СОВРЕМЕННЫЯ ТРЕБОВАНІЯ ОТЪ АРИѲМЕТИЧЕСКИХЪ ЗАДАЧНИКОВЪ.

Многочисленныя современныя рецензіи на ариѳметическіе задачники выдвигаютъ на очередь различные вопросы, достойные обсужденія; нерѣдко бываетъ, что рецензентъ не обращаетъ вниманія на существенныя стороны вопроса, обходя молчаніемъ такія положенія, на которыхъ очень и очень стоило бы остановиться. Къ числу главнѣйшихъ вопросовъ того и другого рода, по моему мнѣнію, относятся тѣ, которые помѣщены ниже. Такъ какъ задачи на каждое отдѣльное дѣйствіе во многихъ задачникахъ въ нѣкоторыхъ отношеніяхъ проведены, по меньшей мѣрѣ, удовлетворительно, то главнымъ образомъ рѣчь пойдетъ объ условныхъ задачахъ на всѣ четыре дѣйствія и различные способы высчитыванія.

I. Для лицъ, не выбирающихъ спеціальностью математику, слѣд., для большинства учащихся, какіе способы рѣшенія[1]) важнѣе, чисто ариѳметическіе или способы, основанные на составленіи и рѣшеніи уравненій?

---

[1]) Есть существенная разница между методомъ рѣшенія и пріемомъ, которымъ осуществляется этотъ методъ въ рѣшеніи. Дѣло можетъ быть выяснено слѣдующимъ примѣромъ.

Пусть заразныя болѣзни происходятъ отъ размноженія микробовъ. Изъ этого положенія вытекаетъ общій методъ лѣченія заразныхъ болѣзней — уничтоженіе микробовъ. Но это послѣднее можетъ быть достигнуто совершенно различными пріемами, напримѣръ: 1) введеніе въ организмъ химическихъ элементовъ, непосредственно убивающихъ тотъ или другой микробъ, 2) разведеніе въ организмѣ безвредныхъ микробовъ — враговъ микроба, дающаго болѣзненное состояніе, 3) разведеніе въ организмѣ начала, порождающаго новыхъ микробовъ, и друзей, и враговъ даннаго микроба, при чемъ враги разводятся въ большемъ количествѣ и т. д.

Ниже для краткости я иногда соединяю термины «методъ» и «пріемъ» подъ названіемъ способа.

Если мы даже предположимъ, что означенныя лица пройдутъ среднюю и высшую школу, то и тогда (за отсутствіемъ статистики руковожусь личнымъ опытомъ и наблюденіями знакомыхъ), мы должны признать, что техника уравненій по выходѣ изъ школы забывается гораздо скорѣе, чѣмъ ариѳметическіе методы[1]), хранящіеся въ памяти нерѣдко всю жизнь въ формѣ здраваго смысла, ариѳметической смѣтки, разъ навсегда пріобрѣтенной. И это очень понятно. Насколько повседневная жизнь удаляетъ человѣка отъ техники составленія и рѣшенія уравненій, настолько же она, по крайней мѣрѣ, иногда помогаетъ сохраненію въ способностяхъ чисто ариѳметическихъ способовъ. Каждый изъ насъ видѣлъ, какъ родители помогаютъ дѣтямъ рѣшать ариѳметическія задачи. Но лишь въ исключительныхъ случаяхъ можно это наблюдать по отношенію уравненій.

Но пусть приведенный доводъ, въ силу своей субъективности, падаетъ. Тогда мы обратимъ вниманіе на тотъ фактъ, что существуютъ условныя задачи, которыя или вовсе не рѣшаются уравненіями (см. далѣе №№ 1 и 2), или рѣшаются уравненіями только тогда, когда матеріалъ, необходимый для составленія уравненій, уже выработанъ чисто ариѳметическими способами (№№ 3 и 4). Примѣры:

1. Сколько можно сдѣлать размѣщеній (arrangement) изъ n элементовъ по два, по три..., и вообще по p элементовъ? Извѣстно, что сначала высчитываютъ число размѣщеній по два; зная это послѣднее, высчитываютъ число размѣщеній по три и т. д. Ни одна изъ этихъ

---

[1]) Авторъ убѣжденъ, что число и сущность чисто ариѳметическихъ методовъ, по крайней мѣрѣ, въ общихъ чертахъ опредѣлены, хотя и не съ полной точностью. Лицъ, не знакомыхъ съ этимъ предметомъ я прошу обратиться къ моему сочиненію «Методы рѣшеній ариѳметическихъ задачъ», изд. 7-е. Такъ какъ это изданіе, по независящимъ отъ автора причинамъ, было напечатано крайне спѣшно, то я не успѣлъ сдѣлать слѣдующихъ поправокъ: 1) книга предполагаетъ умѣнье рѣшать всякія задачи съ цѣлыми и дробными числами на каждое изъ четырехъ основныхъ дѣйствій, а также съ нахожденіемъ частей цѣлаго и обратно; 2) второй классъ задачъ (задачи на методъ обратности) слѣдуетъ дѣлить на три разряда; первые два указаны, третій пропущенъ; къ нему относятся тѣ задачи, въ которыхъ съ неизвѣстнымъ числомъ совершенъ рядъ опредѣленныхъ дѣйствій, при чемъ въ нѣкоторыя дѣйствія вновь входитъ тоже неизвѣстное число; алгебраическая форма задачъ этого рода есть $f\ (x, a, b, c) = d$ или $f\ (x, y, a, b, c) = d$ вмѣстѣ съ $F\ (x, y, a, b, s) = e$, гдѣ x и y — неизвѣстныя, $a, b, \ldots e$ — данныя, 3) методъ остатковъ и способъ метатезиса слѣдуетъ пропустить, 4) послѣдній способъ исключенія неизвѣстныхъ (e) надо дѣлить на двѣ группы, смотря по тому, является ли неизвѣстное число множимымъ, или множителемъ — примѣры на этотъ способъ приведены правильно.

Лицъ, нераздѣляющихъ высказанныя авторомъ убѣжденія, я бы очень просилъ такъ или иначе указать, на чемъ основаны ихъ сомнѣнія.

задачъ не рѣшается уравненіями. Окончательный же результатъ получается лишь тогда, когда ариѳметика дастъ указанія, какъ пустить въ дѣло алгебраическій методъ отъ n къ $(n+1)$.

То же относится къ такой задачѣ: «Двадцать человѣкъ обмѣнялись рукопожатіями. Сколько вышло рукопожатій? И то же самое случится всегда, когда въ основѣ рѣшенія задачи, кромѣ четырехъ дѣйствій, лежатъ различные способы высчитыванія.

2. Изъ Москвы въ Петроградъ ежедневно отправляютъ 24 поѣзда, черезъ часъ по поѣзду. Въ тѣ же часы изъ Петрограда въ Москву отправляютъ также 24 поѣзда. Каждый поѣздъ двигается 24 часа. Если выѣхать изъ Москвы, то сколько поѣздовъ попадется навстрѣчу? Въ моментъ выѣзда на полотнѣ двигаются 24 поѣзда и т. д.

3. Двое, придя въ ресторанъ, заказали 5 блюдъ одинаковой стоимости, первый — 3 блюда, второй — 2 блюда. Къ нимъ подсѣлъ третій, и всѣ ѣли поровну. Третій заплатилъ первому и второму 5 рублей. Какъ раздѣлить эти деньги между первымъ и вторымъ?

Нерѣдко получался опрометчивый отвѣтъ: 3 и 2 рубля. Однако, если мы станемъ рѣшать задачу уравненіями, то замѣтимъ, что уравненія ($x+y=5$ и $x : 1^1/_3=y : {}^1/_3$) возникнутъ только тогда, когда мы сообразимъ, что на долю каждаго приходится по $1^2/_3$ блюда, и что поэтому первый получаетъ за $1^1/_3$ блюда, а второй — за $^1/_3$ блюда. Но разъ мы это сообразили, то ужъ видно, что первый долженъ получить въ 4 раза болѣе второго, и никокой надобности въ уравненіяхъ нѣтъ. Во всякомъ случаѣ второе уравненіе можно получить только послѣ означенныхъ ариѳметическихъ соображеній.

4. Въ пустой бассейнъ проведены 2 трубы, одна первая можетъ наполнить бассейнъ въ 10 часовъ, одна вторая — въ 20 часовъ. Дѣйствуя одна послѣ другой, обѣ трубы наполнили бассейнъ въ 15 часовъ. Сколько часовъ дѣйствовала каждая труба?[1]).

---

[1]) Изъ задачника г. Теръ-Степанова. Рецензентъ находитъ, что этой задачѣ мѣсто въ алгебрѣ (№ 2 «Математическій Вѣстникъ», стр. 59). Я же думаю, что это — очень хорошая ариѳметическая задача.

Я полагаю, что изъ задачъ первой степени, исключая подготовительныя ступени, въ алгебрѣ главнымъ образомъ должны имѣть мѣсто задачи слѣдующаго характера.

1. Слесарь, имѣя квадратный листъ желѣза, замѣтилъ, что, если длину его увеличить на вершокъ, а ширину уменьшить на вершокъ, то получается такая же площадь, какая получится изъ того же листа, увеличивая егодлину на 5 вершковъ и уменьшая ширину на 3 вершка. Какова была длина листа?

Эта задача съ большимъ трудомъ, но рѣшается ариѳметикой.

2. Нѣсколько работниковъ выполнили работу. Если бъ ихъ было на 2 больше, они кончили бы работу на 2 дня скорѣе; если же ихъ было бы на 6 больше, то

Задача принадлежитъ къ типу задачъ, въ которыхъ отвѣтъ не зависитъ отъ размѣра той или другой величины, участвующей въ задачѣ (въ данномъ случаѣ, размѣръ бассейна). Поэтому, даемъ бассейну произвольный размѣръ, напр., въ 60 ведеръ[1]). Тогда первая труба даетъ въ часъ 6 ведеръ, а вторая — 3 ведра, обѣ же трубы въ среднемъ даютъ 4 ведра въ часъ; теперь задача приведена къ общеизвѣстному типу задачъ 2-го рода правила смѣшенія[2]) и рѣшается многими ариѳметическими способами, среди которыхъ не исключенъ и методъ подобія.

Въ самомъ дѣлѣ, если первая труба дѣйствовала примѣрно 7 часовъ, то она вольетъ 42 ведра, что даетъ противъ ожидаемыхъ 28 ведеръ излишка 14 ведеръ. Эти 14 ведеръ должна покрыть вторая труба, дающая въ часъ одно ведро недостатка. Очевидно, вторая труба должна работать 14 часовъ, и второе неизвѣстное больше перваго въ 2 раза. Существуютъ и другіе способы рѣшенія этой задачи; указываемый способъ выбранъ для иллюстраціи метода подобія [3]).

они кончили бы работу на 4 дня скорѣе. Сколько было работниковъ, считая всѣхъ одинаково работоспособными?

Эта задача, повидимому, вовсе не рѣшается ариѳметикой.

[1]) Этотъ пріемъ я уже давно указывалъ въ своей книгѣ. Имъ облегчается рѣшеніе очень многихъ задачъ.

[2]) Такъ какъ задачъ на правило смѣшенія безконечное множество, то этотъ терминъ, какъ создающій невѣрное представленіе, давно пора исключить. Ниже указанъ еще одинъ сильный доводъ въ пользу этого исключенія. См. вопросъ третій.

[3]) Весьма возможно, что мои рѣшенія покажутся читателю несимпатичными. Но я имѣю въ виду не личные вкусы, а интересы метода. До какой степени надо быть осторожнымъ въ сужденіяхъ такого рода, указываетъ слѣдующій примѣръ.

Одинъ изъ моихъ рецензентовъ настаивалъ на томъ, что задачу «Двое имѣли 2 руб. 40 коп. — одинъ на 26 коп. больше другого. Сколько имѣлъ каждый?» надо рѣшать такъ: раздѣлимъ 2 руб. 40 коп. пополамъ, а потомъ приведемъ полученныя суммы въ требуемое отношеніе. Я же указывалъ такое рѣшеніе: дадимъ второму 26 коп. — тогда у обоихъ будетъ 2 руб. 66 коп. и т. д.

Которое рѣшеніе лучше? Для разъясненія этого беремъ болѣе сложную задачу того же типа: «Найти четыре числа, сумма которыхъ равна 1600, если первое больше второго на 28, второе меньше третьяго на 48, а четвертое больше перваго на 36». По первому способу дѣлимъ 1600 на 4 равныя части, изъ второго беремъ 14 и прикладываемъ къ первому. Что же дѣлать дальше?

Между тѣмъ второй способъ даетъ результатъ довольно быстро. Положимъ, что случайность перваго способа и безъ того видна, между тѣмъ какъ способъ уравниванія неизвѣстныхъ, напр., имѣетъ большую силу и въ геометріи. Тѣмъ не менѣе здѣсь видно, какъ судить о силѣ того и другого способа рѣшенія. Надо выбирать тотъ способъ, который распространяется на большій кругъ задачъ. Однимъ изъ такихъ является, по преимуществу, методъ подобія, который во многихъ задачахъ ариѳметики и геометріи является единственнымъ орудіемъ.

Если рѣшать нашу задачу уравненіями, давъ задачѣ упрощенную форму, то получаемъ очень простое уравненіе $6x+3(15-x)=60$. Но, именно, то и важно, что простота уравненія достигнута ариѳметическими способами.

Обычное рѣшеніе той же задачи даетъ уравненіе $\frac{1}{10}x+\frac{1}{20}(15-x)=1$. Но дѣло въ томъ, что это уравненіе достигнуто опять чисто ариѳметическими методами нахожденія частей и приведенія къ единицѣ, методами, рѣшающими милліоны ариѳметическихъ задачъ. Здѣсь кстати замѣтить, что задачи на бассейны затрудняютъ учениковъ, именно, потому, что учениковъ мало или односторонне знакомятъ съ методомъ нахожденія частей[1]). Читатель не долженъ думать (такого рода вещи случались въ практикѣ), что, по моему мнѣнію, нельзя составить уравненія вопроса безъ знанія 4 дѣйствій, конечно, одинаково принадлежащихъ и ариѳметикѣ, и алгебрѣ. Моя мысль въ томъ, что нѣкоторые (если не всѣ) чисто ариѳметическіе способы очень часто даютъ фундаментъ для составленія уравненія вопроса, и есть очень много задачъ, рѣшеніе которыхъ уравненіями не можетъ обойтись безъ этихъ способовъ. Теперь мы покажемъ, что существуетъ не мало задачъ, которыя рѣшаются гораздо легче чисто ариѳметическими способами, чѣмъ при помощи уравненій.

5. Четыре лица A, B, C и D играютъ между собой на томъ условіи, что проигравшій игру долженъ заплатить каждому изъ остальныхъ столько, сколько тотъ имѣетъ. Первую игру проигралъ A, вторую — B, третью — C и четвертую — D. Послѣ этого каждый изъ нихъ имѣлъ по 48 руб. Сколько денегъ имѣлъ каждый первоначально?

Алгебра даетъ 4 уравненія съ 4 неизвѣстными, среди которыхъ (въ особенности при увеличеніи числа играющихъ) довольно легко запутаться. Между тѣмъ по методу обратности задача рѣшается легко при всякомъ количествѣ лицъ. Послѣ 4-й игры деньги A, B и C, удвоились; поэтому до 4-й игры они имѣли по 24 руб. и т. д. Рѣшеніе можетъ быть представлено слѣд. таблицей. Такая же таблица,

---

[1]) Быть можетъ, еще сильнѣе другая причина — отсутствіе наглядности преподаванія. Лѣтъ 30 тому назадъ я устроилъ для VIII класса женской гимназіи Маріоттовъ сосудъ, опорожняющійся одной трубой въ 3 минуты, а другой — въ 6 минутъ. Если открывались обѣ трубы, то сосудъ вытекалъ въ 2 минуты, и были видны всѣ перипетіи рѣшенія задачи «Бассейнъ вытекаетъ черезъ одну трубу въ 3 минуты, черезъ другую въ 6 минутъ. Во сколько времени выльется бассейнъ, если открыть обѣ трубы?» Въ послѣдующіе года этотъ сосудъ служилъ для пробныхъ уроковъ 8-классницъ. Я иногда встрѣчаю бывшихъ моихъ ученицъ; до сего времени они отлично помнятъ это наглядное рѣшеніе.

составленная въ обратномъ направленіи для уравненій, будетъ гораздо сложнѣе.

	A	B	C	D
Конецъ	48	48	48	48
↓	24	24	24	120
	12	12	108	60
	6	102	54	30
Начало	99	51	27	15

Конечно, мнѣ укажутъ на искусственность этой задачи; но тотъ же упрекъ можно сдѣлать по адресу громаднѣйшаго числа задачъ на уравненія. Ниже я говорю по этому вопросу. Впрочемъ, вотъ задача, свободная отъ этого упрека.

6. Четыре купца торговали сообща: первый далъ 5000 руб. на 6 лѣтъ, второй — 4000 руб. на 8 лѣтъ, 3-й — 7000 на 5 лѣтъ и четвертый — 8000 на 3 года. Изъ общей прибыли 1210 руб. сколько приходится каждому?

Купцы рѣшаютъ эту задачу методомъ подобія (примѣрный расчетъ). Если первому дать 600 руб. (вообще произвольную сумму), то на тысячу за годъ придется 20 руб. дохода, и затѣмъ уже легко расчитать, что остальнымъ придется по 640, 700 и 480 руб; вся прибыль будетъ 2420 руб., вдвое болѣе, чѣмъ слѣдуетъ, и т. д.

Алгебра даетъ четыре уравненія съ четырьмя неизвѣстными. Въ особенности съ увеличеніемъ числа лицъ первый способъ приходится признать болѣе легкимъ. Къ сказанному можно присоединить еще одинъ доводъ. Техника рѣшеній уравненій, въ предѣлахъ задачъ первой степени, содержитъ въ себѣ мало развивающаго; между тѣмъ, чисто ариѳметическіе способы превосходно развиваютъ остроту умственнаго зрѣнія и умѣнье оріентироваться въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ. Что касается техники составленія уравненія изъ условій вопроса, то въ ней, какъ мы видѣли, главнымъ образомъ участвуютъ соображенія чисто ариѳметическаго характера.

Теперь уже ясенъ отвѣтъ на поставленный вопросъ. Однако отсюда не слѣдуетъ, чтобъ мы могли пренебрегать рѣшеніемъ задачъ на составленіе уравненія. Думается, что всего правильнѣе условныя задачи первой степени рѣшать главнымъ образомъ ариѳметикой;

съ помощью же уравненій ихъ надо рѣшать по стольку, по скольку это нужно для перехода къ рѣшенію квадратныхъ задачъ, т.-е., къ той области, въ которой ариѳметическіе методы, хотя и сохраняютъ свою силу, но вообще уже не могутъ привести къ конечному результату; затѣмъ съ помощью алгебры главнымъ образомъ надо рѣшать, за исключеніемъ переходной ступени, лишь тѣ задачи первой степени, которыя поддаются ариѳметическимъ методамъ съ трудомъ, или совсѣмъ не поддаются (см. примѣчаніе 3).

II. Какія задачи предпочтительнѣй отнести къ курсу алгебры и какія — къ курсу ариѳметики?

Отвѣтъ на этотъ вопросъ очевиденъ изъ рѣшенія предыдущаго вопроса. Правильный критерій мы можемъ найти только въ степени задачи[1]). Если задача первой степени, то ея мѣсто и въ томъ, и въ другомъ задачникѣ, смотря по тому, какимъ способомъ она легче рѣшается; только число условныхъ задачъ въ алгебрѣ, какъ уже сказано, должно быть значительно сокращено. Всякій другой критерій намъ кажется искусственнымъ и, будучи хорошимъ при извѣстномъ стеченіи обстоятельствъ, окажется плохимъ при другомъ положеніи вещей.

III. Какъ надо располагать условныя задачи на всѣ дѣйствія, по качеству предметовъ и процессовъ, участвующихъ въ задачѣ (бассейны, курьеры, встрѣчи, векселя, смѣшенія и проч.), или по способамъ ихъ рѣшенія?

Чтобы воевать, надо знать способы веденія войны. Это ли не простая и очевидная мысль? А между тѣмъ прививается она у насъ очень туго.

Этому вопросу посвящена моя статья «Классификація ариѳметическихъ задачъ въ задачникахъ»[2]). Въ этой статьѣ, какъ кажется, доказано, что единственно правильный путь распредѣленія ариѳметическихъ задачъ состоитъ въ классификаціи ихъ по методамъ рѣшенія. Къ этому надо добавить, что всѣхъ чисто ариѳметическихъ

---

[1]) Можетъ показаться, что авторъ противорѣчитъ самъ себѣ. Отдавая предпочтеніе ариѳметическимъ методамъ въ рѣшеніи задачъ, авторъ вручаетъ разрѣшеніе занимающаго насъ вопроса алгебрѣ. Ограничимся слѣдующими указаніями. Вопросъ о томъ, разрѣшима ли задача на построеніе циркулемъ и линейкой, зависитъ почти исключительно отъ алгебры. Слѣдуетъ ли изъ этого, что всѣ задачи на построеніе должны рѣшаться примѣненіемъ алгебры къ геометріи? Конечно, нѣтъ, и главнымъ образомъ, потому, что сама алгебра, если ее оставить безъ помощи геометрическихъ методовъ, часто не въ силахъ разрѣшить данный ей вопросъ. Въ ариѳметическихъ задачахъ — то же самое.

[2]) См. № 7 «Педагогическаго Вѣстника» 1914 г., а также предисловіе къ 7-му изданію «Методы рѣшеній ариѳметическихъ задачъ» И. Александрова.

методовъ (7) вмѣстѣ съ различными прiемами рѣшенiя (7—8) я насчитываю всего 14—15. Слѣдовательно, дѣло ужъ не такъ страшно и не такъ трудно, чтобъ его не провести въ школѣ. А между тѣмъ ученикъ, знающiй главные ариѳметическiе методы, почти обезпеченъ въ рѣшенiи задачи, потому что онъ можетъ послѣдовательно примѣнить къ рѣшенiю всѣ извѣстные ему способы. Слѣдуетъ также указать на доводъ, обнаруживающiйся задачами №№ 5 и 6 этой записки. Что касается практики, то могу сказать, что, гдѣ мнѣ только не приходилось знакомить слушателей съ ариѳметическими методами, всюду я встрѣчалъ неизмѣнный интересъ и живѣйшее вниманiе.

Затѣмъ изъ всѣхъ извѣстныхъ мнѣ возраженiй противъ употребленiя ариѳметическихъ методовъ въ средней школѣ лишь только два заслуживаютъ вниманiя.

Первое состоитъ въ томъ, что большинство ариѳметическихъ методовъ представляетъ замаскированное рѣшенiе уравненiй. Дѣйствительно, напр., въ методахъ замѣны и уравниванiя неизвѣстныхъ близость того и другого метода доходитъ до тождества; въ другихъ методахъ, напр., въ методѣ подобiя, нѣтъ ни малѣйшаго сходства съ рѣшенiемъ уравненiй. Однако это возраженiе падаетъ, потому, во-первыхъ, что ариѳметическiе способы употребляются лицами, вовсе не знающими алгебры — они одинаково доступны ученому и плотнику (см. примѣч. 9-е), слесарю и сестрѣ милосердiя (составленiе раствора двухъ жидкостей извѣстной крѣпости). Во-вторыхъ, тѣ же прiемы употребляются во всѣхъ частяхъ математики, а въ особенности, въ геометрiи; они вовсе не составляютъ специфической принадлежности алгебры.

Второе возраженiе очень интересно, но практическаго значенiя, очевидно, не имѣетъ. Ариѳметическiе методы, по этому мнѣнiю, суть переложенiя прiемовъ рѣшенiя уравненiй различныхъ видовъ въ такую форму, которая можетъ быть проведена независимо отъ понятiя объ уравненiи. Быть можетъ, глубокiя логическiя изысканiя когда-нибудь это и докажутъ. Лично же я часто думаю, что и въ этомъ случаѣ должно открыться нѣчто совсѣмъ другое, гораздо болѣе естественное. По всей вѣроятности, человѣческая мысль, пытаясь рѣшать въ различныхъ условiяхъ сначала одинъ и тотъ же вопросъ, а затѣмъ различные вопросы, подходила къ нимъ съ приблизительно одинаковыми прiемами, а потомъ уже эти прiемы отливались въ различныя формы, почему и получились разнообразныя формы методовъ. Этимъ, между прочимъ, отчасти и можно объяснить ту близость, которую мы иногда наблюдаемъ между нѣкоторыми методами ариѳметики, геометрiи и алгебры. Какъ бы ни былъ рѣшенъ этотъ вопросъ впослѣдствіи, въ настоящемъ мы не избавлены отъ изученія методовъ. И тѣмъ болѣе, что практика (напр., въ геометріи) уже окончательно установила все громадное ихъ значеніе. Что же касается ариѳметическихъ методовъ, то они не имѣютъ такого рода широкого примѣненія, какъ въ геометріи, и весьма вѣроятно, что это случилось только по нашей небрежности.

Въ той же статьѣ я указывалъ, что блестящіе успѣхи теоріи геометрическихъ построеній достигнуты не произвольнымъ предпочтеніемъ алгебраическихъ методовъ геометрическимъ или наоборотъ, а, именно, взаимодѣйствіемъ того и другого метода. Такъ и въ вопросѣ о составленіи ариѳметическихъ и алгебраическихъ задачниковъ дѣло должно опредѣлиться взаимодѣйствіемъ ариѳметическихъ и алгебраическихъ способовъ; каждому изъ нихъ можетъ быть отведено должное мѣсто, но одинъ методъ не долженъ поглощать другой.

IV. Въ какомъ размѣрѣ и въ какомъ объемѣ должны проходиться методы рѣшеній ариѳметическихъ задачъ?

Совершенно не допуская, согласно предыдущему, отрицательнаго отвѣта, можно только утверждать, что въ этомъ случаѣ долженъ быть извѣстный minimum, выработанный въ органическомъ единеніи съ преподаваніемъ не только математики, но и всѣхъ предметовъ низшей и средней школы. Совершенно безполезно рѣшать нашъ вопросъ теоретически; въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ педагогическое чутье и тактъ преподавателя укажутъ это гораздо вѣрнѣе.

V. Изъ какихъ областей жизни, природы и науки должно быть взято содержаніе ариѳметическихъ задачъ?

Конечно, это содержаніе должно мѣняться и возрастать съ возрастомъ учащихся. Затѣмъ можно утверждать, что содержаніе задачи въ теченіе нѣкотораго времени надо заимствовать изъ общеизвѣстныхъ фактовъ и дѣйствій. Въ наше время развитіе техники, промышленности и денежныхъ операцій идетъ столь быстрымъ темпомъ, что общая школа не можетъ ставить своей задачей ознакомленіе учащихся даже съ малою долей этихъ данныхъ. Какъ и въ другихъ подобныхъ случаяхъ, школа должна лишь дать ученику извѣстное развитіе способностей, гарантирующее ему возможность оріентироваться въ вопросахъ, предъявляемыхъ къ нему той или другой комбинаціей вещей и дѣйствій, съ которыми придется познакомиться уже по выходѣ изъ школы. Только такое направленіе школы, безъ всякихъ противорѣчій проведенное черезъ всѣ предметы обученія, можетъ ее вывести на правильную дорогу.

Соотвѣтственно этому взгляду и всему, высказанному въ этой запискѣ, изъ ариѳметическихъ задачниковъ должны исчезнуть рубрики: пропорцій, сложнаго тройного правила, учета векселей, товарищества, смѣшенія и цѣпного правила. Соотвѣтственно тому же изъ руководствъ ариѳметики должны быть исключены тѣ же статьи, а также дѣйствія съ именованными числами въ видѣ отдѣльной статьи: этимъ дѣйствіямъ мѣсто въ задачникахъ, а не въ руководствахъ ариѳметики. Таблицы же мѣръ, въ извѣстномъ minimum'ѣ, должны изучаться, конечно, по преимуществу наглядно.

VI. Не лучше ли содержаніе задачъ брать исключительно изъ повседневной обиходной жизни и только, если позволяютъ обстоятельства, изъ области природы и науки?

Думается, что совсѣмъ исключить искусственныя задачи, подобныя № 5, было бы весьма неосторожно по тремъ причинамъ: а) часто такого рода задачи являются единственными представителями и з в ѣ с т н а г о о д н о г о м е т о д а, между тѣмъ какъ практическія задачи, насколько мнѣ извѣстно, рѣшаются большею частью непосредственно вычисленіемъ съ примѣненіемъ приведенія къ единицѣ, или въ сложныхъ случаяхъ совокупностью нѣсколькихъ методовъ (отчасти можетъ служить примѣромъ задача № 6). в) Что сегодня кажется намъ искусственнымъ и фантастическимъ, то съ теченіемъ времени можетъ войти въ плоть и кровь обыденной и научной мысли. Во дни моей школьной жизни задачу о воздушныхъ корабляхъ, конечно, считали фантазіей и сказкой. Въ настоящее время эта фантасмагорія сдѣлалась яркой дѣйствительностью.

Великія работы Н. И. Лобачевскаго, даже послѣ его смерти (1856 г.) считались до того странными и мечтательными, что нѣкоторыя научныя коллегіи въ концѣ 70-хъ годовъ согласились не принимать отъ студентовъ диссертацій на темы изъ Неевклидовой геометріи. Въ настоящее время мы ежегодно слышимъ отъ абитуріентовъ средней школы того и другого пола настоятельныя просьбы ознакомить ихъ съ началами этой геометріи, нѣкотораго рода спортъ мы должны допустить и въ области научной мысли. с) Задачи, взятыя изъ обиходной жизни, а также изъ области природы и науки, до сихъ поръ и не собраны, и не систематизированы. Пишущій эти строки порою весьма интересовался этимъ вопросомъ; однако, ему извѣстны такого типа только задачъ 10—12 изъ собственныхъ наблюденій[1]), да еще статья

[1]) Вотъ двѣ изъ подобныхъ задачъ:

I. Отъ доски длиною въ $^2/_3$ арш. отрѣзать полъ-аршина, не имѣя подъ руками аршина.

II. Требуется замостить полъ 12 арш. $\times$ 9 арш. 12 вершк. восьми и шестиаршинными досками шириною въ 6 вершк., цѣною въ 1 руб. 20 коп. и въ 1 руб. Какъ это сдѣлать, чтобъ не портить матеріала, т.-е. употребляя цѣлое число досокъ того и другого сорта?

С. И. Лапшина, въ свое время неоцѣненная и нынѣ сдѣлавшаяся уже рѣдкостью[1]).

Преимущественное появленіе такихъ задачъ въ сборникахъ нельзя было бы не привѣтствовать [2]).

На основаніи всего сказаннаго будущее условныхъ ариѳметическихъ и алгебраическихъ задачъ намъ представляется въ слѣдующемъ видѣ.

Прежде всего надо классифицировать главные методы и пріемы рѣшеній ариѳметическихъ задачъ, а также дать достаточно примѣровъ примѣненія каждаго способа и ихъ совокупности. Эта работа, худо или хорошо, сдѣлана пишущимъ эти строки. Практическое примѣненіе этой работы въ теченіе болѣе 25 лѣтъ, насколько позволяетъ судить собственный опытъ и чужіе отзывы, давало прекрасные результаты. Тѣмъ не менѣе въ этой работѣ число методовъ не доведено еще до minimum'а; также сравнительная оцѣнка методовъ не можетъ считаться оконченною.

Затѣмъ предстоитъ весьма сложная работа. Надо собрать задачи первой степени, удовлетворяющія вышеизложеннымъ требованіямъ (вопросы IV—VI) и систематизировать ихъ не только по отношенію къ способамъ рѣшенія, но и въ зависимости отъ возраста ученика, т.-е., отъ того или другого круга его знаній. Изъ числа этихъ задачъ первой степени надо отобрать достаточное количество задачъ для алгебры, выполняя вышеуказанныя требованія. Наконецъ, сообразуясь съ тѣми же требованіями, надо собрать и систематизировать задачи 2-й и высшихъ степеней. Какъ показалъ опытъ съ задачами

---

[1]) «Сборникъ ариѳметическихъ задачъ для воскресныхъ школъ», 1894 г., Москва — очень хорошая и умно составленная работа. Авторъ оперировалъ съ слушателями извѣстнаго круга, и потому его задачи по необходимости вышли нѣсколько однообразными. Съ расширеніемъ этого круга, изъ этой маленькой книжки могло бы выработаться существенно важное сочиненіе, и мы не можемъ не выразить желанія, чтобы авторъ поработалъ въ этомъ направленіи. Вотъ двѣ задачи, характеризующія эту работу.

№ 67. Голова и хвостъ у всякой наваги вѣсятъ приблизительно одинаково — $^1/_8$ фунта. Навага, счетомъ двѣ штуки на фунтъ, продается по 15 коп., а счетомъ 3 штуки на фунтъ, по 13 коп. Какая выгоднѣе?

№ 46. На скатерть пошло $1^3/_4$ арш. сукна по 5 руб. 50 коп. и 76 зол. гаруса цѣной 15 руб. фунтъ; мастерица, получающая 17 руб. въ мѣсяцъ жалованья, на своихъ харчахъ, вышивала эту скатерть 20 дней. Что стоитъ скатерть? Отвѣтъ 13 руб. 03 коп.

Предупреждаемъ читателя, что авторъ этихъ задачъ смотритъ на дѣло практически и потому умалчиваетъ о томъ, что непремѣнно добавилъ бы теоретикъ.

[2]) Можно еще указать на примѣры изъ «Методики ариѳметики» Штеклина насколько они касаются Швейцаріи, а не Россіи.

на построеніе, такая работа едва ли можетъ быть исполнена однимъ лицомъ. Однако можно приближаться къ цѣли мелкими шагами, лишь были бы они тверды. При этомъ условіи изъ работъ отдѣльныхъ единицъ можетъ сложиться весьма значительный результатъ. Къ работѣ въ этомъ направленіи мы и призываемъ читателя.

И. Александровъ.