для того чтобы фокус  $E(1, 0)$  был негрубым, необходимо, чтобы дивергенция векторного поля в точке  $E$  была равной нулю, что определяется следующим уравнением  $\text{div}(\Omega)|_{(1,0)} = f(1) = 0$ , где  $\Omega$  – векторное поле системы (2). Последнее уравнение в плоскости параметров  $(a_1, a_2)$  является уравнением прямой  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$  (при фиксированном значении параметров  $a_3$  и  $a_4$ ). Аналогичным образом определяется кривая, точнее, прямая  $WF_2$ :  $a_1 - 2a_2 + 4a_3 - 8a_4 = 0$ .

**2.3. Прогнозные кривые сепаратрисных циклов  $SC1p$ ,  $SC2p$  и  $SC3p$ .** Прогнозная кривая  $SC1p$  определяет условие петли вокруг правого антиседла,  $SC2p$  – условие петли вокруг левого антиседла, а  $SC3p$  определяет условие петли, имеющей форму “неполной” восьмерки. Все эти кривые, а точнее, прямые, определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} F(x) = F(y), \\ G(0) = G(x) = G(y) \end{cases}$$

при фиксированных значениях параметров  $L, a_3$  и  $a_4$ . Так, например, для  $L = -\frac{1}{2}$ ,  $a_3 = 1, a_4 = -1$  имеем следующие уравнения для прогнозных кривых сепаратрисных циклов:

$$SC1p: a_1 = \frac{1}{27}(-17 - 8\sqrt{10} + 9(1 + \sqrt{10})a_2),$$

$$SC2p: a_1 = \frac{1}{27}(-17 + 8\sqrt{10} + 9(1 - \sqrt{10})a_2)$$

$$SC3p: a_1 = \frac{1}{27}(-25 + 18a_2).$$

Рассмотрим систему (2) при значении  $L = -1/2$ . Сформулируем теорему

**Теорема.** Для системы Льенара (2)

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x(1 - (1 + L)x + Lx^2) - \varepsilon \sum_{j=1}^4 a_j x^{j-1} y$$

с  $L = -1/2$ ,  $a_3 = 1, a_4 = -1$ , имеющей антиседла  $A(-2, 0)$ ,  $E(1, 0)$  и седло  $O(0, 0)$ , выполняются следующие утверждения:

1. Все решения соответствующей системы прогноза (5) для системы Льенара (2) типа  $((k_2, k_3), k_1)$  удовлетворяют неравенству  $k_1 + k_2 + k_3 > 4$ .

2. Система прогноза (5) для рассматриваемой системы Льенара (2) может иметь решения только следующих типов:  $((1, 0), 0)$ ,  $((0, 1), 0)$ ,  $((0, 0), 1)$ ,  $((1, 0), 1)$ ,  $((0, 1), 1)$ ,  $((1, 1), 1)$ ,  $((0, 2), 0)$ ,  $((2, 0), 0)$ ,  $((0, 0), 2)$ .

3. В каждой области пространства коэффициентов, в которой система прогноза имеет решение типа  $((k_2, k_3), k_1)$ , существует подмножество, в котором система Льенара (2) при  $\varepsilon = 0.01$  имеет такое же распределение  $((k_2, k_3), k_1)$  предельных циклов.

4. Если  $k_2 = 0$  ( $k_3 = 0$ ), то система Льенара (2) не имеет предельных циклов, окружающих особую точку  $A(-2, 0)$  ( $E(1, 0)$ ).

#### Доказательство

1. Систему прогноза (5) для системы Льенара (2) всегда можно сократить на  $\eta - \mu \neq 0$ . После сокращения получим, что первое уравнение системы является полиномом второй степени, а второе уравнение – полином третьей степени. Следовательно, система (5) не может иметь более шести решений, а в силу симметрии существенными являются только три. Этим и обуславливается невозможность существования решения типа  $((k_2, k_3), k_1)$  с  $k_1 + k_2 + k_3 > 4$ .

2. Построим для рассматриваемой системы Льенара (2) все прогнозные бифуркационные кривые описанным выше способом. Тогда вся плоскость параметров  $(a_1, a_2)$  разбивается на подобласти (рис. 1), каждая из которых соответствует определенному типу решений системы прогноза (10). Отсюда и следует второе утверждение теоремы.

3. Доказательство третьего утверждения теоремы основывается на выборе точки из каждой подобласти плоскости  $(a_1, a_2)$ , соответствующей данному типу решений системы прогноза (5), построению соответствующей системы (2) и проверке существования предельных циклов численными методами (см. примеры 1 – 4).

4. Четвертое утверждение общеизвестно [8].

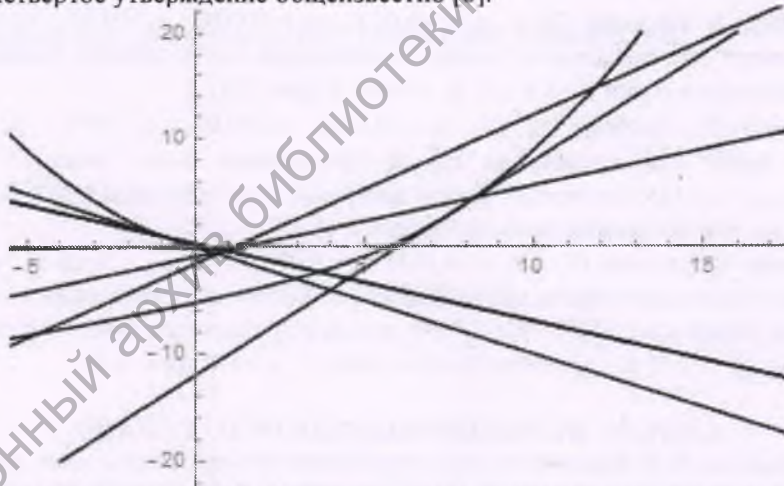


Рисунок 1. – Прогнозные бифуркационные кривые для системы Льенара (2)

При различных значениях параметра  $L \in [-1, 0)$  все области сохраняются и сохраняется их взаимное расположение, что позволяет выдвинуть гипотезу о том, что данная теорема справедлива для всех  $L < 0$ .

**Пример 1.** Системы (2) с  $a_1 = 0.685$ ,  $a_2 = 2.31$ ,  $a_3 = 1$ ,  $a_4 = -0.01$ ,  $L = -1/2$  имеют два предельных цикла вокруг одного седла, проходящих через точки  $x_1 = -0.164213$ ,  $x_2 = -0.719018$  (рис. 2 а).

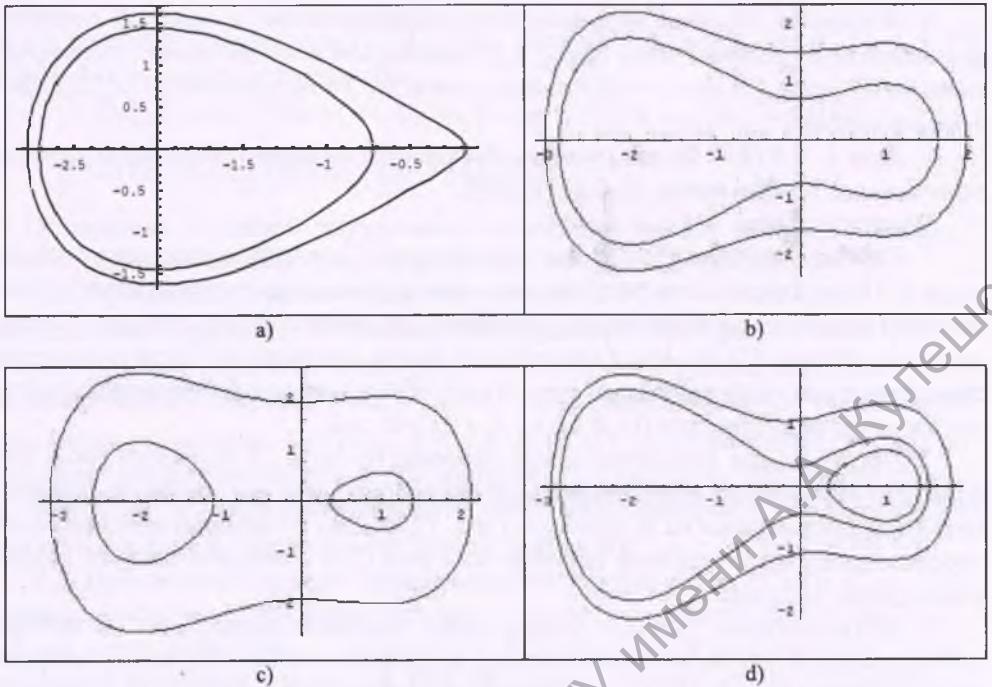


Рисунок 2. – Предельные циклы “нормального размера” систем Льенара (2)

**Пример 2.** Система (2) с  $a_1 = -0.022$ ,  $a_2 = 0.004$ ,  $a_3 = 0.01$ ,  $a_4 = -0.01$ ,  $L = -1/2$  имеет два предельных цикла, окружающих все состояния равновесия и проходящих через точки  $x_1 = 1.9613$ ,  $x_2 = 1.62612$  (рис. 2 б).

**Пример 3.** Система (2) с  $a_1 = -0.018$ ,  $a_2 = 0.01$ ,  $a_3 = 0.01$ ,  $a_4 = -0.01$ ,  $L = -1/2$  имеет три предельных цикла, проходящих через точки  $x_1 = -1.09$ ,  $x_2 = 1.389$ ,  $x_3 = 2.1145$  (по одному вокруг фокусов), и один предельный цикл, окружающий все три состояния равновесия (рис 2 с).

**Пример 4.** Система (2) с  $a_1 = -0.164$ ,  $a_2 = 0.084$ ,  $a_3 = 0.1$ ,  $a_4 = -0.01$ ,  $L = -1/2$  имеет два предельных цикла, окружающих все состояния равновесия и проходящих через точки  $x_1 = 1.50434$ ,  $x_2 = 1.7665$ , и один предельный цикл, окружающий особую точку  $E(1, 0)$  и проходящий через точку  $x_3 = 1.398$  (рис. 2 д).

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Сидоренко, И. Н.** Предельные циклы “нормального размера”, окружающие группу особых точек систем Льенара с симметрией / И. Н. Сидоренко // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. А. Куляшова. Сер. В. Прыродазнаўчыя навукі: матэматыка, фізіка, біялогія. – 2019. – № 2(54). – С. 21–29.

2. **Perko, L. M.** Limit cycles of quadratic systems in the plane / L. M. Perko // Rocky Mountain of Mathematics. – 1984. – Vol. 14. – Pp. 619–644.

3. **Сидоренко, И. Н.** Предельные циклы “нормального размера” систем Льенара с пятью особыми точками / И. Н. Сидоренко // Международная математическая конференция “Седьмые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям”, посвященные 100-летию со дня рождения профессора Ю. С. Богданова : материалы Междунар. науч. конф. Минск, 1–4 июня 2021 г. – Минск : Институт математики НАН Беларуси, 2021. – С. 214–215.



4. *Сидоренко, И. Н.* Системы Куклеса с максимальным числом предельных циклов нормального размера / И. Н. Сидоренко, Л. А. Черкас // Веснік ГрДУ. Серыя 2. – 2008. – № 3. – С. 20–26.

5. *Smale, S.* Mathematical problems for the next century / S. Smale // Math. Intelligencer. – 1998. – Vol. 20, №. 2. – Pp. 7–15.

6. *Черкас, Л. А.* Конструктивные методы исследования предельных циклов автономных систем второго порядка (численно-алгебраический подход / Л. А. Черкас, А. А. Гринь, В. И. Булгаков ; Учреждение образования “Гродненский гос. ун-т им. Я. Купалы”. – Гродно : ГрГУ, 2013. – 489 с.

7. *Сидоренко, И. Н.* Предельные циклы “нормального размера” систем Лъенара, квадратичных и кубических систем : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.02 – дифференциальные уравнения / И. Н. Сидоренко ; Гродненский государственный университет имени Янки Купалы. – Гродно, 2010 – 26 с.

Поступила в редакцию 20.12.2021 г.

Контакты: sidorenko\_in@msu.by (Сидоренко Иван Николаевич)

#### **Sidorenko I. N. LIMIT CYCLES OF THE CUBIC LIÉNARD SYSTEM TYPE $2A+1S$ .**

*In this paper, a family of cubic Liénard systems, which has two anti-saddles points (2A) and one saddle point (1S) in the final part of the plane are investigated. It is known that the number of small-amplitude limit cycles for the family under consideration is 2. The goal of the research is to partition the plane of the parameters of the system into regions, in each of which the system has a given distribution of limit cycles. The methods for constructing specific Liénard systems with a predetermined number of limit cycles surrounding a group of singular points are considered and improved. A hypothesis about the absence of limit cycles surrounding the group of singular points for systems of the type under consideration is put forward.*

**Keywords:** limit cycle of “normal size”, Liénard system, forecast method.