УДК 511.42

ДИОФАНТОВЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ С ПРИВОДИМЫМИ МНОГОЧЛЕНАМИ

Е. В. Гусева
аспирант
Институт математики Национальной академии наук Беларуси

Первой теоремой в теории диофантовых приближений явилась теорема Дирихле 1842 года. До недавнего времени основное внимание уделялось приближениям неприводимых многочленов, поскольку хорошо известен инструментарий для их изучения. В ряде задач требовалось осуществить переход от произведений неприводимых многочленов (т.е., исходных приводимых многочленов) к оценке значений одного или нескольких из них. Однако такой переход можно было осуществить не во всех задачах диофантовых приближений. В данной работе предложен новый метод получения результатов о приближениях нуля значениями приводимых многочленов. Причем результат зависит от количества неприводимых многочленов в разложении. Таким образом, получено усиление леммы Берника и Додсона, изложенной в их монографии "Metric Diophantine approximation on manifolds" (Кембридж, 1999 г.)

Статья относится к метрической теории диофантовых приближений. Основным результатом является аналог теоремы Спринджука для случая приводимых многочленов. Доказательство основано на рассмотрении некоторого делителя исходного приводимого полинома в различных случаях, описывающих соотношение между малостью данного неприводимого многочлена, его степенью и высотой.

Ключевые слова: диофантовы приближения, приводимые полиномы, теорема Спринджука, теорема Дирихле.

В этой статье исследуется классическая задача теории диофантовых приближений о разрешимости неравенств

$$|P(x)| < \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 > 0, \tag{1}$$

в целочисленных полиномах $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$,

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \tag{2}$$

В (2) натуральное число n называется степенью полинома $n = \deg P$, а $H = H(P) = \max_{0 \le j \le n} |a_j|$ – высотой $P(x)$. Корни полинома $P(x)$, действительные или комплексные, будем обозначать $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Если $(a_n, \ldots, a_1, a_0) = 1$ и $P(x)$ – неприводимый полином, то будем называть его минимальным полиномом для $\alpha = \alpha_i$, $1 \le i \le n$. Уже при $n = 1$ задача о разрешимости (1) имеет давнюю и глубокую историю. Для $\varepsilon_1 = Q^{-1}$, $Q \in \mathbb{N}$ и $Q > 1$. Перепишем (1) в виде

$$|qx - p| < Q^{-1}, \quad (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, \tag{3}$$

или

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < q^{-1} Q^{-1}, \quad 1 \le q \le Q. \tag{4}$$

Еще в 1842 году Дирихле [1] доказал, что неравенства (3) и (4) разрешимы для любых $x \in \mathbb{R}$ и Q при подходящих $1 \le q \le Q$ и $p \in \mathbb{Z}$. Решения неравенства (3) точные, и если $\left|x-\frac{p}{q}\right|<2^{-1}q^{-1}Q^{-1}$, то $\frac{p}{q}$ совпадает с подходящей дробью разложения числа x в цепную дробь [2]. Неравенство $\left|x-\frac{p}{q}\right|<3^{-1}q^{-1}Q^{-1}$ при $\beta=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ вообще неразрешимо при $Q>Q_0$.

Теорема 1 Гурвица [2; 3]. *Неравенство*

$$\left|x-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{\sqrt{5}qQ}$$

имеет для всех x *бесконечное число решений в рациональных числах* $\frac{p}{q}$. *Если же* $x=\beta$ *и* $Q>Q_0(\varepsilon)$, *то для всех* $\frac{p}{q}$ *верно неравенство*

$$\left|\beta-\frac{p}{q}\right|>\frac{1}{(\sqrt{5}+\varepsilon)qQ}.$$

Одним из самых плодотворных подходов для изучения неравенств (3) и (4) стал метрический подход. Обозначим через μB меру Лебега измеримого множества $B\subset\mathbb{R}$, $c_1=c_1(n),c_2,\ldots$ – величины, зависящие от n и ε, но не зависящие от H и Q. Определим символ Виноградова $\ll$ следующим образом. Выражение $A\ll B$ равносильно выражению $A<cB$, где c – величина, зависящая от n. Пусть $\#A$ – количество элементов счетного множества A. Пусть $\Psi(x)$, $x>0$, – монотонно убывающая функция.

Теорема 2 Хинчина [4]. *Обозначим через* $B_1\subset\mathbb{R}$ *множество действительных чисел из некоторого интервала* $I=[a,b]$, *для которых неравенство*

$$|qx-p|<\Psi(q)$$

имеет бесконечное число решений в целых числах p,q. *Тогда*

$$\mu B_1=\begin{cases}0, & \sum_{q=1}^{\infty}\Psi(q)<\infty,\\ \mu I=b-a, & \sum_{q=1}^{\infty}\Psi(q)=\infty.\end{cases}$$

Теорема Хинчина была обобщена Малером [5] с многочленов первой степени на многочлены произвольной степени. Обозначим через $\mathcal{L}_n(\Psi)$ множество $x\in I$, для которых неравенство

$$|P(x)|<H^{-n+1}\Psi(H) \tag{5}$$

имеет бесконечное число решений в полиномах $P(x)\in\mathbb{Z}[x]$. Малер предположил, что при $\Psi(H)=H^{-1-\varepsilon_2}$ справедливо равенство $\mu\mathcal{L}_n(\Psi)=0$.

До 1964 года в ряде работ [6; 7; 8; 9] были получены продвижения в решении гипотезы Малера, пока Спринджук [10; 11] не доказал ее в полях действительных, комплексных и p-адических чисел.

В работах [12; 13] было получено обобщение результатов Хинчина-Малера-Спринджука.

Теорема 3. *Справедливы равенства*

$$\mu\mathcal{L}_n(\Psi)=\begin{cases}0, & \sum\limits_{H=1}^{\infty}\Psi(H)<\infty,\\ \mu I, & \sum\limits_{H=1}^{\infty}\Psi(H)=\infty.\end{cases} \qquad (6)$$

Сходимость в неравенствах (6) была доказана Берником [13], а расходимость – Бересневичем [12]. В монографии [14] показано, как в неравенствах (6) переходить от приводимых многочленов $P(x)$ к неприводимым.

В данной работе рассматриваются неравенства (1), (5) в полиномах $P(x)$ из класса

$$\mathcal{P}_n(Q)=\{P(x)\in\mathbb{Z}[x]:\ \deg P\le n,\ H(P)\le Q\}.$$

В этом случае методами [14] нельзя перейти от приводимых многочленов к неприводимым. В данной работе предлагается новый метод, позволяющий осуществить такой переход и доказать следующую теорему.

Теорема 4. *Неравенство* $|P(x)|<Q^{-(n-1)-\varepsilon}$ *в приводимых многочленах* $P(x)=t_1(x)\cdot t_2(x)$ *выполняется только для* $x\in B_2$, *где* $\mu B_2<Q^{-\varepsilon_3}$, $0<\varepsilon_3<\varepsilon$.

Вначале приведем несколько лемм.

Лемма 1 [11]. *Пусть* α_1 *– ближайший к* x *корень полинома* $P(x)$. *Тогда*

$$|x-\alpha_1|<\begin{cases}n|P(x)||P'(x)|^{-1},\\ 2^n|P(x)||P'(\alpha_1)|^{-1}.\end{cases}$$

Лемма 2 [11]. *Если* $P(x)=t_1(x)\ldots t_k(x)$, *то*

$$c_1\prod_{i=1}^{k}H(t_i)<H(P)<c_2\prod_{i=1}^{k}H(t_i).$$

Лемма 3. *Если* I *и* J *– два интервала, а для всех* $x\in I\subset J$ *верно* $|P(x)|<Q^{-\tau}$ *и* $\mu I\ge\frac{1}{2}\mu J$, *то для всех* $x\in J$ *справедливо неравенство*

$$|P(x)|<c_3Q^{-\tau}.$$

Данное неравенство легко доказывается с помощью интерполяционной формулы Лагранжа. Лемма, аналогичная лемме 3, доказана в [15].

Лемма 4. *Пусть* $\mathcal{R}_n(Q)$ *– множество приводимых полиномов* $P(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^n$ *степени* n *и высоты* Q. *Тогда имеет место оценка*

$$\#\mathcal{R}_n(Q)\ll Q^n.$$

Доказательство. Докажем эту оценку для приводимых полиномов, которые являются произведением двух полиномов, то есть имеют вид $P(x)=t_1(x)\cdot t_2(x)$. Из леммы 2 заключаем, что при $\deg(t_1(x))=n_1$, $H(t_1(x))=Q^{\lambda}$, $\deg(t_2(x))=n_2=n-n_1$, $H(t_2(x))<c_4Q^{1-\lambda}$. Тогда количество полиномов $t_1(x)$ и $t_2(x)$ можно оценить следующим образом:

$$\#t_1(x)\ll Q^{\lambda(n_1+1)},\qquad \#t_2(x)\ll Q^{(1-\lambda)(n-n_1+1)}.$$

Значит, количество приводимых полиномов вида $P(x)=t_1(x)\cdot t_2(x)$ оценивается как

$$\#\mathcal{R}_n(Q)\ll Q^{\lambda(n_1+1)}\cdot Q^{(1-\lambda)(n-n_1+1)}=Q^{\lambda(n_1+1)+(1-\lambda)(n-n_1+1)}.$$

Определим функцию $f(\lambda, n_1) = \lambda(n_1 + 1) + (1 - \lambda)(n - n_1 + 1)$ и найдем ее максимум в прямоугольнике:

$$D = \begin{cases} 0 \le \lambda \le 1 \\ 1 \le n_1 \le n - 1. \end{cases}$$

Для этого находим первые и вторые частные производные.

$f'_{\lambda} = 2n_1 - n$. $f'_{\lambda} = 0$ при $n_1 = \dfrac{n}{2}$.

$f'_{n_1} = 2\lambda - 1$. $f'_{n_1} = 0$ при $\lambda = \dfrac{1}{2}$.

$f''_{\lambda n_1} = f''_{n_1 \lambda} = 2$.

Точка $M_0\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{n}{2}\right)$ – точка, подозрительная на экстремум.

$$f''_{\lambda\lambda} = 0; \qquad f''_{n_1 n_1} = 0; \qquad f''_{\lambda n_1} = 2; \qquad f''_{\lambda\lambda} \cdot f''_{n_1 n_1} - (f''_{\lambda n_1})^2 = -4 < 0.$$

Следовательно, в точке M_0 функция $f(\lambda, n_1)$ не достигает ни минимума, ни максимума, и максимум функции достигается в некоторой точке на границе прямоугольника D.

Простые вычисления приводят к выводу о величине $\max f(\lambda, n_1)$:

$$f(0;1) = n, \qquad f(0; n-1) = 2, \qquad f(1;1) = 2, \qquad f(1; n-1) = n.$$

Значит, $\max f(\lambda, n_1) = n$, и лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Если* $P(x)$ *разлагается на произведение трёх неприводимых полиномов, то* $\#\mathcal{R}_n(Q) \ll Q^{n-1}$.

Доказательство. Рассмотрим приводимые полиномы, являющиеся произведением трех полиномов, то есть имеющие вид $P(x) = t_1(x) \cdot t_2(x) \cdot t_3(x)$. По лемме 2, снова имеем:

$$\deg(t_1(x)) = n_1, \qquad \deg(t_2(x)) = n_2, \qquad \deg(t_3(x)) = n_3 = n - n_1 - n_2,$$

$$H(t_1(x)) = Q^{\lambda_1}, \qquad H(t_2(x)) < c_5 Q^{\lambda_2}, \qquad H(t_3(x)) \lhd c_6 Q^{1-\lambda_1-\lambda_2}.$$

Тогда количество полиномов $t_1(x), t_2(x), t_3(x)$ можно оценить как

$$\#t_1(x) \ll Q^{\lambda_1(n_1+1)}; \qquad \#t_2(x) \ll Q^{\lambda_2(n_2+1)}; \qquad \#t_3(x) \ll Q^{(1-\lambda_1-\lambda_2)(n-n_1-n_2+1)}.$$

Для количества приводимых полиномов вида $P(x) = t_1(x) \cdot t_2(x) \cdot t_3(x)$ справедлива оценка:

$$\#\mathcal{R}_n(Q) \ll Q^{\lambda_1(n_1+1)} \cdot Q^{\lambda_2(n_2+1)} \cdot Q^{(1-\lambda_1-\lambda_2)(n-n_1-n_2+1)} = Q^{\lambda_1(n_1+1)+\lambda_2(n_2+1)+(1-\lambda_1-\lambda_2)(n-n_1-n_2+1)}.$$

Введем функцию $f(\lambda_1, n_1, \lambda_2, n_2) = \lambda_1(n_1 + 1) + \lambda_2(n_2 + 1) + (1 - \lambda_1 - \lambda_2)(n - n_1 - n_2 + 1)$ и найдем ее максимум.

Для этого находим частные производные:

$$f'_{\lambda_1} = -n + 2n_1 + n_2, \qquad f'_{n_1} = 2\lambda_1 - 1 + \lambda_2,$$

$$f'_{\lambda_2} = -n + n_1 + 2n_2, \qquad f'_{n_2} = \lambda_1 + 2\lambda_2 - 1.$$

Приравняем их к нулю. Решая полученную систему уравнений, находим точку, подозрительную на экстремум: $M_0\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{n}{3}; \dfrac{1}{3}; \dfrac{n}{3}\right)$.

Найдем частные производные второго порядка и составим из них гессиан:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 9 > 0.$$

Достаточным условием существования экстремума в точке является знакоопределенность гессиана, а именно:

- если гессиан положительно определен, то M_0 – точка локального минимума функции $f(\lambda_1, n_1, \lambda_2, n_2)$,
- если гессиан отрицательно определен, то M_0 – точка локального максимума функции $f(\lambda_1, n_1, \lambda_2, n_2)$,
- если гессиан не является знакоопределенным (принимает как положительные, так и отрицательные значения) и невырожден, то M_0 – седловая точка функции $f(\lambda_1, n_1, \lambda_2, n_2)$.

Поскольку гессиан положительно определен, M_0 является точкой локального минимума. Таким образом, максимум функции достигается в одной из вершин области D:

$$D = \{0 \le \lambda_1 \le 1; 0 \le \lambda_2 \le 1 - \lambda_1; 1 \le n_1 \le n-2; 1 \le n_2 \le n - n_1 - 1\}.$$

Найдем значения функции в 16 таких вершинах. Ниже приведены значения четырех функций f.

$f(0;1;1-\lambda_1;n-n_1-1) = n-1$; $\quad f(0;n-2;1-\lambda_1;n-n_1-1) = 2$;

$f(1;1;1-\lambda_1;n-n_1-1) = 2$; $\quad f(1;n-2;1-\lambda_1;n-n_1-1) = n-1$.

Рассмотрев все 16 вершин, находим $\max f(\lambda_1, n_1, \lambda_2, n_2) = n-1$, что доказывает лемму 5.

Далее будем считать, что μB тех $x \in I$, для которых неравенство

$$|P(x)| < Q^{-n-\varepsilon_4}$$

верно хотя бы для одного неприводимого полинома $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$, не превосходит $c_7 Q^{-\varepsilon_5}$, $0 < \varepsilon_5 \le \varepsilon$. Данное утверждение доказано в [16].

Сделаем индуктивное предположение. Если в доказательстве возникнет неравенство

$$|t_j(x)| < H(t_j)^{-s}, \quad s > \deg t_j + \varepsilon_6, \tag{7}$$

то все x, удовлетворяющие (7), могут быть покрыты системой интервалов с суммарной мерой, меньшей $Q^{-\varepsilon_7}$, $0 < \varepsilon_7 < \varepsilon_6$.

Итак, на некотором интервале $\sigma(R)$ и $R(x) = t_1(x) \cdot t_2(x)$ выполняется неравенство

$$|R(x)| < c_8 Q^{-(n-1)-\varepsilon_8}. \tag{8}$$

$\sigma(R)$ – множество решений (8). Пусть $\deg t_1 = n_1$, $H(t_1) = Q^{\lambda}$. Тогда $\deg t_2 = n - n_1$ и по лемме 2 справедливо $H(t_2) < c_9 Q^{1-\lambda}$. Определим $a \in \mathbb{R}$ таким образом, что неравенство

$$|t_1(x)| < Q^{-a} \tag{9}$$

выполняется на некотором интервале $I_1 \subset \sigma(R)$, $\mu I_1 > \frac{1}{2}\sigma(R)$, но уже неравенство

$$|t_1(x)| < Q^{-a-\varepsilon_9} \tag{10}$$

верно лишь на интервале $I_2 \subset \sigma(R)$, $\mu I_2 \le \frac{1}{2}\mu\sigma(R)$. Из (9) и леммы 2 следует, что при некотором c_{10} для всех $x \in \sigma(R)$ верно неравенство

$$|t_1(x)| < c_{10}Q^{-a} \ll Q_1^{-\frac{a}{\lambda}}, \quad Q_1 = Q^{\lambda}. \tag{11}$$

Из (8) и (10) следует неравенство

$$|t_1(x)| > Q^{-a-\varepsilon_9}, \quad x \in \sigma(R) \setminus I_2, \quad \mu\sigma(R \setminus I_2) \ge \frac{1}{2}\mu\sigma(R),$$

и поэтому для $x \in \sigma(P) \setminus I_2$ мы имеем

$$|t_2(x)| \ll Q^{-(n-1)-\varepsilon+a+\varepsilon_{10}}, \quad \varepsilon_{10} < \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда по лемме 2 для всех $x \in \sigma(P)$ верно неравенство

$$|t_2(x)| < Q^{-(n-1)-\frac{\varepsilon}{2}\varepsilon_9} = Q^{-\frac{\left((n-1)+\frac{\varepsilon}{2}\right)}{1-\lambda}}, \quad Q_2 = Q^{1-\lambda}. \tag{12}$$

Если теперь $\frac{a}{\lambda} > n_1 + \varepsilon_{10}$, то по индуктивному предположению все x из интервалов $\sigma(R)$ могут быть покрыты интервалами с суммарной мерой $Q^{-\varepsilon_{11}}$, что доказывает искомое утверждение. Аналогично при

$$\frac{n-1-a\varepsilon_{10}}{1-\lambda} \ge n - n_1 + \varepsilon_{11}$$

все x из интервалов $\sigma(P)$ могут быть покрыты интервалами с суммарной мерой $\ll Q^{-\varepsilon_{12}}$. Следовательно, осталось доказать теорему для a, λ, n_1, удовлетворяющих неравенствам

$$\begin{cases} \dfrac{a}{\lambda} < n_1 + \varepsilon_{10}, \\ \dfrac{n-1-a-\varepsilon}{1-\lambda} < n - n_1 + \varepsilon_{11}. \end{cases} \tag{13}$$

Покажем, что система (13) несовместна. В самом деле из первого неравенства в (13) имеем

$$a < \lambda n_1 + \varepsilon_{13}, \quad \varepsilon_{13} = \lambda\varepsilon. \tag{14}$$

Если выполняется второе неравенство в (13)

$$n-1-a < (1-\lambda)(n-n_1) + \varepsilon_{11}(1-\lambda),$$

то с учетом (14) получаем неравенство

$$n-1-\lambda n_1 < (1-\lambda)(n-n_1) \tag{15}$$

в области $D: \{0 \le \lambda \le 1,\ 1 \le n_1 \le n-1\}$.

Неравенство (15) противоречиво, что доказывает теорему.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Dirichlet, L. G. P.*** Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbrüchen nebst einigen Anwendungen auf die Theorie der Zahlen / L. G. P. Dirichlet // Werke I. – 1842. – P. 633–638.

2. ***Касселс, Дж. В. С.*** Введение в теорию диофантовых приближений / Дж. В. С. Касселс. – Москва : Изд-во Иностр. литер., 1961. – 213 с.

3. ***Шмидт, В.*** Диофантовы приближения / В. Шмидт. – М. : Мир. 1983. – 228 с.

4. ***Khintchine, A.*** Einige Sätze über Kettenbrüche, mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen / A. Khintchine // Mathematische Annalen. – 1924. – Vol. 92. – P. 115–125.

5. ***Mahler, K.*** Über das Maß der Menge aller S-Zahlen / K. Mahler // Math. Ann. – 1932. – Vol. 106. – P. 131–139.

6. ***Кубилюс, И. П.*** О применении метода акад. Виноградова к решению одной задачи метрической теории чисел / И. П. Кубилюс // ДАН СССР. – 1949. – Т. 67. – С. 783–786.

7. ***LeVeque, W. J.*** Note on S-numbers / W. J. LeVeque // Proc. Amer. Math. Soc. – 1953. – Vol. 4. – P. 189–190.

8. ***Schmidt, W.*** Bounds for certain sums; a remark on a conjecture of Mahler / W. Schmidt // Trans. Amer. Math. Soc. – 1961. – Vol. 101, no. 2. – P. 200–210.

9. ***Volkmann, B.*** Zur metrischen Theorie der S-Zahlen, II / B. Volkmann // J. reine und angew. Math. – 1963. – Vol. 213, no. 1–2. – P. 58–65.

10. ***Спринджук, В. Г.*** Доказательство гипотезы Малера о мере множества S-чисел / Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1965. – Т. 29, № 2. – С. 379–436.

11. ***Спринджук, В. Г.*** Проблема Малера в метрической теории чисел / В. Г. Спринджук. – Минск : Наука и техника., 1967. – 181 с.

12. ***Beresnevich, V.*** On approximation of real numbers by real algebraic numbers / V. Beresnevich // Acta Arith. – 1999. – Vol. 50, no. 2. – P. 97–112.

13. ***Bernik, V. I.*** The exact order of approximating zero by values of integral polynomials / V. I. Bernik // Acta Arith. – 1989. – Vol. 53, no. 1. – P. 17–28.

14. ***Bernik, V. I.*** Metric Diophantine approximation on manifolds / V. I. Bernik, M. M. Dodson // Cambridge Tracts in Mathematics. – 1999. – no. 137, 172 p.

15. ***Берник, В. И.*** Метрическая теорема о совместном приближении нуля значениями целочисленных многочленов / В. И. Берник // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1980. – Т. 44, № 1. – С. 24–45.

16. ***Bernik, V. I.*** Distribution of real algebraic numbers of arbitrary degree in short intervals / V. I. Bernik, F. Götze // Izvestiya: Mathematics. – 2015. – Vol. 79, no. 1. – P. 18–39.

Поступила в редакцию 15.07.2020 г.
Контакты: elena.guseva.96@yandex.by (Гусева Елена Васильевна)

Guseva E.V. DIOPHANTINE APPROXIMATION WITH REDUCIBLE POLYNOMIALS

The first theorem in the theory of Diophantine approximation was Dirichlet's approximation theorem of 1842. Until recently, the focus of the research has been on approximation of irreducible polynomials due to a large array of the available tools and methods. In a number of problems, a transition from products of irreducible polynomials (i.e. the original reducible polynomials) to bounds for one or more of them was necessary. However, such a transition could not be realized in every problem in Diophantine approximation. This paper introduces a new approach to studying approximation of zero by values of reducible polynomials. Moreover, the result depends on the number of irreducible polynomials in the decomposition. Thus, the authors have obtained an improvement of the lemma by Bernik and Dodson (see their monograph "Metric Diophantine Approximation on Manifolds", Cambridge, 1999).

The article relates to the metric theory of Diophantine approximation. The main result is an analogue of Sprindzuk's theorem for the case of reducible polynomials. The proof is based on considering a divisor of the original reducible polynomial in a number of different cases defined by the relationship between an upper bound on its value, its degree and height.

Keywords: Diophantine approximation, reducible polynomials, Sprindzuk's theorem, Dirichlet's theorem.