

# МАТЭМАТЫКА, ФІЗІКА, БІЯЛОГІЯ

УДК 512.548

## СТЕПЕНИ ЭЛЕМЕНТОВ В ПОЛИАДИЧЕСКИХ ПОЛУГРУППАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

**А. М. Гальмак**

доктор физико-математических наук, профессор

Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий

*В статье изучаются степени элементов в полиадических полугруппах специального вида, то есть в полиадических полугруппах с  $l$ -арной операцией  $\eta_{s, \sigma, k}$ , которая называется полиадической операцией специального вида и определяется на декартовой степени  $A^k$   $n$ -арной полугруппы  $\langle A, \eta \rangle$  с помощью подстановки  $\sigma \in S_k$ , удовлетворяющей условию  $\sigma^l = \sigma$ , и  $n$ -арной операции  $\eta$ .*

**Ключевые слова:** полиадическая операция,  $n$ -арная полугруппа, степень элемента.

### Введение

Данная статья посвящена изучению степеней элементов в  $l$ -арных полугруппах специального вида  $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ . В ней доказаны результаты, позволяющие для каждого элемента  $a$   $l$ -арной полугруппы  $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$  находить его полиадические степени  $a^{[v]}$ , компоненты которых выражаются через компоненты элемента  $a$  с помощью  $n$ -арной операции  $\eta$   $n$ -арной полугруппы, на декартовой степени которой построена указанная  $l$ -арная полугруппа.

Взяв за основу определение Поста [1] полиадической степени элемента  $n$ -арной группы, определим степень элемента  $n$ -арной полугруппы.

Назовём  $v$ -ой  $n$ -адической степенью элемента  $a$   $n$ -арной полугруппы  $\langle A, \eta \rangle$  элемент этой же  $n$ -арной полугруппы, обозначаемый символом  $a^{[v]}$  и определяемый следующим образом:

$$a^{[v]} = a, \text{ если } v = 0,$$
$$a^{[v]} = \eta(\underbrace{a \dots a}_{v(n-1)+1}), \text{ если } v > 0.$$

**Замечание.** В полугруппе полиадическая степень и обычная степень одного и того же элемента связаны равенством

$$a^{[v]} = a^{v+1}, v \geq 0.$$

В частности,  $a^{[0]} = a^1 = a$ .

Всю необходимую информацию, используемую в данной статье, в том числе об операции  $\eta_{s, \sigma, k}$  и ее частном случае – операции  $[\ ]_{s+1, \sigma, k}$ , можно найти в [2, 3].

В статье существенно используется следующая теорема.

**Теорема [2].** Если  $\langle A, \eta \rangle$  –  $n$ -арная полугруппа, подстановка  $\sigma$  удовлетворяет условию  $\sigma^l = \sigma$ , то  $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$  –  $l$ -арная полугруппа.

© Гальмак А. М., 2024

### 1. Основной результат

Согласно теореме из введения, если  $\langle A, \eta \rangle$  –  $n$ -арная полугруппа, подстановка  $\sigma$  удовлетворяет условию  $\sigma^l = \sigma$ , то  $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$   $l$ -арная полугруппа. Укажем для каждого элемента этой  $l$ -арной полугруппы его  $v$ -ую  $l$ -адическую степень.

**Теорема 1.1.** Пусть  $\langle A, \eta \rangle$  –  $n$ -арная полугруппа, подстановка  $\sigma \in \mathbf{S}_k$  удовлетворяет условию  $\sigma^l = \sigma$ ,  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$  – произвольный элемент  $l$ -арной полугруппы  $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ ,

$$\alpha_j = a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{l-2}(j)}, j = 1, \dots, k. \quad (1.1)$$

Тогда  $v$ -ая  $l$ -адическая степень  $\mathbf{a}^{[v]}$  элемента  $\mathbf{a}$  имеет вид  $(b_1, \dots, b_k)$ , где

$$b_j = a_j, \text{ если } v = 0, \\ b_j = \eta(\underbrace{a_j \alpha_j a_j \dots \alpha_j a_j}_v) = \eta(\underbrace{a_j \alpha_j \dots a_j \alpha_j a_j}_v), \text{ если } v > 0, \quad (1.2)$$

то есть

$$\mathbf{a}^{[v]} = \mathbf{a}, \text{ если } v = 0, \\ \mathbf{a}^{[v]} = (\eta(\underbrace{a_1 \alpha_1 a_1 \dots \alpha_1 a_1}_v), \dots, \eta(\underbrace{a_k \alpha_k a_k \dots \alpha_k a_k}_v)) = \\ = (\eta(\underbrace{a_1 \alpha_1 \dots a_1 \alpha_1 a_1}_v), \dots, \eta(\underbrace{a_k \alpha_k \dots a_k \alpha_k a_k}_v)), \text{ если } v > 0.$$

**Доказательство.** Для  $v = 0$  доказывать нечего.

Если  $v > 0$ , то положим

$$\mathbf{a}^{[v]} = \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{a} \dots \mathbf{a}}_{v(l-1)+1}) = (b_1, \dots, b_k).$$

Из этого равенства, принимая во внимание определение  $l$ -арной операции  $\eta_{s, \sigma, k}$ , тождественность подстановки  $\sigma^{l-1}$ , получим

$$b_j = \eta(a_j a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_{\sigma^{l-1}(j)} \underbrace{a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_{\sigma^{l-1}(j)} \dots a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_{\sigma^{l-1}(j)}}_{v-1}) = \\ = \eta(a_j a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j \underbrace{a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j \dots a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j}_{v-1}) = \\ = \eta(\underbrace{a_j a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j \dots a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j}_v),$$

то есть

$$b_j = \eta(\underbrace{a_j a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j \dots a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j}_v).$$

Из полученного равенства и равенства (1.1) вытекает

$$b_j = \eta(\underbrace{a_j \alpha_j a_j \dots \alpha_j a_j}_v).$$

Следовательно, верно первое равенство в (1.2) для любого  $j \in \{1, \dots, k\}$ , а значит, ввиду ассоциативности  $n$ -арной операции  $\eta$ , верно и второе равенство в (1.2). Теорема доказана.

Покажем, что если в теореме 1.1 подстановка  $\sigma$  оставляет неподвижным некоторый символ, то компонента элемента  $\mathbf{a}^{[v]}$ , индекс которой совпадает с этим символом, имеет вид, указанный в следующем предложении.

**Предложение 1.1.** Пусть  $\langle A, \eta \rangle$  –  $n$ -арная полугруппа, подстановка  $\sigma$  из  $S_k$  удовлетворяет условию  $\sigma^l = \sigma$  и оставляет неподвижным символ  $m$ ,  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$  – произвольный элемент  $l$ -арной полугруппы  $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ . Тогда  $m$ -я компонента  $b_m$  элемента  $\mathbf{a}^{[v]} = (b_1, \dots, b_k)$  имеет вид

$$b_m = a_m^{[sv]}.$$

*Доказательство.* Так как

$$\mathbf{a}^{[0]} = \mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k), \quad a_m^{[s0]} = a_m^{[0]} = a_m,$$

то для  $v = 0$  равенство из формулировки предложения верно.

Так как подстановка  $\sigma$  оставляет неподвижным символ  $m$ , то последовательность  $\alpha_m$  из формулировки теоремы 1.1 имеет вид

$$\alpha_m = \underbrace{a_m \dots a_m}_{l-2},$$

а для  $v > 0$  элемент  $b_m$  переписывается в виде

$$\begin{aligned} b_m &= \eta(\underbrace{a_m a_m \dots a_m a_m}_{l-2} \dots \underbrace{a_m \dots a_m a_m}_{l-2}) = \\ &= \eta(\underbrace{a_m \dots a_m}_{v(l-1)+1}) = \eta(\underbrace{a_m \dots a_m}_{vs(n-1)+1}) = a_m^{[sv]}. \end{aligned}$$

Предложение доказано.

В следующей теореме, в отличие от теоремы 1.1, указан порядок подстановки  $\sigma$ . Это позволило более детально описать компоненты полиадических степеней элементов  $l$ -арной полугруппы  $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ .

**Теорема 1.2.** Пусть  $\langle A, \eta \rangle$  –  $n$ -арная полугруппа, порядок подстановки  $\sigma$  из  $S_k$  делит натуральное  $d$ ,  $l = td + 1$  для некоторого натурального  $t$ ,  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$  – произвольный элемент  $l$ -арной полугруппы  $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ ,

$$\alpha_j = a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{d-1}(j)}, \quad j = 1, \dots, k. \quad (1.3)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^{[v]} &= \mathbf{a}, \text{ если } v = 0, \\ \mathbf{a}^{[v]} &= (\eta(\underbrace{a_1 \alpha_1 a_1 \dots \alpha_1 a_1}_{tv}), \dots, \eta(\underbrace{a_k \alpha_k a_k \dots \alpha_k a_k}_{tv})) = \\ &= (\eta(\underbrace{a_1 \alpha_1 \dots a_1 \alpha_1 a_1}_{tv}), \dots, \eta(\underbrace{a_k \alpha_k \dots a_k \alpha_k a_k}_{tv})), \text{ если } v > 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

*Доказательство.* Так как порядок подстановки  $\sigma$  делит  $d$ , то из условия  $l = td + 1$  следует, что порядок подстановки  $\sigma$  делит также  $l - 1$ . Следовательно,

подстановка  $\sigma$  удовлетворяет условию  $\sigma^l = \sigma$ . Таким образом, выполнены условия теоремы из введения, согласно которой  $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle - l$ -арная полугруппа.

По условию порядок подстановки  $\sigma$  делит  $d$ , и  $l = td + 1$ . Поэтому  $\sigma^d$  – тождественная подстановка и, кроме того,

$$a_{\sigma(j)} \cdots a_{\sigma^{l-2}(j)} = \underbrace{a_{\sigma(j)} \cdots a_{\sigma^{d-1}(j)} a_j \cdots a_{\sigma(j)} \cdots a_{\sigma^{d-1}(j)} a_j}_{t-1} a_{\sigma(j)} \cdots a_{\sigma^{d-1}(j)}$$

или, учитывая равенство (1.3),

$$a_{\sigma(j)} \cdots a_{\sigma^{l-2}(j)} = \underbrace{\alpha_j a_j \cdots \alpha_j a_j}_{t-1} \alpha_j. \quad (1.5)$$

Для  $v = 0$  доказывать нечего.

Если  $v > 0$ , то, как и в теореме 1.1, положим

$$\mathbf{a}^{[v]} = \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{a} \cdots \mathbf{a}}_{v(l-1)+1}) = (b_1, \dots, b_k).$$

Проведя те же вычисления, что и в теореме 1.1, получим

$$b_j = \eta(\underbrace{a_j a_{\sigma(j)} \cdots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j \cdots a_{\sigma(j)} \cdots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j}_v).$$

Из этого равенства и равенства (1.5) вытекает

$$\begin{aligned} b_j &= \eta(\underbrace{a_j \alpha_j a_j \cdots \alpha_j a_j}_{t-1} \alpha_j \underbrace{a_j \cdots \alpha_j a_j}_{t-1}) = \\ &= \eta(\underbrace{a_j \alpha_j a_j \cdots \alpha_j a_j}_{t} \underbrace{\alpha_j a_j \cdots \alpha_j a_j}_{t}) = \eta(\underbrace{a_j \alpha_j a_j \cdots \alpha_j a_j}_{v}), \end{aligned}$$

то есть

$$b_j = \eta(\underbrace{a_j \alpha_j a_j \cdots \alpha_j a_j}_{v})$$

для любого  $j \in \{1, \dots, k\}$ . Следовательно верно первое равенство в (1.4), а значит, ввиду ассоциативности  $n$ -арной операции  $\eta$ , верно и второе равенство в (1.4). Теорема доказана.

**Замечание 1.1.** Ясно, что теорема 1.1 вытекает из теоремы 1.2 при  $t = 1$  ( $d = l - 1$ ).

**Замечание 1.2.** В теореме 1.2 в качестве подстановки  $\sigma$  можно взять подстановку порядка  $d$ , в частности, цикл длины  $d$ . Если же в качестве подстановки  $\sigma$  в указанной теореме взять подстановку порядка  $d = l - 1$ , то  $t = 1$  в формулах, описывающих компоненты степени  $\mathbf{a}^{[v]}$ .

**Замечание 1.3.** Если  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$  – произвольный элемент  $l$ -арной полугруппы  $\langle A^k, [\ ]_{l, \sigma, k} \rangle$ ,  $\sigma$  – тождественная подстановка, то согласно определению полиадической степени имеем

$$\mathbf{a}^{[v]} = \eta(\underbrace{\mathbf{a} \cdots \mathbf{a}}_{v(l-1)+1}) = \eta(\underbrace{(a_1, \dots, a_k) \cdots (a_1, \dots, a_k)}_{v(l-1)+1}) =$$

$$= (\eta(\underbrace{a_1 \dots, a_1}_{v(l-1)+1}), \dots, \eta(\underbrace{a_k \dots, a_k}_{v(l-1)+1})). \quad (1.6)$$

Если теперь в теореме 1.2  $d = 1$ , то есть  $\sigma$  – тождественная подстановка, то  $t = l - 1$ , а последовательность (1.3) – пустая. В этом случае равенство (1.4) принимает вид (1.6). Следовательно, случай тождественной подстановки содержится в теореме 1.2 при  $d = 1$ .

Для тождественной подстановки имеет место предложение, устанавливающее связь между степенями элементов в  $l$ -арной полугруппе  $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$  и степенями компонент этих элементов в  $n$ -арной полугруппе  $\langle A, \eta \rangle$ .

**Предложение 1.2.** Пусть  $\langle A, \eta \rangle$  –  $n$ -арная полугруппа,  $\sigma$  – тождественная подстановка из  $S_k$ ,  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$  – произвольный элемент  $l$ -арной полугруппы  $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ . Тогда для любого  $v \geq 0$  верно равенство

$$\mathbf{a}^{[v]} = (a_1^{[sv]}, \dots, a_k^{[sv]}).$$

*Доказательство.* Ясно, что для  $v = 0$  равенство из формулировки теоремы верно.

Так как  $l - 1 = s(n - 1)$ , то для любого  $j \in \{1, \dots, k\}$  верно равенство

$$\eta(\underbrace{a_j \dots, a_j}_{v(l-1)+1}) = \eta(\underbrace{a_j \dots, a_j}_{vs(n-1)+1}) = a_j^{[sv]}, v > 0.$$

Таким образом, ввиду (1.6), формула из условия предложения верна для любого  $v \geq 0$ . Предложение доказано.

Если в теореме 1.2  $d = n - 1$ , то  $l - 1 = t(n - 1)$ , откуда и из равенства  $l - 1 = s(n - 1)$  следует  $t = s$ . Поэтому теорема 1.2 позволяет сформулировать следующий результат.

**Теорема 1.3.** Пусть  $\langle A, \eta \rangle$  –  $n$ -арная полугруппа, порядок подстановки  $\sigma$  из  $S_k$  делит  $n - 1$ ,  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$  – произвольный элемент  $l$ -арной полугруппы  $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ ,

$$\alpha_j = a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{n-2}(j)}, j = 1, \dots, k.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^{[v]} &= \mathbf{a}, \text{ если } v = 0, \\ \mathbf{a}^{[v]} &= (\eta(\underbrace{a_1 \alpha_1 a_1 \dots \alpha_1 a_1}_{sv}), \dots, \eta(\underbrace{a_k \alpha_k a_k \dots \alpha_k a_k}_{sv})) = \\ &= (\eta(\underbrace{a_1 \alpha_1 \dots a_1 \alpha_1 a_1}_{sv}), \dots, \eta(\underbrace{a_k \alpha_k \dots a_k \alpha_k a_k}_{sv})), \text{ если } v > 0. \end{aligned}$$

Если порядок  $\delta$  подстановки  $\sigma$  делит  $n - 1$ , то есть  $n = r\delta + 1$  для некоторого натурального  $r$ , то  $\delta$  делит также  $l - 1$ , так как из  $l = s(n - 1) + 1$  следует  $l = t\delta + 1$ , где  $t = sr$ . Поэтому, если в теореме 1.2 в качестве подстановки  $\sigma$  взять подстановку порядка  $\delta$ , то можно сформулировать следующую теорему.

**Теорема 1.4.** Пусть  $\langle A, \eta \rangle$  –  $n$ -арная полугруппа,  $\sigma$  – подстановка из  $S_k$  порядка  $\delta$ ,  $n = r\delta + 1$  для некоторого натурального  $r$ ,  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$  – произвольный элемент  $l$ -арной полугруппы  $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ ,

$$\alpha_j = a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{\delta-1}(j)}, j = 1, \dots, k.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^{[v]} &= \mathbf{a}, \text{ если } v = 0, \\ \mathbf{a}^{[v]} &= (\eta(\underbrace{a_1 \alpha_1 a_1 \dots \alpha_1 a_1}_{sv}), \dots, \eta(\underbrace{a_k \alpha_k a_k \dots \alpha_k a_k}_{sv})) = \\ &= (\eta(\underbrace{a_1 \alpha_1 \dots a_1 \alpha_1}_{sv} a_1), \dots, \eta(\underbrace{a_k \alpha_k \dots a_k \alpha_k}_{sv} a_k)), \text{ если } v > 0. \end{aligned}$$

**Замечание 1.4.** В теоремах 1.1–1.4 случай  $v = 0$  можно считать содержащимся в формулах для случая  $v > 0$ , если считать  $\eta(a) = a$  для любого  $a \in A$ . Будем иметь это в виду при формулировке следующего и других подобных результатов.

## 2. Случай цикла (12 ... d)

Следующая теорема получается из теоремы 1.2, если в ней  $\sigma$  – цикл (12 ... d).

**Теорема 2.1.** Пусть  $\langle A, \eta \rangle$  –  $n$ -арная полугруппа,  $d \leq k$ ,  $l = td + 1$  для некоторого натурального  $t$ ,  $v \geq 0$ ,  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$  – произвольный элемент  $l$ -арной полугруппы  $\langle A^k, \eta_{s, (12 \dots d), k} \rangle$ ,

$$\alpha_j = a_{j+1} \dots a_d a_1 \dots a_{j-1}, j = 1, \dots, d. \quad (2.1)$$

Тогда  $\mathbf{a}^{[v]} = (b_1, \dots, b_k)$ , где

$$b_j = \eta(\underbrace{a_j \alpha_j a_j \dots \alpha_j a_j}_{iv}) = \eta(\underbrace{a_j \alpha_j \dots a_j \alpha_j}_{iv} a_j), j = 1, \dots, d, \quad (2.2)$$

$$b_{d+1} = a_{d+1}^{[sv]}, \dots, b_k = a_k^{[sv]}. \quad (2.3)$$

**Доказательство.** Если  $v = 0$ , то последовательности

$$\underbrace{\alpha_j a_j \dots \alpha_j a_j}_{iv}, \underbrace{a_j \alpha_j \dots a_j \alpha_j}_{iv}$$

– пустые, а равенства (2.2) и (2.3) принимают вид

$$b_1 = a_1, \dots, b_k = a_k.$$

Следовательно, для нулевой степени  $\mathbf{a}^{[0]}$  теорема верна.

Если  $\sigma$  – цикл (12 ... d), то

$$\sigma(j) = j + 1,$$

$$\sigma^2(j) = \sigma(\sigma(j)) = \sigma(j + 1) = j + 2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\sigma^{d-j}(j) = \sigma(\sigma^{d-1-j}(j)) = \sigma(d - 1) = d,$$

$$\sigma^{d+1-j}(j) = \sigma(\sigma^{d-j}(j)) = \sigma(d) = 1,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\sigma^{d-1}(j) = \sigma(\sigma^{d-2}(j)) = \sigma(j - 2) = j - 1,$$

$$\sigma^d(j) = \sigma(\sigma^{d-1}(j)) = \sigma(j - 1) = j.$$

Поэтому для  $j = 1, \dots, d$  последовательности  $\alpha_j$  из теоремы 1.2, определяемые равенствами (1.3), принимают вид (2.1). Таким образом, компоненты  $b_1, \dots, b_d$  определяются равенством (2.2).

Для компонент  $b_{d+1}, \dots, b_k$  применяется предложение 1.1. Теорема доказана.

**Замечание 2.1.** Выпишем все компоненты  $b_j$  степени  $\mathbf{a}^{[sv]}$  из теоремы 2.1.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}^{[sv]} &= (b_1 = \eta(\underbrace{a_1 a_2 \dots a_d a_1 \dots a_2 \dots a_d a_1}_{iv})), \\
 b_2 &= \eta(\underbrace{a_2 a_3 \dots a_d a_1 a_2 \dots a_3 \dots a_d a_1 a_2}_{iv}), \\
 b_3 &= \eta(\underbrace{a_3 a_4 \dots a_d a_1 a_2 a_3 \dots a_4 \dots a_d a_1 a_2 a_3}_{iv}), \\
 &\dots\dots\dots \\
 b_{d-1} &= \eta(\underbrace{a_{d-1} a_d a_1 \dots a_{d-2} a_{d-1} \dots a_d a_1 \dots a_{d-2} a_{d-1}}_{iv}), \\
 b_d &= \eta(\underbrace{a_d a_1 \dots a_{d-1} a_d \dots a_1 \dots a_{d-1} a_d}_{iv}), \\
 b_{d+1} &= a_{d+1}^{[sv]}, \dots, b_k = a_k^{[sv]} = \\
 &= (b_1 = \eta(\underbrace{a_1 a_2 \dots a_d \dots a_1 a_2 \dots a_d a_1}_{iv})), \\
 b_2 &= \eta(\underbrace{a_2 a_3 \dots a_d a_1 \dots a_2 a_3 \dots a_d a_1 a_2}_{iv}), \\
 b_3 &= \eta(\underbrace{a_3 a_4 \dots a_d a_1 a_2 \dots a_3 a_4 \dots a_d a_1 a_2 a_3}_{iv}), \\
 &\dots\dots\dots \\
 b_{d-1} &= \eta(\underbrace{a_{d-1} a_d a_1 \dots a_{d-2} \dots a_{d-1} a_d a_1 \dots a_{d-2} a_{d-1}}_{iv}), \\
 b_d &= \eta(\underbrace{a_d a_1 \dots a_{d-1} \dots a_d a_1 \dots a_{d-1} a_d}_{iv}), \\
 b_{d+1} &= a_{d+1}^{[sv]}, \dots, b_k = a_k^{[sv]}.
 \end{aligned}$$

Если порядок  $d$  цикла ( $12 \dots d$ ) делит  $n - 1$ , то теорема 2.1 позволяет сформулировать ещё одну теорему.

**Теорема 2.2.** Пусть  $\langle A, \eta \rangle$  –  $n$ -арная полугруппа,  $d \leq k$ ,  $n = rd + 1$  для некоторого натурального  $r$ ,  $v \geq 0$ ,  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$  – произвольный элемент  $l$ -арной полугруппы  $\langle A^k, \eta_{s, (12 \dots d), k} \rangle$ ,

$$\alpha_j = a_{j+1} \dots a_d a_1 \dots a_{j-1}, j = 1, \dots, d.$$

Тогда  $\mathbf{a}^{[sv]} = (b_1, \dots, b_k)$ , где

$$b_j = \eta(\underbrace{\eta(a_j \alpha_j a_j \dots \alpha_j a_j)}_{sv}) = \eta(\underbrace{a_j \alpha_j \dots a_j \alpha_j a_j}_{sv}),$$

$$b_{d+1} = a_{d+1}^{[sv]}, \dots, b_k = a_k^{[sv]}.$$

Следующие две теоремы получаются из теорем 2.1 и 2.2, если в них положить  $d = k$ .

**Теорема 2.3.** Пусть  $\langle A, \eta \rangle$  –  $n$ -арная полугруппа,  $l = tk + 1$  для некоторого натурального  $t, v \geq 0$ ,  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$  – произвольный элемент  $l$ -арной полугруппы  $\langle A^k, \eta_{s, (12 \dots k), k} \rangle$ . Тогда

$$\mathbf{a}^{[v]} = (b_1 = \eta(\underbrace{a_1 a_2 \dots a_k a_1 \dots a_2 \dots a_k a_1}_{tv})),$$

$$b_2 = \eta(\underbrace{a_2 a_3 \dots a_k a_1 a_2 \dots a_3 \dots a_k a_1 a_2}_{tv}),$$

$$b_3 = \eta(\underbrace{a_3 a_4 \dots a_k a_1 a_2 a_3 \dots a_4 \dots a_k a_1 a_2 a_3}_{tv}),$$

.....

$$b_{k-1} = \eta(\underbrace{a_{k-1} a_k a_1 \dots a_{k-2} a_{k-1} \dots a_k a_1 \dots a_{k-2} a_{k-1}}_{tv}),$$

$$b_k = \eta(\underbrace{a_k a_1 \dots a_{k-1} a_k \dots a_1 \dots a_{k-1} a_k}_{tv}) =$$

$$= (b_1 = \eta(\underbrace{a_1 a_2 \dots a_k \dots a_1 a_2 \dots a_k a_1}_{tv})),$$

$$b_2 = \eta(\underbrace{a_2 a_3 \dots a_k a_1 \dots a_2 a_3 \dots a_k a_1 a_2}_{tv}),$$

$$b_3 = \eta(\underbrace{a_3 a_4 \dots a_k a_1 a_2 \dots a_3 a_4 \dots a_k a_1 a_2 a_3}_{tv}),$$

.....

$$b_{k-1} = \eta(\underbrace{a_{k-1} a_k a_1 \dots a_{k-2} \dots a_{k-1} a_k a_1 \dots a_{k-2} a_{k-1}}_{tv}),$$

$$b_k = \eta(\underbrace{a_k a_1 \dots a_{k-1} \dots a_k a_1 \dots a_{k-1} a_k}_{tv}).$$

**Теорема 2.4.** Пусть  $\langle A, \eta \rangle$  –  $n$ -арная полугруппа,  $n = rk + 1$  для некоторого натурального  $r, v \geq 0$ ,  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$  – произвольный элемент  $l$ -арной полугруппы  $\langle A^k, \eta_{s, (12 \dots k), k} \rangle$ . Тогда

$$\mathbf{a}^{[v]} = (b_1 = \eta(\underbrace{a_1 a_2 \dots a_k a_1 \dots a_2 \dots a_k a_1}_{sv})),$$

$$b_2 = \eta(\underbrace{a_2 a_3 \dots a_k a_1 a_2 \dots a_3 \dots a_k a_1 a_2}_{sv}),$$



$$b_3 = \eta(\underbrace{a_3 a_4 \dots a_k a_1 a_2 a_3 \dots a_4 \dots a_k a_1 a_2 a_3}_{sv}),$$

$$\dots$$

$$b_{k-1} = \eta(\underbrace{a_{k-1} a_k a_1 \dots a_{k-2} a_{k-1} \dots a_k a_1 \dots a_{k-2} a_{k-1}}_{sv}),$$

$$b_k = \eta(\underbrace{a_k a_1 \dots a_{k-1} a_k \dots a_1 \dots a_{k-1} a_k}_{sv}) =$$

$$= (b_1 = \eta(\underbrace{a_1 a_2 \dots a_k \dots a_1 a_2 \dots a_k a_1}_{sv})),$$

$$b_2 = \eta(\underbrace{a_2 a_3 \dots a_k a_1 \dots a_2 a_3 \dots a_k a_1 a_2}_{sv}),$$

$$b_3 = \eta(\underbrace{a_3 a_4 \dots a_k a_1 a_2 \dots a_3 a_4 \dots a_k a_1 a_2 a_3}_{sv}),$$

$$\dots$$

$$b_{k-1} = \eta(\underbrace{a_{k-1} a_k a_1 \dots a_{k-2} \dots a_{k-1} a_k a_1 \dots a_{k-2} a_{k-1}}_{sv}),$$

$$b_k = \eta(\underbrace{a_k a_1 \dots a_{k-1} \dots a_k a_1 \dots a_{k-1} a_k}_{sv}).$$

Следующая теорема получается из теоремы 2.3, если в ней положить  $k = n - 1$ .

**Теорема 2.5.** Пусть  $\langle A, \eta \rangle$  –  $n$ -арная полугруппа,  $v \geq 0$ ,  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{n-1})$  – произвольный элемент  $l$ -арной полугруппы  $\langle A^{n-1}, \eta_{s, (12 \dots n-1), n-1} \rangle$ . Тогда

$$\mathbf{a}^{[v]} = (b_1 = \eta(\underbrace{a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_1 \dots a_2 \dots a_{n-1} a_1}_{sv})),$$

$$b_2 = \eta(\underbrace{a_2 a_3 \dots a_{n-1} a_1 a_2 \dots a_3 \dots a_{n-1} a_1 a_2}_{sv}),$$

$$b_3 = \eta(\underbrace{a_3 a_4 \dots a_{n-1} a_1 a_2 a_3 \dots a_4 \dots a_{n-1} a_1 a_2 a_3}_{sv}),$$

$$\dots$$

$$b_{n-2} = \eta(\underbrace{a_{n-2} a_{n-1} a_1 \dots a_{n-3} a_{n-2} \dots a_{n-1} a_1 \dots a_{n-3} a_{n-2}}_{sv}),$$

$$b_{n-1} = \eta(\underbrace{a_{n-1} a_1 \dots a_{n-2} a_{n-1} \dots a_1 \dots a_{n-2} a_{n-1}}_{sv}) =$$

$$= (b_1 = \eta(\underbrace{a_1 a_2 \dots a_{n-1} \dots a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_1}_{sv})),$$

$$b_2 = \eta(\underbrace{a_2 a_3 \dots a_{n-1} a_1 \dots a_2 a_3 \dots a_{n-1} a_1 a_2}_{sv}),$$

$$b_3 = \eta(\underbrace{a_3 a_4 \dots a_{n-1} a_1 a_2 \dots a_3 a_4 \dots a_{n-1} a_1 a_2 a_3}_{sv}),$$

.....

Электронный архив библиотеки имени А. А. Кулешова

$$b_{n-2} = \eta(\underbrace{a_{n-2}a_{n-1}a_1 \dots a_{n-3} \dots a_{n-2}a_{n-1}a_1 \dots a_{n-3}a_{n-2}}_{sv}),$$

$$b_{n-1} = \eta(\underbrace{a_{n-1}a_1 \dots a_{n-2} \dots a_{n-1}a_1 \dots a_{n-2}a_{n-1}}_{sv}).$$

Следующая теорема получается из теоремы 2.3, если в ней положить  $k = l - 1$ .

**Теорема 2.6.** Пусть  $\langle A, \eta \rangle$  –  $n$ -арная полугруппа,  $v \geq 0$ ,  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{l-1})$  – произвольный элемент  $l$ -арной полугруппы  $\langle A^{l-1}, \eta_{1, (12 \dots l-1), l-1} \rangle$ . Тогда

$$\mathbf{a}^{[v]} = (b_1 = \eta(\underbrace{a_1a_2 \dots a_{l-1}a_1 \dots a_2 \dots a_{l-1}a_1}_{v})),$$

$$b_2 = \eta(\underbrace{a_2a_3 \dots a_{l-1}a_1a_2 \dots a_3 \dots a_{l-1}a_1a_2}_{v}),$$

$$b_3 = \eta(\underbrace{a_3a_4 \dots a_{l-1}a_1a_2a_3 \dots a_4 \dots a_{l-1}a_1a_2a_3}_{v}),$$

$$\dots$$

$$b_{l-2} = \eta(\underbrace{a_{l-2}a_{l-1}a_1 \dots a_{l-3}a_{l-2} \dots a_{l-1}a_1 \dots a_{l-3}a_{l-2}}_{v}),$$

$$b_{l-1} = \eta(\underbrace{a_{l-1}a_1 \dots a_{l-2}a_{l-1} \dots a_1 \dots a_{l-2}a_{l-1}}_{v}) =$$

$$= (b_1 = \eta(\underbrace{a_1a_2 \dots a_{l-1} \dots a_1a_2 \dots a_{l-1}a_1}_{v})),$$

$$b_2 = \eta(\underbrace{a_2a_3 \dots a_{l-1}a_1 \dots a_2a_3 \dots a_{l-1}a_1a_2}_{v}),$$

$$b_3 = \eta(\underbrace{a_3a_4 \dots a_{l-1}a_1a_2 \dots a_3a_4 \dots a_{l-1}a_1a_2a_3}_{v}),$$

$$\dots$$

$$b_{l-2} = \eta(\underbrace{a_{l-2}a_{l-1}a_1 \dots a_{l-3} \dots a_{l-2}a_{l-1}a_1 \dots a_{l-3}a_{l-2}}_{v}),$$

$$b_{l-1} = \eta(\underbrace{a_{l-1}a_1 \dots a_{l-2} \dots a_{l-1}a_1 \dots a_{l-2}a_{l-1}}_{v}).$$

### 3. Следствия для $d = 2$

Полагая в теореме 1.2  $d = 2$ , получим

**Следствие 3.1.** Пусть  $\langle A, \eta \rangle$  –  $n$ -арная полугруппа,  $\sigma$  – подстановка из  $S_k$  порядка 2,  $l = 2t + 1$  для некоторого натурального  $t$ ,  $v \geq 0$ ,  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$  – произвольный элемент  $l$ -арной полугруппы  $\langle A^k, \eta_{\sigma, \sigma, k} \rangle$ . Тогда

$$\mathbf{a}^{[v]} = (\eta(\underbrace{a_1a_{\sigma(1)}a_1 \dots a_{\sigma(1)}a_1}_{iv}), \dots, \eta(\underbrace{a_k a_{\sigma(k)} a_k \dots a_{\sigma(k)} a_k}_{iv})) =$$

$$= (\eta(\underbrace{a_1a_{\sigma(1)} \dots a_1a_{\sigma(1)}a_1}_{iv}), \dots, \eta(\underbrace{a_k a_{\sigma(k)} \dots a_k a_{\sigma(k)} a_k}_{iv})).$$

Полагая а теореме 1.4  $\delta = 2$ , получим

**Следствие 3.2.** Пусть  $\langle A, \eta \rangle$  –  $n$ -арная полугруппа,  $\sigma$  – подстановка из  $S_k$  порядка 2,  $n = 2r + 1$  для некоторого натурального  $r$ ,  $v \geq 0$ ,  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$  – произвольный элемент  $l$ -арной полугруппы  $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ . Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^{[v]} &= (\eta(\underbrace{a_1 a_{\sigma(1)} a_1 \dots a_{\sigma(1)} a_1}_{sv}), \dots, \eta(\underbrace{a_k a_{\sigma(k)} a_k \dots a_{\sigma(k)} a_k}_{sv})) = \\ &= (\eta(\underbrace{a_1 a_{\sigma(1)} \dots a_1 a_{\sigma(1)} a_1}_{sv}), \dots, \eta(\underbrace{a_k a_{\sigma(k)} \dots a_k a_{\sigma(k)} a_k}_{sv})). \end{aligned}$$

Полагая в следствиях 3.1 и 2.2  $\sigma = (ij)$  – транспозиция из  $S_k$ , получим

**Следствие 3.3.** Пусть  $\langle A, \eta \rangle$  –  $n$ -арная полугруппа,  $l = 2t + 1$  для некоторого натурального  $t$ ,  $v \geq 0$ ,  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$  – произвольный элемент  $l$ -арной полугруппы  $\langle A^k, \eta_{s, (ij), k} \rangle$ . Тогда  $\mathbf{a}^{[v]} = (b_1, \dots, b_k)$ , где

$$\begin{aligned} b_i &= \eta(\underbrace{a_i a_j a_i \dots a_j a_i}_{iv}) = \eta(\underbrace{a_i a_j \dots a_i a_j a_i}_{iv}), \\ b_j &= \eta(\underbrace{a_j a_i a_j \dots a_i a_j}_{iv}) = \eta(\underbrace{a_j a_i \dots a_j a_i a_j}_{iv}), \\ b_m &= a_m^{[sv]}, m \neq i, m \neq j. \end{aligned}$$

**Следствие 3.4.** Пусть  $\langle A, \eta \rangle$  –  $n$ -арная полугруппа,  $n = 2r + 1$  для некоторого натурального  $r$ ,  $v \geq 0$ ,  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$  – произвольный элемент  $l$ -арной полугруппы  $\langle A^k, \eta_{s, (ij), k} \rangle$ . Тогда

$$\begin{aligned} b_i &= \eta(\underbrace{a_i a_j a_i \dots a_j a_i}_{sv}) = \eta(\underbrace{a_i a_j \dots a_i a_j a_i}_{sv}), \\ b_j &= \eta(\underbrace{a_j a_i a_j \dots a_i a_j}_{sv}) = \eta(\underbrace{a_j a_i \dots a_j a_i a_j}_{sv}), \\ b_m &= a_m^{[sv]}, m \neq i, m \neq j. \end{aligned}$$

Полагая а теореме 2.1  $d = 2$ , получим

**Следствие 3.5.** Пусть  $\langle A, \eta \rangle$  –  $n$ -арная полугруппа,  $l = 2t + 1$  для некоторого натурального  $t$ ,  $v \geq 0$ ,  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$  – произвольный элемент  $l$ -арной полугруппы  $\langle A^k, \eta_{s, (12), k} \rangle$ . Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^{[v]} &= (b_1 = \eta(\underbrace{a_1 a_2 a_1 \dots a_2 a_1}_{iv}) = \eta(\underbrace{a_1 a_2 \dots a_1 a_2 a_1}_{iv}), \\ b_2 &= \eta(\underbrace{a_2 a_1 a_2 \dots a_1 a_2}_{iv}) = \eta(\underbrace{a_2 a_1 \dots a_2 a_1 a_2}_{iv}), \\ b_3 &= a_3^{[sv]}, \dots, b_k = a_k^{[sv]}). \end{aligned}$$

Полагая а теореме 2.2  $d = 2$ , получим

**Следствие 3.6.** Пусть  $\langle A, \eta \rangle$  –  $n$ -арная полугруппа,  $n = 2r + 1$  для некоторого натурального  $r$ ,  $v \geq 0$ ,  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$  – произвольный элемент  $l$ -арной полугруппы  $\langle A^k, \eta_{s, (12), k} \rangle$ . Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^{[v]} &= (b_1 = \eta(\underbrace{a_1 a_2 a_1 \dots a_2 a_1}_{srv}) = \eta(\underbrace{a_1 a_2 \dots a_1 a_2 a_1}_{srv}), \\ b_2 &= \eta(\underbrace{a_2 a_1 a_2 \dots a_1 a_2}_{srv}) = \eta(\underbrace{a_2 a_1 \dots a_2 a_1 a_2}_{srv}), \\ b_3 &= a_3^{[sv]}, \dots, b_k = a_k^{[sv]}). \end{aligned}$$

Полагая а теореме 2.3 или в следствии 3.5  $k = 2$ , получим

**Следствие 3.7.** Пусть  $\langle A, \eta \rangle$  –  $n$ -арная полугруппа,  $l = 2t + 1$  для некоторого натурального  $t$ ,  $v \geq 0$ ,  $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$  – произвольный элемент  $l$ -арной полугруппы  $\langle A^2, \eta_{s, (12), 2} \rangle$ . Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^{[v]} &= (b_1 = \eta(\underbrace{a_1 a_2 a_1 \dots a_2 a_1}_{iv}) = \eta(\underbrace{a_1 a_2 \dots a_1 a_2 a_1}_{iv}), \\ b_2 &= \eta(\underbrace{a_2 a_1 a_2 \dots a_1 a_2}_{iv}) = \eta(\underbrace{a_2 a_1 \dots a_2 a_1 a_2}_{iv})). \end{aligned}$$

Полагая а теореме 2.4 или в следствии 3.6  $k = 2$ , получим

**Следствие 3.8.** Пусть  $\langle A, \eta \rangle$  –  $n$ -арная полугруппа,  $n = 2r + 1$  для некоторого натурального  $r$ ,  $v \geq 0$ ,  $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$  – произвольный элемент  $l$ -арной полугруппы  $\langle A^2, \eta_{s, (12), 2} \rangle$ . Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^{[v]} &= (b_1 = \eta(\underbrace{a_1 a_2 a_1 \dots a_2 a_1}_{srv}) = \eta(\underbrace{a_1 a_2 \dots a_1 a_2 a_1}_{srv}), \\ b_2 &= \eta(\underbrace{a_2 a_1 a_2 \dots a_1 a_2}_{srv}) = \eta(\underbrace{a_2 a_1 \dots a_2 a_1 a_2}_{srv})). \end{aligned}$$

#### 4. Следствия для $n = 2$

Сформулируем несколько следствий для  $n = 2$ .

Если в теореме 1.1 и предложении 1.1 положить  $n = 2$ , то получим

**Следствие 4.1.** Пусть  $A$  – полугруппа, подстановка  $\sigma \in \mathbf{S}_k$  удовлетворяет условию  $\sigma^{s+1} = \sigma$ ,  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$  – произвольный элемент  $(s + 1)$ -арной полугруппы  $\langle A^k, [ ]_{s+1, \sigma, k} \rangle$ ,

$$\alpha_j = a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{s-1}(j)}, j = 1, \dots, k.$$

Тогда  $v$ -ая  $(s + 1)$ -адическая степень  $\mathbf{a}^{[v]}$  элемента  $\mathbf{a}$  имеет вид  $(b_1, \dots, b_k)$ , где

$$b_j = a_j, \text{ если } v = 0,$$

$$b_j = a_j(\alpha_j a_j)^v = (a_j \alpha_j)^v a_j, \text{ если } v > 0,$$

то есть

$$\mathbf{a}^{[v]} = \mathbf{a}, \text{ если } v = 0,$$

$$\mathbf{a}^{[v]} = (a_1(\alpha_1 a_1)^v = (a_1 \alpha_1)^v a_1, \dots, a_k(\alpha_k a_k)^v = (a_k \alpha_k)^v a_k), \text{ если } v > 0.$$

Если подстановка  $\sigma$  оставляет неподвижным символ  $m$ , то

$$b_m = a_m^{sv+1}.$$

Если в теореме 1.2 и предложении 1.1 положить  $n = 2$ , то получим

**Следствие 4.2.** Пусть  $A$  – полугруппа, порядок подстановки  $\sigma$  из  $S_k$  делит натуральное  $d$ ,  $s = td$  для некоторого натурального  $t$ ,  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$  – произвольный элемент  $(s + 1)$ -арной полугруппы  $\langle A^k, [ ]_{s+1, \sigma, k} \rangle$ ,

$$\alpha_j = a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{d-1}(j)}, j = 1, \dots, k.$$

Тогда  $v$ -ая  $(s + 1)$ -адическая степень  $\mathbf{a}^{[v]}$  элемента  $\mathbf{a}$  имеет вид  $(b_1, \dots, b_k)$ , где

$$b_j = a_j, \text{ если } v = 0,$$

$$b_j = a_j(\alpha_j a_j)^{tv} = (a_j \alpha_j)^{tv} a_j, \text{ если } v > 0,$$

то есть

$$\mathbf{a}^{[v]} = \mathbf{a}, \text{ если } v = 0,$$

$$\mathbf{a}^{[v]} = (a_1(\alpha_1 a_1)^{tv}, \dots, a_k(\alpha_k a_k)^{tv}) = (a_k \alpha_k)^{tv} a_k, \text{ если } v > 0.$$

Если подстановка  $\sigma$  оставляет неподвижным символ  $m$ , то

$$b_m = a_m^{sv+1} = a_m^{tdv+1}.$$

Если в предложении 1.2 положить  $n = 2$ , то получим

**Следствие 4.3.** Пусть  $A$  – полугруппа,  $\sigma$  – тождественная подстановка из  $S_k$ ,  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$  – произвольный элемент  $(s + 1)$ -арной полугруппы  $\langle A^k, [ ]_{s+1, \sigma, k} \rangle$ . Тогда для любого  $v \geq 0$  верно равенство

$$\mathbf{a}^{[v]} = (a_1^{sv+1}, \dots, a_k^{sv+1}).$$

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Post, E. L. Polyadic groups / E. L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
2. Гальмак, А. М. О полиадических операциях на декартовых степенях / А. М. Гальмак, А. Д. Русаков // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2014. – № 3. – С. 35–40.
3. Гальмак, А. М. Об ассоциативности полиадических операций / А. М. Гальмак // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. – 2017. – № 1. – С. 4–11.

Поступила в редакцию 27.12.2023 г.

Контакты: halm54@mail.ru (Гальмак Александр Михайлович).

#### **Galmak A. M. SKEW ELEMENTS IN $l$ -ARY GROUPS OF SPECIAL FORM**

The article deals with powers in polyadic semigroups of a special form, i.e. in polyadic semigroups with the  $l$ -ary operation  $\eta_{s, \sigma, k}$  that is called a polyadic operation of a special form and is defined on the Cartesian power of  $A^k$   $n$ -ary semigroup  $\langle A, \eta \rangle$  by the substitution  $\sigma \in S_k$  and the  $n$ -ary operation  $\eta$ .

**Keywords:** polyadic operation,  $n$ -ary semigroup, power.