УДК 517.85

А.В. Капусто, Н.В. Кепчик
г. Минск, Беларусь

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОБУЧЕНИИ МОДЕЛИРОВАНИЮ ПРОЦЕССОВ РАЗЛИЧНОГО ХАРАКТЕРА

Аннотация. В статье рассмотрены вопросы методики обучения моделированию систем управления в физико-химических, биологических и экологических процессах с применением модели Лотки – Вольтерра и ее модификаций.

Ключевые слова: модель Лотки-Вольтерра, математическое моделирование, дифференциальные уравнения.

Одними из основных разделов курса «Высшая математика» на любом факультете БГУ являются разделы «Дифференциальное и интегральное исчисления» и «Дифференциальные уравнения». Несмотря на то, что при изучении соответствующего учебного материала достаточное внимание уделяется приложениям основных понятий в получаемой специальности, у многих студентов все равно возникает вопрос: «Зачем это надо нам?».

Таким образом, кроме изучения основных понятий и методов теории дифференциального и интегрального исчислений и дифференциальных уравнений (ДУ), необходимо рассмотреть ряд задач, которые показывают возможности применения математического моделирования в решении прикладных задач, соответствующих выбранной студентом будущей профессиональной сфере деятельности. Именно моделирование является тем методом, который позволяет произвести замену изучения некоторого сложного объекта (явления, процесса) исследованием его модели, представляющей собой некоторое упрощение объекта исследования и в плане его структуры, и по сложности внутренних и внешних связей.

Построение любой математической модели с помощью ДУ можно разбить на следующие этапы:

1) представить постановку исходной задачи с помощью формализации математической моделью в виде ДУ;

2) определить тип полученного уравнения и выбрать соответствующий метод решения;

3) проинтегрировать ДУ и получить его общее решение;

4) найти частное решение, удовлетворяющее данным начальным условиям;

5) вычислить (по мере необходимости) значения вспомогательных параметров, используя дополнительные условия задачи;

6) найти общий закон рассматриваемого процесса и, если это требуется, численные значения искомых величин.

Первый этап является самым трудным, т.к. общих методов составления дифференциальных уравнений по прикладным задачам – нет. Именно поэтому, показывая студентам процесс построения математической модели и составления ДУ, преподаватель должен акцентировать внимание студентов на определенном перечне обязательных сопутствующих моментов: каким образом можно выбрать независимую переменную и искомую функцию; как выразить приращение функции, соответствующее заданному приращению аргумента, через величины, о которых идет речь в условии задачи; как получается отношение приращения функции к приращению аргумента; каким образом выполняется переход к пределу и получается ДУ. Составление уравнения, в зависимости от условия задачи, опирается на соответствующие законы физики, биологии, химии и др. В простейших случаях уравнение можно составить, воспользовавшись биологическим, химическим, механическим или геометрическим смыслами производной [1]. В этой связи качественная реализация первого этапа моделирования предполагает наличие у преподавателя и студентов соответствующих знаний из области возникновения задачи. Подчеркнем, что отличным методическим приемом, на наш взгляд, является демонстрация на одном и том же ДУ его соответствия процессам различного характера.

На наш взгляд, особое место среди известных и часто используемых в качестве примера при обучении моделированию на базе ДУ является модель Лотки-Вольтерра. С одной стороны, данная модель выступает базовой для создания модификаций, имеющих приложения в различных сферах деятельности человека, с другой стороны, она является активным методологическим средством при изложении студентам основ качественной теории дифференциальных уравнений.

Модель Лотки-Вольтерра описывается системой ДУ

$$\begin{cases} x'(t) = (a - by(t))x(t), \\ y'(t) = (-c + dx(t))y(t), \end{cases}$$

где $x(t)$ – численность популяции жертв, $y(t)$ – численность популяции хищников, a – скорость размножения жертв, b – вероятность того, что при встрече с хищником жертва будет съедена, c – скорость смертности хищников при отсутствии жертв, d – коэффициент прироста хищников за счет поедания жертв; $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$.

Заметим, что первоначальная модель этой задачи, предложенная американским ученым А. Дж. Лотка, описывала кинетику химических цепных реакций. Впоследствии появились, как дополнения и модификации модели, описывающие взаимодействие двух популяций с учетом внутривидовой конкуренции; закон конкурентного исключения, отношение мутуализма. Модель Лотки-Вольтерра имеет многоплановые методические возможности для обучения студентов математическому моделированию реальных процессов [2]. Модификации модели имеют приложения в различных сферах деятельности человека: математическая модель взаимодействия окружения с загрязняющей средой, математическая модель очистки сточных вод, математическая модель воздействия на растущую опухоль [3, с. 141–154], модель сотрудничества и конкуренции [4, с. 239].

С позиции качественной теории ДУ, на примере модели Лотки-Вольтера хорошо иллюстрируется введение общих понятий: фазовой плоскости, фазовых кривых, особых точек и их типов, а также порядка определения и анализа состояний равновесия для динамических систем первого порядка из двух ДУ. Точку равновесия системы сначала можно определить для общего вида системы ДУ, а затем – для конкретных наборов параметров. Привлечение программного обеспечения (в данном случае можно ограничиться доступным Microsoft Excel [5]) позволяет не только получить графическое представление кривых $x(t)$ и $y(t)$, но и построить фазовые траектории, отследить влияние изменения начальных данных и параметров модели на решения исходной задачи.

Заметим, что для повышения заинтересованности студентов в процессе изучения раздела ДУ можно использовать текстовые задачи прикладного содержания и, без непосредственного построения модели, предлагать решить соответствующее уравнение.

В заключение отметим, что организация познавательной деятельности студентов при обучении математическому моделированию на базе ДУ не должна заканчиваться на построении модели и решении соответствующего ДУ. Как обязательные элементы в деятельности студентов должны присутствовать проверка адекватности модели и формулировка выводов по полученным результатам.

Список использованной литературы

1. Кепчик, Н. В. О необходимости реализации концепции профессиональной направленности преподавания математики на биологическом факультете / Н. В. Кепчик // Реализация в вузах образовательных стандартов нового поколения: материалы науч.-практ.

конф., Новополоцк, 5–6 февраля 2008 г. / ПГУ. – Полоцк, 2008. – С. 198– 201.
2. Вакульчик, В. С. Прикладные и методические аспекты изучения дифференциальных уравнений студентами технических специальностей/ В. С. Вакульчик, А. В. Капусто, А. А. Вакульчик // Академический журнал Западной Сибири (Academic Journal of West Siberia). – 2014. – Т.10. – №6 (55). – С. 83–84.
3. Братусь, А. С. Динамические системы и модели биологии / А. С. Братусь, А. С. Новожилов, А. П. Платонов. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 400 с.
4. Плотинский, Ю. М. Теоретические и эмпирические модели социальных процессов: учеб. gособие / Ю. М. Плотинский. – Москва : Логос, 1988. – 279 с.
5. Вакульчик, В. С. К методике применения приложения Microsoft Excel при построении алгебраических и трансцендентных линий / В. С. Вакульчик, А. В. Капусто // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия Е. Педагогические науки. – 2014. – № 7. – С. 41–48.