

ИЗ ОПЫТА РАБОТЫ СО ШКОЛЬНИКАМИ ПРИ ПОДГОТОВКЕ К ОЛИМПИАДЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

Е. В. Засимович

(Учреждение образования «Могилёвский государственный университет имени А.А. Кулешова»,
кафедра математики)

Олимпиадная математика – это особая область знаний, требующая не только стандартных школьных умений, но и нестандартного, креативного подхода. Подготовка школьников к олимпиадам – процесс сложный и многогранный, который включает в себя как освоение новых теоретических знаний, так и развитие логического мышления, интуиции и умения решать задачи нестандартными методами.

Каждый школьник обладает своим темпом освоения материала и различными уровнями подготовки. Поэтому на начальном этапе важно определить сильные и слабые стороны каждого ученика. Для этого полезно проводить диагностические тесты и анализировать, какие типы задач вызывают наибольшие трудности. Но поскольку на сборах на это времени нет, то необходимо подбирать сразу задачи разного уровня

и ориентироваться «в процессе». Многие олимпиадные задачи требуют нестандартных решений. Чтобы развивать математическую интуицию, полезно:

- давать задачи, которые требуют экспериментов, догадок и поиска неожиданных подходов;
- обсуждать решения даже после нахождения правильного ответа: как можно решить иначе;
- применять метод аналогий — рассматривать похожие задачи и находить общие идеи в их решении.
- Полезно разделить задачи на три уровня:
- базовый — задачи, помогающие закрепить фундаментальные знания;
- средний — задачи, требующие первых элементов нестандартного мышления;
- сложный — задачи, требующие глубокого анализа, сложных логических ходов и творческого под-

хода.

Постепенный переход от простых задач к сложным помогает школьникам не терять мотивацию и уверенность в своих силах.

В олимпиадной математике существует ряд приёмов, которые часто встречаются в решении задач. К ним относятся:

- метод математической индукции;
- инварианты и полуинварианты;
- перебор и оценка;
- использование графов и комбинаторных методов;
- симметрии и преобразования;
- применение свойств делимости чисел.

Знание и умение применять эти методы значительно повышает шансы на успешное решение сложных задач. Я столкнулась с тем, что зачастую дети недостаточно внимания уделяют простым, по их мнению, методам, в которых «всё и так понятно», но с помощью которых на самом деле можно решать довольно сложные и необычные задачи. Помимо этого, возникают сложности с комбинированием нескольких методов в одной задаче. На последних сборах детей заинтересовала задача, очень сложная на первый взгляд, но оказавшаяся довольно понятной по итогу.

Задача. Решить в целых числах уравнение $3^x + 4^y = 5^z$. [1]

Решение.

Вначале воспользуемся теорией чисел и остатками при делении. Заметим, что правая часть уравнения при делении на 3 должна давать тот же остаток, что и левая, т.к. $3^x \equiv 0 \pmod{3}$, $4^y \equiv 1 \pmod{3}$, значит, $3^x + 4^y = 5^z \equiv 1 \pmod{3}$. Из этого можно сделать вывод, что z чётно, поскольку $5^{2n+1} \equiv 2 \pmod{3}$, а $5^{2n} \equiv 1 \pmod{3}$.

По аналогии рассматриваем остатки при делении на 4. Поскольку $5^z \equiv 1 \pmod{4}$, то и левая часть уравнения должна делиться на 4 с остатком 1, поэтому x тоже чётно. Итак, $4^y = 5^z - 3^x = 5^{2a} - 3^{2b}$, то есть $2^{2y} = (5^a - 3^b)(5^a + 3^b)$. Поэтому $5^a - 3^b = 2^k$ и $5^a + 3^b = 2^l$, где k и l — целые неотрицательные числа и $k + l = 2y$. Составив систему из двух последних равенств и выделив оттуда 5^a и 3^b , получим $5^a = \frac{1}{2}(2^k + 2^l)$ и $3^b = 2^{l-1} - 2^{k-1}$.

Значит, число $2^{l-1} - 2^{k-1}$ нечётно, поэтому $k = 1$, $2^k = 2$ и $3^b = 2^{l-1} - 1$. Следовательно, $l - 1 = 2s$ (иначе левая часть не делится на 3, что, очевидно, невозможно). Тогда $3^b = (2^s - 1)(2^s + 1)$ — произведение двух множителей, отличающихся на 2 и являющихся степенями тройки. Ясно, что эти множители — 1 и 3, то есть $s = 1$, $l = 3$. Отсюда $x = y = z$. [2]

В начале занятия подобную задачу дети не знали, как решать. Но, решив ряд более простых задач похожего типа, в которых использовались методы решения этой задачи, ученики 8-го класса с лёгкостью нашли решение задачи, которая была в олимпиаде для 11-го класса.

Данный пример прекрасно показывает, что, как и в спорте, в олимпиадной математике важна регулярная практика. Полезно проводить разбор решений после каждой задачи, обучать школьников самостоятельному анализу ошибок, оформлять решения строго и полно, что помогает структурировать мышление.

Некоторые школьники боятся олимпиадных задач, считая их слишком сложными. Важно формировать у них уверенность в своих силах. Для этого можно показывать примеры, когда они уже справлялись с трудными задачами, поощрять даже частичные успехи и разбирать неудачные выступления, подчеркивая положительные моменты и пути улучшения. Дети боятся предлагать решения, опасаясь, что они будут неправильными. Но как только они понимают, что неправильное решение тоже полезно, что оно может натолкнуть на верное решение или, как минимум, исключить часть вариантов, олимпиадные задачи становятся более понятными и простыми для них.

Подготовка школьников к олимпиадам по математике — это не только работа над задачами, но и развитие креативного мышления, умения анализировать, делать выводы и искать новые подходы. Индивидуальный подход, системность в подготовке и поддержание мотивации помогают ученикам достигать 3

высоких результатов и открывать для себя увлекательный мир математических исследований.

Литература

1. Олимпиады [Электронный ресурс]. — Режим доступа : <https://olimpiada.ru>. — Дата доступа : 20.02.2025.
2. Задачи [Электронный ресурс]. — Режим доступа : <https://www.problems.ru>. — Дата доступа : 20.02.2025.