

**ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ПОКАЗАТЕЛЬНО-СТЕПЕННЫЕ
УРАВНЕНИЯ В РАМКАХ КРУЖКОВОЙ И ВНЕКЛАССНОЙ
РАБОТЫ ПО МАТЕМАТИКЕ**

Травин Вадим Владимирович

учитель математики первой категории

ГУО «Гимназия г. Калинковичи»

(г. Калинковичи, Беларусь)

Аннотация. В данной статье рассматриваются основные задачи, связанные с показательными и показательными уравнениями. Также рассмотрены основ-

ные методы решений таких уравнений. Показаны основные подходы, которые выделяются в решении таких задач для рассмотрения на кружках и внеклассной работе для увеличения уровня развития и нестандартного мышления учащихся.

С выражениями и степенями известно множество самых разнообразных теоретических и практических задач, например, поиск процентов в счетах вкладов и расчёт прибыли. Выделяют такие понятия, как степени и показатели, которые могут быть самой разнообразной природы: от натуральных чисел до иррациональных. Так, например, в базовом уравнении $2^x = 32$ ответ известен и равен 5. Однако обобщение понятия степени при любых значениях переменных может отразить достаточно важную суть математических понятий и обозначений. Так, уравнение $3^x = 5$ без понятия логарифма является вопросом на засыпку.

Задача. Решите уравнение $3^x = 5$.

Решение. Ответ в задаче через логарифм известен: $x = \log_3 5$. Если понятие логарифма неизвестно, то можно ли самостоятельно получить ответ на вопрос задачи? Для этого будем рассматривать приближения ответа по недостатку и по избытку. А именно заметим, что $3^1 < 3^x = 5 < 3^2$. Это означает, что искомый показатель x находится между числами 1 и 2. Далее имеем, $4,6555367... = 3^{1,4} < 3^x = 5 < 3^{1,5} = 5,196152... .$ То есть требуемый показатель находится между числами 1,4 и 1,5. Далее получим исходя из приближений: $4,972754... = 3^{1,46} < 3^x = 5 < 3^{1,47} = 5,027687... ,$ что показывает расположение нашего показателя между числами 1,46 и 1,47. Продолжая данный процесс, мы получим иррациональное число, которое и есть наш логарифм: $x = \log_3 5$.

Ответ: $\log_3 5$.

А на каком основании мы можем утверждать, что у нас получится именно это число? На самом деле при постоянном увеличении точности левое и правое число будут стремиться к одному и тому же числу. Это говорит о том, что и $3^x = 5$, которое расположено между ними также будет стремиться к этому же числу. Полное доказательство данного факта опирается на теоремы курса математического анализа и выходят за рамки программы общего среднего образования.

Тем не менее, фразы «возвести в степень» и «взять логарифм» имеют разное объяснение для степеней из разных множеств. Так, определение для натуральных чисел имеет следующее объяснение: запись 7^{13} означает умножение числа 7 указанное (13) количество раз. Но не

всегда видно сразу, сколько раз нужно умножить число, чтобы получить требуемый результат.

Задача. Решите уравнение $(2+\sqrt{3})^x = 7+4\sqrt{3}$.

Решение. Ответ в задаче можно записать через логарифм от иррациональных выражений, но мы поступим несколько иначе. Дело в том, что по формуле квадрата суммы получим следующее: $7+4\sqrt{3} = 2^2 + (\sqrt{3})^2 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^2$. Это означает, что уравнение имеет вид $(2+\sqrt{3})^x = (2+\sqrt{3})^2$, откуда окончательно имеем $x = 2$.

Ответ: 2.

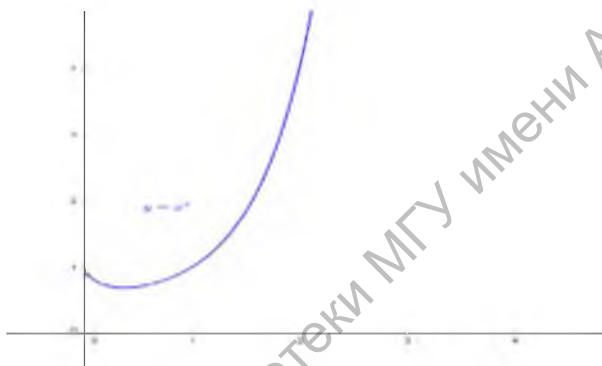


Рисунок 1. График функции $y = x^x$

Тем не менее, для дальнейших чисел операция возведения в степень сталкивается с рядом спорных моментов и ограничений для введения определений. Для отрицательных чисел, например, определение гласит,

что $6^{-3} = \frac{1}{6^3}$. Обобщая, можно записать справедливое равенство $a^{-k} = \frac{1}{a^k}$,

где числа $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ и $k \in \mathbb{N}$. Однако для нуля отрицательную степень определить так не получится, поскольку на ноль в натуральной степени нельзя делить. Возведение в нулевую степень позволяет записать, например, такие равенства: $2^0 = (-5)^0 = 1$. Возможно ли при этом записать, что справедливо равенство $0^0 = 1$?

Для ответа на этот вопрос рассмотрим график функции $y = x^x$ (рис. 1). Исходя из расположения графика в первой четверти можно сказать, что если и определить число ноль в нулевой степени, то его значение расположено около единицы.

Также обратим внимание на то, что с увеличением аргумента при значениях $x > 1$, возрастает и значение функции. Это означает, что при $x > 1$ функция возрастает.

Задача. Решите при $x > 1,3$ уравнение $x^x = 4$.

Решение. Ввиду того, что искомая функция $y = x^x$ является возрастающей на данном промежутке, то данное уравнение имеет не более одного корня. Так как $2^2 = 4$, то $x = 2$.

Ответ: 2.

А изменения условия уравнения на $x^x = 0,25$ при любых значениях аргумента подталкивает на поиск ответов на вопросы, связанные с пониманием понятия степени. Например, вопрос о том, является ли $x = -2$ корнем этого уравнения? И также вопрос о том, как искать корни данного уравнения?

Уравнения, в которых переменная входит как в основание, так и в показателе степени, называются показательными-степенными. Одним из основных таких уравнений принято считать уравнение вида $f(x)^{g(x)} = f(x)^{h(x)}$, где $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ представляют собой выражения с переменными [1, с. 72]. До сих пор нет единого соглашения касательно способов решения данных уравнений и трактовок понятия корней таких уравнений. Для понимания примерного алгоритма решения таких уравнений, рассмотрим пример.

Задача. Решите уравнение $x^{2x+4} = x^{20}$.

Решение. Из условия не следует ограничения на переменную $x > 0$. Для решения уравнения рассмотрим следующие варианты возможных решений. Первый случай, это когда $x = -1$ и выражения $2x + 4$ и 20 при этом имеют одинаковую чётность. Это так, поскольку при $x = -1$ число 20 и выражение $2x + 4 = 2$ оба чётные. Второй случай, когда $x = 0$ и выражения $2x + 4$ и 20 при этом должны быть больше нуля. Это выполнено, так как $2x + 4 = 4 > 0$. Третий случай, когда $x = 1$ и выражения $2x + 4$ и 20 оба должны иметь смысл, что выполнено. И, наконец, последний случай, когда $2x + 4 = 20$ и выражения x^{2x+4} и x^{20} имеют смысл. Решая последнее уравнение, находим $x = 8$. При нём выражения $8^{2 \cdot 8 + 4}$ и 8^{20} равны между собой и имеют смысл.

Ответ: $-1, 0, 1$ и 8 .

Выделим комментарий к предыдущей задаче. В рамках решения уравнений достаточно часто используют решение с использованием свойств функций. Если предыдущее уравнение рассматривать с точки зрения функционального подхода, то функция в левой части равенства

$f(x) = x^{2x+4}$ считается, как правило, определённой при $x > 0$. В этом случае ответы -1 и 0 нам не подходят. Это замечание относится и к неравенствам, содержащим показательно-степенные выражения.

Задачи внеклассной работы для самостоятельного решения (в скобках указаны ответы):

1. Решите уравнение $4^x = 5$. (Ответ: $\log_4 5$)
2. Решите уравнение $(1 + \sqrt{2})^x = 3 + 2\sqrt{2}$. (Ответ: 2)
3. Существует ли натуральное число n , при котором справедливо равенство $(\sqrt{n} - 1)^2 = 3 - n\sqrt{n}$? (Ответ: Да; 2)
4. В какую степень надо возвести число $\sqrt{2} + 1$, чтобы получить число $\sqrt{2} - 1$? [2, с. 64] (Ответ: -1)
5. Рациональным или иррациональным является число $\log_2 4$? (Ответ: Рациональным)
6. Является ли число $\log_{2+\sqrt{7}}(11 + 4\sqrt{7})$ целым? (Ответ: Да)
7. Решите при $x > 1$ уравнение $x^x = 3125$. (Ответ: 5)
8. Решите уравнение $x^{x+3} = x^{20}$. (Ответ: -1 ; 0 ; 1 ; 17)

Список литературы

1. Нелин, Е. П. Алгебра 7–11 классы. Определения, свойства, методы решения задач в таблицах. Сер. Комплексная подготовка к ЕГЭ и ГИА. М.: ИЛЕКСА, 2014. – 128 с.: ил.
2. Травин, В. В. Решение нестандартных задач по алгебре, геометрии, комбинаторике, теории графов, теории множеств: учебное пособие / В. В. Травин. – Минск : Адукацыя і выхаванне, 2019. – 128 с. : ил. – (Серия «Коллекция идей»).