

О ВОЗМОЖНОСТЯХ ТЕМЫ «ПЕРЕСТАНОВКИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ» ПРИ ФОРМИРОВАНИИ КОМБИНАТОРНОГО МЫШЛЕНИЯ

И. В. Марченко

(Учреждение образования «Могилевский государственный университет имени А.А. Кулешова»,
кафедра математики)

Рассматривается комбинаторное мышление как отдельный вид математического мышления и его особенности. Анализируются возможности некоторых типов задач на перестановки с ограничениями с целью формирования комбинаторного мышления.

Существуют различные основания к классификации видов мышления. Наиболее часто выделяют предметно-действенное, наглядно-образное и словесно-логическое мышление в соответствии с содержанием решаемых задач. В словесно-логическом мышлении выделяются другие типы мышления [1, с. 64–66]. Среди них особое место занимает математическое мышление – «это единственная деятельность обучающегося, подчиненная определенным математическим законам и правилам и направленная на установление закономерностей между объектами и явлениями окружающего мира» [2]. Учитывая это определение, а также специфику математических методов и подходов в зависимости от раздела математики, можно согласиться с тем, что комбинаторное мышление характеризует способность решать комбинаторные задачи. В то же время можно заметить, что эти задачи могут возникать не только в комбинаторике, комбинаторном анализе, но и в других разделах математики и в прикладных исследованиях. Т.Г. Попова рассматривает «комбинаторно-логическое мышление – мышление, реализуемое посредством мыслительных операций, направленное на выделение конечных вариантов рассматриваемых явлений и понятий, дальнейшего процесса преобразования числа выделенных выборов в зависимости от субъектного опыта ученика» [3].

В [4, с. 8] выделены операционные составляющие ключевых действий при развитии комбинаторно-логического мышления, которые затрагивают умения выполнять анализ текста задачи, давать различные формулировки ее условия, мысленную работу с реальными объектами, их признаками и свойствами, способность к обобщению, вариативность мышления, креативность и т. п.

Большинство из них можно развить, используя задачи на перестановки с ограничениями на выбор элементов во множества. Несмотря на простоту формулировок задач этой темы, большинство из них предполагает многообразие подходов к решению, требует тщательного анализа условия задачи, является специфичным, т. е. требующим именно комбинаторных рассуждений. Приведем несколько примеров таких задач.

Задача 1 [5, с. 186]. На собрании должны выступить пять человек А, В, С, D, Е. Сколькими способами можно расположить их в списке выступающих при условии, что В не должен выступать до тех пор, пока не выступит А? Решите эту же задачу при условии, что А должен выступать непосредственно перед В.

Решение этой задачи проводится перебором всех вариантов перестановки человек в списке, однако этот перебор можно не выполнять непосредственно. Для этого достаточно проанализировать, как он будет проводиться. Если А стоит на первом месте в списке, то для В имеется 4 возможных места, если А – на втором месте, то для В – три возможных места, если А – на третьем месте, то для В – 2 возможных места и если А – на четвертом месте, то для В только один вариант размещения. Всего 10 вариантов. С, D, Е в каждом случае можно разместить произвольным образом на свободных 3 местах. Число способов их размещения $3!$. Таким образом, по комбинаторному правилу произведения получаем всего $10 \cdot 3! = 60$ способов расположения А перед В.

Для ответа на второй вопрос задачи достаточно принять пару (А,В) за один элемент и тогда требуется разместить в списке 4 человека (элемента) (А,В), С, D, Е. Сделать это можно $4! = 24$ способами.

Задача 2 [5, с. 186]. Сколькими способами можно переставить буквы слова «перешеек» так, чтобы четыре буквы «е» не шли подряд?

При решении этой задачи использовать любой вид перебора нерационально, так как число вариантов при переборе велико. Естественным образом возникает мысль воспользоваться тем же подходом, что и при решении второго вопроса задачи 1, а именно, объединить 4 буквы «е» в один элемент. Число способов перестановки букв слова «перешеек» так, чтобы четыре буквы «е» шли подряд, будет $5! = 120$. Всего способов перестановок букв слова «перешеек» $P(4,1,1,1,1) = \frac{5!}{1!1!1!1!1!} = 1680$. Тогда переставить буквы слова «перешеек» так, чтобы четыре буквы «е» не шли подряд, можно $1680 - 120 = 1560$ способами.

Далее приведем задачи с аналогичными подходами к решению, но другими их комбинациями.

Задача 3 [5, с. 186]. Сколькими способами можно переставить буквы слова «Юпитер» так, чтобы гласные шли в алфавитном порядке?

Для решения этой задачи анализируются варианты расстановки букв согласно условию и, аналогично тому, как это делалось при решении задачи 1, проводится мысленный перебор вариантов. Поскольку здесь установленный порядок следования для 3 элементов, то анализ проводится несколько иначе.

Задача 4 [5, с. 186]. Сколькими способами можно переставить буквы в слове «космос» так, чтобы две одинаковые буквы не стояли рядом? Решите ту же задачу для слова «тартар».

Подход к решению этой задачи похож на тот, который применялся в задаче 2. В то же время ограничение на расстановку элементов во множестве другое, а соответственно, возникают особенности его применения.

Как показывает практика работы со школьниками по подготовке их участию в математических олимпиадах, задачи этой темы позволяют сформировать основные умения к решению комбинаторных задач.

Литература

1. Психология и педагогика: Учебное пособие / В. М. Николаенко [и др.]; отв. ред. В. М. Николаенко. – Москва : ИНФРА-М; Новосибирск : НГАЭиУ, 2000. – 175 с.
2. Гаджимурадов, М. А. Особенности математического мышления и его развитие при обучении геометрии / М. А. Гаджимурадов, З. Д. Гаджиева // Мир науки, культуры, образования. – № 2 (69). – 2018. – С. 189–191.
3. Попова, Т. Г. Основы развития комбинаторно-логического мышления старшеклассников [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <https://cyberleninka.ru/article/n/osnovy-razvitiya-kombinatorno-logicheskogo-myshleniya-starshklassnikov>. – Дата доступа : 30.01.2025.
4. Попова, Т. Г. Система задач, направленная на развитие комбинаторно-логического мышления старшеклассников. Математика. 10–11 класс : Учебно-методическое пособие [Электронный ресурс]. – Режим доступа : https://school644.spb.ru/popova_innovacia.pdf. – Дата доступа : 30.01.2025.
5. Виленкин, Н. Я. Популярная комбинаторика / Н. Я. Виленкин. – Москва : Наука, 1975. – 208 с.