

ПРИЕМЫ ФОРМУЛИРОВАНИЯ ЗАДАНИЙ НА ВЫПОЛНЕНИЕ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ, АКЦЕНТИРУЮЩИХ СВЯЗЬ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ С ТРИГОНОМЕТРИЕЙ

Аннотация. Даны результаты анализа заданий на выполнение арифметических операций над комплексными числами из учебных пособий разных стран; описаны приемы формулирования таких заданий, актуализирующие материал по тригонометрии.

Ключевые слова: комплексные числа, тригонометрия, акцентирование связей, задания.

Знакомство учащихся старших классов с комплексными числами (далее – КЧ) дает возможность для переосмысления содержания многих тем курса математики. Но для школ Беларуси рассмотрение материала об этих числах не предусмотрено действующими учебными программами по математике, в отличие от программ семи стран постсоветского пространства: Азербайджан, Армения, Казахстан, Молдова, Россия, Туркменистан, Узбекистан. Результаты анализа особенностей изложения темы «КЧ» в современных учебных пособиях этих стран выявили противоречие между наличием теоретических возможностей установления связей материала о КЧ с разными темами, например тригонометрией, и отсутствием реализации этих связей через практические задания.

Анализ заданий на освоение арифметических операций над КЧ выявил почти полное отсутствие заданий с использованием геометрической интерпретации КЧ, которые значимы для снижения уровня формализма при изучении этих чисел. Именно поэтому в статье [1] предложены некоторые приемы геометризации заданий о действиях над КЧ. Исследуем подробнее проблему реализации связей материала о КЧ с тригонометрией при решении заданий. Тригонометрическая форма записи КЧ достаточно удобна при выполнении всех операций над КЧ, кроме сложения и вычитания. Еще в учебниках А.П. Киселева было отмечено: «Сложение и вычитание КЧ проще и удобнее производить, когда они даны в алгебраической форме. Совсем иначе обстоит дело с остальными четырьмя алгебраическими действиями» [2, с. 160]. Оценка «удобства» действий над КЧ в разных формах их записи не вошла в содержание современных учебных пособий, что отражается и в содержании условий соответствующих заданий.

По таблице видно, что такие операции над КЧ, как сложение и вычитание, во всех пособиях [3-7] предлагается выполнять только в алгебраической форме их записи, тогда как условия заданий на остальные 4 операции (умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня) в части учебных пособий формулируются и в тригонометрической форме записи КЧ. Правда в пособиях [3-4; 6] количество таких заданий (особенно на возведение КЧ в степень и извлечение корня из КЧ) незначительно по сравнению с численностью всех заданий на выполнение разных операций.

**Количественное распределение заданий на действия над КЧ
в современных учебных пособиях некоторых¹ постсоветских стран
в зависимости от формы записи² КЧ в их условиях**

Название арифметической операции над КЧ	$k_{\text{АФ}} / k_{\text{ТФ}}$ – число заданий с разными формами записи КЧ в учебных пособиях стран постсоветского пространства				
	Азербайджан [3]	Армения [4]	Молдова [5]	Туркменистан [6]	Узбекистан [7]
Сложение	5 / 0	16 / 0	3 / 0	21 / 0	8 / 0
Вычитание	4 / 0	1 / 0	2 / 0	16 / 0	6 / 0
Умножение	7 / 4	17 / 3	6 / 0	26 / 14	7 / 5
Деление	3 / 4	8 / 3	4 / 0	24 / 14	13 / 4
Возведение в степень	10 / 0	13 / 1	10 / 0	28 / 2	5 / 9
Извлечение корня	30 / 0	0 / 0	12 / 0	4 / 1	15 / 16
Комбинация операций	7 / 0	12 / 0	21 / 1	21 / 0	34 / 0
Всего	66 / 8	67 / 7	58 / 1	140 / 31	88 / 34

В части заданий учебных пособий [3-5] по теме «Действия над КЧ в тригонометрической форме» их условия содержат записи КЧ (компонентов действий) только в алгебраической форме. В соответствии с названием темы решение этих заданий обычно предполагает переход к тригонометрической форме записи КЧ, но это ведь не всегда необходимо.

Пример 1. «Вычислите: $(1 + i)^6$ » [4, с. 187].

Решить задание из примера 1 можно в алгебраической форме записи КЧ как минимум двумя способами (с помощью формулы бинома Ньютона или последовательным возведением КЧ $(1 + i)$ в степень: $((1 + i)^2)^3$. Для учащихся использование тригонометрии при решении

¹ Содержание пособий Казахстана и России анализировалось отдельно.

² $k_{\text{АФ}}$ – количество заданий, где КЧ записаны в алгебраической форме; $k_{\text{ТФ}}$ – количество заданий, где КЧ записаны в тригонометрической форме.

этого задания без специальных указаний не очевидна даже при заданном названии темы.

Связь материала о КЧ с тригонометрией может быть реализована активно и естественно тогда, когда текст условия и/или требования практического задания демонстрируют ее в явном виде. Очевидным приемом для формулирования условия такого задания на выполнение арифметической операции над КЧ является запись хотя бы одного из КЧ (компонента операции) в тригонометрической форме. Еще один прием связи с тригонометрией включает подбор для формулирования условия задания и последующего его решения некоторого тригонометрического тождества. Так, для задания из примера 2 на выполнение умножения КЧ было выбрано тождество

$$\operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg} a = \frac{\pi}{2}, \text{ где } a \in [-1; 1].$$

Пример 2. Выполните умножение КЧ z_1 и z_2 , если $z_1 = 4 + 3i$ и $z_2 = \cos\left(\operatorname{arctg} \frac{3}{4}\right) + \sin\left(\operatorname{arctg} \frac{3}{4}\right)i$.

Решение. Находим по алгебраической форме записи z_1 его модуль $r_1 = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ и аргумент $\operatorname{Arg}(z_1) = \operatorname{arctg} \frac{3}{4}$. Поскольку для z_2 имеем $r_2 = 1$ и $\operatorname{Arg}(z_2) = \operatorname{arctg} \frac{3}{4}$, а $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{arctg} \frac{3}{4} + \operatorname{arctg} \frac{3}{4} = \frac{\pi}{2}$, то по правилу нахождения произведения КЧ, записанных в тригонометрической форме, находим $z_1 z_2 = 5 \cdot 1 \left(\cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} i \right) = 5i$, ведь $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.

Явную связь с тригонометрией при решении задания на выполнение арифметической операции над КЧ обеспечивает и введение требования записать КЧ (результат операции) в тригонометрической форме.

Пример 3. Найдите сумму $z_3 + z_4$ и запишите полученное КЧ в его тригонометрической форме, если $z_3 = \cos 30^\circ + \sqrt{2} \sin 75^\circ i$ и $z_4 = -\frac{1}{2}$.

Наличие в задании требования к форме записи КЧ может облегчить поиск его решения, то есть выполнить отчасти эвристическую функцию. Так требование тригонометрической формы записи результата в задании из примера 1 могло бы упростить учащимся выбор рационального пути его решения. Аналогично, это требование в примере 3 может подсказать, что начать преобразование суммы КЧ z^3 и z^4 , заданных в алгебраической форме, можно с записи $z^4 = -\sin 30^\circ$, а завершить его через введение вспомогательного угла и применение формулы косинуса суммы.

Таким образом, при разработке задания на усвоение арифметической операции над КЧ, акцентирующей связь с тригонометрией, целесообразно применение следующих приемов: 1) записывать в триго-

нометрической форме хотя бы один компонент операции; 2) использовать изученное ранее тригонометрическое тождество в формулировке задания и для его решения; 3) требовать записи результата действия в тригонометрической форме.

Список использованной литературы

1. Миналто, В. С. Геометризация традиционных заданий о действиях над комплексными числами как средство снижения уровня формализма при их изучении / В. С. Миналто, Е. П. Кузнецова // Математика и математическое образование : проблемы, технологии, перспективы: материалы 42-го Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов, Смоленск, 12-14 окт. 2023 г. / СмолГУ. – Смоленск, 2023. – С. 306–309.
2. Киселёв, А. П. Алгебра. Часть II / А. П. Киселёв. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 248 с.
3. Гахраманова, Н. Математика : учебник / Н. Гахраманова, М. Керимов, И. Гесейнов. – Баку : Радиус, 2017. – 320 с.
4. Геворкян, Г. Г. Элементы алгебры и математического анализа : учебник / Г. Г. Геворкян, А. А. Саакян. – Ереван : Тигран Мец, 2009. – 208 с.
5. Математика : учебник / И. Акири [и др.]. – Кишинев : PrutInternational, 2020. – 304 с.
6. Алгебра и элементы математического анализа для 11 класса общеобразовательных школ / Т. Гельдиев [и др.]. – Ашхабад : Туркм. гос. издат. служба, 2014. – 232 с.
7. Математика : учеб. пособие : в 2 ч. / М. А. Мирзаахметов [и др.]. – Ташкент : Extremum Press, 2017. – Ч. 2. – 144 с.