«ПИФАГОРОВЫ ТРОЙКИ» И ТЕОРЕМА ФЕРМА: УГЛУБЛЕНИЕ ЗНАНИЙ СТАРШЕКЛАССНИКОВ О СВОЙСТВАХ СТЕПЕНЕЙ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

Аннотация. В статье обсуждаются вопросы историзма при обучении математике в средней школе на примере углубления знаний старшеклассников по теме «Свойства степеней целых чисел».

Ключевые слова: историзм в обучении математике, «пифагоровы тройки», теорема Ферма, степень целого числа

Усвоение свойств степеней целых чисел не представляет трудностей для учащихся средней и старшей школы в силу простоты их записи, наглядности и несложной процедуры доказательства. Даже интуитивно может быть понятно, почему для любых целых m и n , а также рациональных величин $a \neq 0$ и $b \neq 0$ справедливы следующие равенства.

$$1) a^{-n} = \frac{1}{a^n}; 2) a^n \cdot a^m = a^{n+m}; 3) \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m};$$
$$4) (a^m)^n = a^{mn}; 5) (ab)^n = a^n \cdot b^n; 6) \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Однако не всем учащимся удается правильно и рационально использовать эти свойства при решении нетривиальных алгебраических задач для углубления знаний по данной теме.

Отчасти это происходит потому, что большинству интересных задач, сохранившихся в истории развития математики, немало лет, и учащимся просто негде с ними встретиться: к сожалению, почти никто из учителей математики не привлекает внимание учащихся к задачам, «отобраным» веками и десятилетиями. Подобный подход к обучению математике, называемый историзмом, для современных школьников сводится, в основном, к упоминанию имен ученых-математиков в связи с введенными ими понятиями, причем часто лишь в виде занимательных иллюстраций или названий теорем и правил. Тогда как «Элементы историзма должны стать основой для постановки перед учащимися проблем изучения основных разделов программы, способом ознакомления их с методологической стороной изучаемых вопросов» (цит. по [1, с. 73]).

Изучение темы «Свойства степеней целых чисел» может быть расширено, по крайней мере, путем знакомства учащихся с двумя задачами, над решением которых размышляют ученые с момента их появления: так называемые «пифагоровы тройки» и Великая теорема Ферма.

«Пифагоровы тройки» – это тройки натуральных чисел, удовлетворяющих теореме Пифагора, то есть уравнению $x^2 + y^2 = z^2$. Пифагоровыми они названы потому, что являются сторонами прямоугольного треугольника с катетами x , y и гипотенузой z . Нахождение «пифагоровых троек» является замечательной развивающей логической задачей, с помощью которой учащиеся осваивают способы аналитической записи последовательности натуральных чисел, удовлетворяющих теореме Пифагора.

На *первом этапе* учащимся дается задание выявить закономерность в вычислении «пифагоровых троек», если известен их бесконечный ряд: (4, 3, 5); (6, 8, 10); (8, 15, 17); (10, 24, 26); (12, 35, 37) и т. д. Решением задачи являются формулы

$$x_n = x_{n-1} + 2, y_n = y_{n-1} + x_{n-1} + 1, z_n = y_n + 2 = y_{n-1} + x_{n-1} + 3.$$

Второй этап: доказательство правильности формул для вычисления «пифагоровых троек» с чётным x : $y = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1$ и $z = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1$.

На *третьем этапе* задача усложняется: необходимо воспользоваться формулами из второго этапа, выбрав в качестве x неправильную рациональную дробь. Например, $x = \frac{11}{7}$, $y = \frac{\left(\frac{11}{7}\right)^2 - 1}{2} = \frac{72}{98}$, $z = \frac{\left(\frac{11}{7}\right)^2 + 1}{2} = \frac{170}{98}$. И, далее, определить, какие из полученных чисел составят «пифагорову тройку». Ответ – числители трёх полученных дробей с равными знаменателями ($x = \frac{11}{7} = \frac{154}{98}$): (154, 72, 170).

Великая теорема Ферма, сформулированная выдающимся французским математиком Пьером Ферма в 1637 г., утверждает, что уравнение вида $x^n + y^n = z^n$ не имеет положительных целочисленных решений x, y, z при целых $n > 2$. Очевидно, что при $n = 2$ уравнение имеет бесконечно множество решений, рассмотренных выше и называемых «пифагоровыми тройками».

Теорема Ферма была доказана в разное время разными учеными (Л. Эйлером, самим П. Ферма и П. Дирихле) лишь для нескольких частных случаев $n = 3, 4, 5$ и 14 [2, с. 80–81]. Однако на протяжении почти четырехсот лет **общий вид** непротиворечивого доказательства научный мир так и не представил, хотя отдельные попытки неоднократно принимались одними учеными и опровергались другими.

Некоторые из этих доказательств весьма сложные. Например, доказательство профессора математики Принстонского университета Эндру Уайлса, обнародованное в 1994 году, было основано на теории эллиптических кривых и заняло около 200 страниц. Его опровержение опубликовал Ю.А. Ивлиев в [3]. Еще одно сложное доказательство, приведенное студентом Белорусского национального технического университета А.С. Лещинским в 2005 г. [4], пока никем не опровергнуто.

Нам удалось найти довольно простое доказательство, предложенное В.Н. Строгановым [5], которое, на первый взгляд, не содержит противоречий. Именно эти рассуждения можно рассмотреть со старшеклассниками, изучающими математику на продвинутом уровне. Им предлагается осуществить экспертизу следующего доказательства.

Если в уравнении $x^n + y^n = z^n$ представить показатель степени $n = f + 2$ и переписать его как $X^f \cdot x^2 + Y^f \cdot y^2 = Z^f \cdot z^2$, то, разделив обе части уравнения на Z^f , получим следующее уравнение

$$\left(\frac{X}{Z}\right)^f \cdot x^2 + \left(\frac{Y}{Z}\right)^f \cdot y^2 = z^2.$$

Очевидно, что в этом уравнении дробные коэффициенты в положительной степени f меньше 1, поскольку $Z > X$ и $Z > Y$. Именно дробный характер коэффициентов при x^2 и y^2 позволяет сделать вывод о том, что равенство, выраженное исходным уравнением, не может считаться справедливым.

В качестве подсказки для поиска противоречий в доказательстве (если они вообще есть!) можно предложить учащимся ответить на следующие вопросы:

- 1) Верно ли в доказательстве произведены действия со степенями?
- 2) Всегда ли из неизвестной величины, являющейся основанием степени, можно вычленить некий постоянный множитель в фиксиро-

ванной степени (коэффициент), не влияющий на результат решения задачи? Приведите примеры.

3) Не будет ли этот постоянный множитель сам содержать неизвестную величину, которую необходимо найти? Если «ДА», то не усложнит ли это и без того непростую задачу?

4) Применим ли подобный прием к решению других алгебраических уравнений с несколькими переменными в фиксированной степени? Приведите примеры.

5) Допустимо ли решать данную задачу машинным способом, то есть перебором возможных комбинаций для фиксированных значений $n > Z$?

Рассмотренные примеры, в которых используются свойства степеней целых чисел, наглядно демонстрируют учащимся, насколько сложные и противоречивые пути проходит математика в своем развитии и что с годами она становится только моложе, обогащаясь новыми методами решения задач, много лет назад поставленных историей.

Список использованной литературы

1. Фридман, Л. М. Теоретические основы методики обучения математике : учебное пособие / Л. М. Фридман. – Москва : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2019. – 248 с.
2. Кранц, С. Изменчивая природа математического доказательства. Доказать нельзя поверить / С. Кранц. – Москва : Лаборатория знаний, 2016. – 320 с.
3. Ивлиев, Ю. А. Ошибочное доказательство Уайлса Великой теоремы Ферма / Ю. А. Ивлиев // Фундаментальные исследования. – 2008. – № 3. – С. 13-16.
4. Лещинский, А. С. Полное доказательство Великой теоремы Ферма / А. С. Лещинский // Вестник БИТУ. – 2005. – № 4. – С. 57-61.
5. Строганов, В. Н. Об особенностях $N > 2$ степеней / В. Н. Строганов // Вопросы технических и физико-математических наук в свете современных исследований: сб. ст. по матер. LVIII междунар. науч.-практ. конф. – Новосибирск: СибАК, 2022. – № 12(49). – С. 77-81.