

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ПОСЛЕДОВАНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ ЛЬЕНАРА

И. Н. Сидоренко

(Учреждение образования «Могилевский государственный университет имени А.А. Кулешова»,
кафедра программного обеспечения информационных технологий)

При качественном исследовании конкретных систем одним из основных методов локализации предельных циклов является нахождение нулей функции последования. В статье рассматривается алгоритм численного нахождения нулей функции последования для систем Лье́нара.

1. Введение

При качественном исследовании автономных систем на плоскости наиболее трудной является задача оценки числа предельных циклов, которая не решена даже для простейших классов таких систем. В работе рассматривается система Лье́нара:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -g(x) - f(x)y, \quad (1)$$

где $f(x)$, $g(x)$ – многочлены. Исходя из физического смысла, функцию $g(x)$ называем восстанавливающей силой, а $f(x)$ – сила трения. Такие системы описывают, например, поведение осцилляторов с нелинейным затуханием.

На практике большой интерес представляют предельные циклы «нормального размера» [1], для построения которых можно использовать функцию последования. В статье описывается алгоритм построения модифицированной функции последования, которая используется для численной локализации и построения предельных циклов систем Лье́нара.

2. Функция последования

Рассмотрим классическое определение функции последования [3].

Пусть дана автономная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y) \quad (2)$$

где $P(x, y)$, $Q(x, y)$ – непрерывно дифференцируемы, и L – прямая (сечение), пересекающая замкнутую траекторию системы (2) в точке M_0 . Отображение Пуанкаре T сопоставляет точке M на прямой L точку M_1 , в которую траектория, начавшаяся в M , возвращается на L впервые. Функция последования – это разность

$$d(M) = T(M) - M, \quad (3)$$

Показывающая смещение точки вдоль сечения после одного оборота. [3]

Из определения, в частности следует, что:

$T(M)$ – это координата точки M_1 на сечении L .

Если $d(M) = 0$, (или $T(M) = M$), то M лежит на предельном цикле.

Таким образом, для построения предельных циклов «нормального размера» [1], нам необходимо отыскать нули функции последования в области локализации предельных циклов.

3. Метод построения

Будем рассматривать систему Лъенара (1). При попытке построения классической функции последования для системы Лъенара мы сталкиваемся с проблемой вычисления первого времени возвращения траектории, выпущенной из точки M на сечение L . Однако этого можно избежать, если ввести несложную замену

$$\dot{x} = P(x, y)R(x, y), \dot{y} = Q(x, y)R(x, y), \quad (4)$$

$$R(x, y) = \frac{(x - x_0)^2 + y^2}{(x - x_0)Q(x, y) - yP(x, y)} \quad (5)$$

где $(x_0, 0)$ – особая точка системы (1).

В полученной системе (4), которая эквивалентна исходной системе (1), время первого возвращения траектории на сечение $y = 0$ будет равно $t = 2\pi$, что значительно упрощает вычисления (листинг 1).

Листинг 1

Листинг функции последования на языке Wolfram Mathematica

```
Res[u_, q_, xu_] := Module[{P1, Q1, R1, R, P, Q, sol},
  P1[xr_, yr_] := yr;
  Q1[xr_, yr_] := xr (1 - xr) - (q + a[[2]] xr + a[[3]] xr^2 + a[[4]] xr^3 + a[[5]]
xr^4) yr;
  R1[xr_, yr_] := (xr - xu/w) Q1[xr, yr] - yr P1[xr, yr];
  R[xr_, yr_] := ((xr - xu/w)^2 + yr^2)/R1[xr, yr];
  P[xr_, yr_] := P1[xr, yr] R[xr, yr];
  Q[xr_, yr_] := Q1[xr, yr] R[xr, yr];
  sol = NDSolve[{xr'[t] == P[xr[t], yr[t]], yr'[t] == Q[xr[t], yr[t]],
xr[0] == u, yr[0] == 0}, {xr, yr}, {t, 0, 2 PI}, WorkingPrecision -> 16];
  First[Evaluate[xr[2 PI] /. sol]]
];
```

Исследуем предельные циклы конкретной системы Лъенара [2]

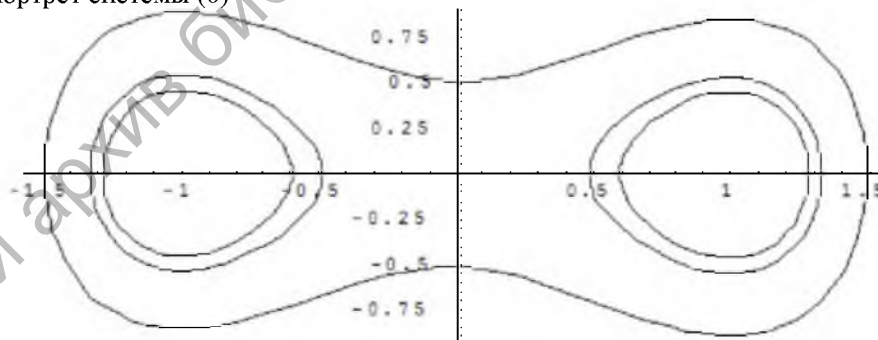
$$\frac{dx}{dt} = y, \frac{dy}{dt} = x(1 - x^2) - (0.03 + 0.0123x^2 - 0.04233x^4)y \quad (6)$$

Данная система имеет симметричное векторное поле и три особые точки в конечной части плоскости: два антиседла – $A(-1, 0)$, $E(1, 0)$ и одно седло – $S(0, 0)$.

Применяя последовательно алгоритм для нахождения нулей функции последования для каждой особой точки на соответствующих интервалах, получили, что у рассматриваемой системы существует по крайней мере по 2 предельных цикла вокруг каждого антиседла и один предельный цикл, окружающий сразу все особые точки (рисунок)

Рисунок

Фазовый портрет системы (6)



4. Выводы

Таким образом использование модифицированной функции последования для численной локализации предельных циклов «нормального размера» нахождения является мощным инструментом качественного исследования систем Лъенара на плоскости и может быть адаптирован для произвольной автономной дифференциальной системы на плоскости.

Литература

1. Сидоренко, И. Н. Об ослабленной проблеме Гильберта для систем Лъенара типа $2A + 2S$ / И. Н. Сидоренко // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. А. Куляшова. Серыя В. Прыродазнаўчыя навукі: матэматыка, фізіка, біялогія. – Могилев, 2023. – № 2 (62). – С. 32–40.
2. Сидоренко, И. Н. Предельные циклы кубической системы Лъенара типа $2A + 1S$ / И. Н. Сидоренко // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. А. Куляшова. Серыя В. Прыродазнаўчыя навукі: матэматыка, фізіка,

біялогія – Могилев, 2022. – № 2. – С. 21–29.

3. Черкас, Л. А. Конструктивные методы исследования предельных циклов автономных систем второго порядка (численно-алгебраический подход) : моногр. / Л. А. Черкас, А. А. Гринь, В. И. Булгаков. – Гродно : ГрГУ, 2013. – 489 с.