УДК 378.016:517.3

КРУПНОБЛОЧНОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ ТЕМЫ «НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ»

Марченко Ирина Васильевна

заведующий кафедрой математики учреждения образования «Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова»; кандидат физико-математических наук
(г. Могилев, Беларусь)
marchenko@msu.by

Аннотация. В статье излагается опыт крупноблочного изложения темы «Несобственные интегралы», которое позволяет сэкономить время при сохранении содержания и общепринятых подходов к обучению математическому анализу. Сжатие учебного материала достигается за счет его структурирования в виде таблицы. Описанный подход способствует формированию познавательного интереса к дисциплине, поддержанию высокого уровня мыслительной активности у студентов на лекции.

Опыт автора в преподавании математического анализа позволяет сказать, что оптимальным является традиционный подход к его изучению, основанный на постепенном овладении его математическим аппаратом, демонстрации различных классических методов и приемов к доказательству теорем и решению задач. Тем не менее возникают обстоятельства, когда приходится отступать от него и использовать различные педагогические технологии с целью обеспечения качества учебного процесса.

Так у специальности 1-02 05 02 Физика и информатика на весь курс математического анализа отводится 40 часов лекций и 58 часов практических занятий. Естественно, что это приводит к огромной самостоятельной работе студентов, которая может быть эффективной только после соответствующих объяснений преподавателя. В связи с этим большинство тем рассматриваются очень обзорно, что плохо сказывается на понимании студентами многих фундаментальных понятий дисциплины. А для будущих физиков эти понятия являются инструментарием, необходимым в изучении специальных предметов физического цикла. Одним из подходов, позволяющих решить возникшие сложности, является технология крупноблочного изложения.

Ее использование в теме «Несобственные интегралы» основано на построении таблицы из двух столбцов, которая заполняется постепенно, по мере введения понятий, теорем, рассмотрения примеров и в зависимости от имеющегося у них сходства или отличий.

Перед заполнением таблицы, студентам сообщается, что несобственные интегралы (в таблице сокращаются НесИ) это отдельный вид интегралов, они делятся на два типа в соответствии с особенностями, которыми обладает подынтегральная функция:

- несобственные интегралы первого рода (НесИ-1) или несобственные интегралы по бесконечному промежутку;
- несобственные интегралы второго рода (НесИ-2) или несобственные интегралы от неограниченной функции.

Несмотря на указанные отличия в поведении подынтегральной функции, следует сразу обратить внимание на существующее сходство: в обоих случаях есть бесконечный промежуток. Для несобственного интеграла первого рода это промежуток изменения аргумента x, а для несобственного интеграла второго рода это промежуток изменения значения функции y. Далее, напоминая об этом сходстве, студентам будет легче увидеть аналогию при записи формул и формулировке теорем.

Понятия несобственных интегралов первого и второго рода вводятся поочередно по следующей схеме:

1) условия, которым удовлетворяет подынтегральная функция;
2) определение несобственного интеграла;
3) запись формулы, выражающей данное определение;
4) геометрическая иллюстрация понятия несобственного интеграла;
5) пример.

В качестве примеров берутся те интегралы, которые впоследствии используются при исследовании на сходимость с помощью теорем сравнения.

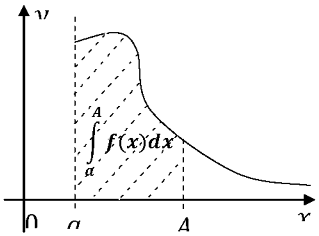
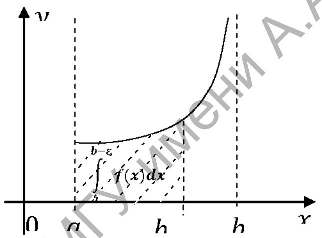
После этого формулируется теорема сравнения одновременно для обоих типов интегралов от неотрицательной подынтегральной функции. Вторая из рассматриваемых теорем – теорема сравнения в предельной форме дается поочередно. При этом для запоминания различий в условиях этой теоремы для каждого типа интегралов следует обратиться к примерам, с которыми связаны и эти условия, и их доказательство.

В конце приводится пример исследования на сходимость несобственного интеграла первого рода

$$\int_1^{+\infty} \frac{3x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}\,dx.$$

В результате такого изложения темы получается таблица, основные структурные элементы которой отражены в таблице.

Содержание конспекта лекции по теме «Несобственные интегралы»

НесИ-1 (по бесконечному промежутку $x \to \infty$)	НесИ-2 (от неограниченной функции $y \to \infty$)
$y = f(x)$ определена на $[a, +\infty)$, $(\forall A \geq a)\ \left[\exists \int_a^A f(x)dx\right]$	$y = f(x)$ определена на $[a, b)$, $\lim_{x \to b-0} f(x) = \infty$ (b – особая точка $f(x)$) $(\forall \varepsilon > 0,\ \varepsilon < b - a)\ \left[\exists \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx\right]$
определение НесИ-1	*определение НесИ-2*
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{A \to +\infty} \int_a^A f(x)dx$$	$$\int_a^b f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$
Геометрическая иллюстрация понятия НесИ-1  	*Геометрическая иллюстрация понятия НесИ-2* 
Пример. Исследовать на сходимость $$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$ Пусть $\alpha \neq 1$. По определению НесИ-1 $$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A \to +\infty} \int_a^A \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A \to +\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big\|_a^A =$$ $$= \frac{1}{1-\alpha} \lim_{A \to +\infty} (A^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}) =$$ $$= \begin{cases} \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha - 1}, & \alpha > 1, \\ +\infty, & \alpha < 1. \end{cases}$$ Пусть $\alpha = 1$. Тогда $$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{A \to +\infty} \int_a^A \frac{dx}{x} = \lim_{A \to +\infty} \ln x \big\|_a^A =$$ $$= \lim_{A \to +\infty} (\ln A - \ln a) = +\infty$$ **Вывод**. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сх. при $\alpha > 1$ и расх. при $\alpha \leq 1$.	Пример. Исследовать на сходимость $$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$$ Пусть $p \neq 1$. По определению НесИ-2 $$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^p} =$$ $$= \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{(b-x)^{1-p}}{p-1}\Big\|_a^{b-\varepsilon} =$$ $$= \frac{1}{p-1} \lim_{\varepsilon \to +0} (\varepsilon^{1-p} - (b-a)^{1-p}) =$$ $$= \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}, & p < 1, \\ +\infty, & p > 1. \end{cases}$$ Пусть $p = 1$. Тогда $$\int_a^b \frac{dx}{b-x} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{b-x} =$$ $$= -\lim_{\varepsilon \to +0} \ln(b-x)\big\|_a^{b-\varepsilon} =$$ $$= -\lim_{\varepsilon \to +0} (\ln \varepsilon - \ln(b-a)) = +\infty$$ **Вывод**. $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ сх. при $p < 1$ и расх. при $p \geq 1$.

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">НесИ от неотрицательных функций
$y = f(x) \geq 0$ на соответствующем промежутке I</td></tr>
<tr><td colspan="2">Теорема 1 (теорема сравнения). Пусть $0 \leq f(x) \leq g(x)$ на I и $f(x)$, $g(x)$ интегрируемы на любом конечном промежутке из I. Тогда
1) если НесИ от $g(x)$ по I сходится, то НесИ от $f(x)$ по I сходится;
2) если НесИ от $f(x)$ по I расходится, то НесИ от $g(x)$ по I расходится.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Теорема 2 (признак сравнения в предельной форме). Пусть $f(x) \geq 0$ на I, $f(x)$ интегрируема на любом конечном промежутке из I и существует</td></tr>
<tr><td>$\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha} f(x) = M$.
Тогда
1) $M \in \mathbb{R}$, $M \geq 0$, $\alpha > 1 \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ сх.
2) $0 < M \leq \infty$, $0 < \alpha \leq 1 \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ расх.</td><td>$\lim_{x\to b-0} (b-x)^{p} f(x) = M$.
Тогда
1) $M \in \mathbb{R}$, $M \geq 0$, $0 < p \leq 1 \Rightarrow \int_a^{b} f(x)dx$ сх.
2) $0 < M \leq \infty$, $p > 1 \Rightarrow \int_a^{b} f(x)dx$ расх.</td></tr>
</table>

На такое изложение темы «Несобственные интегралы» было затрачено около 45 минут. При этом студенты получили достаточно полное представление об основных аспектах темы, увидели ее целиком, смогли познакомиться с применением общенаучных методов познания (синтез, анализ и др.) при заполнении таблицы.