УДК 378.016

СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ ШКОЛЬНОГО УЧЕБНИКА ГЕОМЕТРИИ НА ОСНОВЕ ОПТИМИЗАЦИИ ПО ПАРЕТО

Е. Н. Рогановская
(Учреждение образования «Могилевский государственный университет имени А.А. Кулешова», кафедра математики)

Идеи оптимизации в педагогике (Ю.К. Бабанский и его последователи) на описательной основе изначально обладают ограниченными возможностями, а использование математических методов оптимизации остается неразработанным до сих пор. В данной статье описывается методика применения оптимизации по Парето к решению проблем школьного учебника.

Введение. Как сравнивать между собой различные варианты изложения одной и той же учебной темы в различных учебниках, различные уроки на одну и ту же тему и т. д. Академик А.Н. Колмогоров, редактируя учебник 6–8-х классов по геометрии Н.Н. Никитина, сделав некоторые правки, сказал, что «улучшить его невозможно». Понятно, что сказано это было не в смысле, что данный учебник уже «лучший из лучших», и поэтому его не возможно улучшить. Но аналогичное можно сказать о написанном позднее (на основе геометрических преобразований) учебнике геометрии 6–8-х классов под редакцией самого А.Н. Колмогорова, если попытаться его теснее связать с традиционным геометрическим содержанием. Получается, что учебники не всегда и не по всем параметрам можно сравнивать? Такая неопределенность возникает тогда, когда стремятся получить один-единственный оптимальный вариант. А если по одним и тем же критериям окажутся «одинаково оптимальными» сразу несколько вариантов? В данной работе показывается, что оптимизация по Парето является наиболее адекватным видом оптимизации для уточнения смысла самого понятия «оптимизация учебника».

1. Основные определения: Оптимальность по Парето.

Определение 1. Множество альтернатив (вариантов) называется *множеством Парето* (обозначаемым далее буквой Р), если оно содержит альтернативы, обладающие следующими свойствами: а) каждая из них не имеет предпочтения одновременно по всем назначенным критериям;

б) улучшение любой одной из альтернатив множества Р возможно лишь при ухудшении некоторых других альтернатив множества Р. Альтернативы (варианты), входящие в множество Парето, называют *оптимальными по Парето.* Множество Парето называют также *множеством не улучшаемых альтернатив*, или *множеством эффективных компромиссных альтернатив.* Его можно также назвать *множеством равновесия альтернатив.*

Определение 2. Альтернатива А1 *доминирует* над альтернативой А2, если она предпочитается А2 (лучше по всем критериям) или, по меньшей мере, «не хуже», т. е. хотя бы по одному критерию А1 лучше, по остальным критериям одинаковые. При этом А1 оставляется, а А2 исключается из дальнейшего сравнения альтернатив.

Определение 3. Альтернатива А называется *Парето-оптимальной* (т. е. $A \in P$), если она не доминируется никакой другой альтернативой из рассматриваемой их совокупности. Все такие альтернативы образуют множество Парето.

Сравнение заканчивается, если остаются только несравнимые альтернативы, которые не лучше и не хуже друг друга. В простейших случаях эти определения хорошо согласуются с интуицией и опытом.

Пример 1. Из двух альтернатив А1(6, 5) и А2(3, 4) первая альтернатива лучше второй (по обоим критериям), она и принадлежит множеству Парето: $A1 \in P$.

Пример 2. Из двух других альтернатив А1(6, 5) и А2(6, 7) вторая альтернатива лучше первой (у нее первые критерии одинаковые, а у второй альтернативы второй критерий лучше), она и принадлежит множеству Парето: $A2 \in P$.

Пример 3. Рассмотрим две альтернативы А1(2, 3) и А2(1, 6), связанные с физическим содержанием: это два тела, находящиеся в состоянии равновесия на концах рычага, сбалансированные равенством $2 \cdot 3 = 1 \cdot 6$ (равенство произведения массы тела на плечо рычага). С точки зрения доминирования по Парето ни одна из этих альтернатив не доминирует над другой (они несравнимые). Поэтому $\{A1, A2\} \subset P$. Вывод полностью согласуется с физикой, выражая баланс двух критериев.

Пример 4. Из двух альтернатив А1(1, 1) и А2(3, 3) ни одна из них не принадлежит множеству Парето Р (в силу определения 1а). Поэтому $P = \varnothing$

2. **Выбор предпочтений**. **Методы оптимизации.** Допустим, что некоторая тема в учебниках 1–9 (рис. 1) сравнительно бедно представлена теоремами и задачами и с помощью Парето-анализа ставится цель выбрать учебник, который меньше всего обладает этим недостатком. В этом случае предпочтения задаются в направлении увеличения значений параметров: p_1 – количество доказываемых теорем, p_2 – количество задач, решаемых с их помощью. В нашем примере альтернатива А1 доминирует над А2, 5, 7, 8. Поэтому эти четыре альтернативы множеству Парето не принадлежат (они сразу исключаются из дальнейшего сравнения). Альтернатива А3 доминирует над А4, 9. Поэтому эти две альтернативы множеству Парето также не принадлежат. Остались три альтернативы А1, 3, 6. Каждая из них не доминируется двумя другими. Поэтому Р = {А1, А3, А6}.

Графически (методом «паруса») нахождение множества Р показано на рисунке.

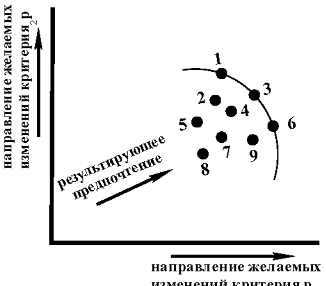

Рис.

Рассмотрены четыре вида множества P для разных направлений предпочтения критериев и содержательных интерпретаций критериев, связанных со школьным учебником. Кроме количественных шкал рассмотрена возможность применения порядковой шкалы, пригодной для использования любого конечного количества критериев, а также нахождение точек оптимума множества Парето с помощью обобщенных аддитивного и мультипликативного критериев.

Вывод. Диапазон применений оптимизации по Парето практически не ограничен [2]. В том числе применительно к школьному учебнику – начиная от оптимизации фрагментов содержания учебника по той или иной совокупности критериев (количества определений, теорем, задач, рисунков, текстовых пояснений, задач с решениями и т. д.), до оптимизации учебного материала, имеющего методологическую направленность (например, учебного материала на тему «Как искать решение задачи») [1].

Литература

1. Рогановская, Е. Н. Оптимизация математической подготовки учащихся на основе компетентностного подхода / Е. Н. Рогановская, Н. М. Рогановский // Матэматыка: праблемы выкладання. – Минск : 2015. – № 1. – С. 8–17.

2. Торра, Висенц. Мир математики (серия изданий): т. 45: Математика и выборы. Принятие решений. Пер. с исп. / Висенц Торра. – М. : Де Агостини, 2014 – 160 с.