МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«МОГИЛЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени А. А. КУЛЕШОВА»

Е. Н. Рогановская

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА ПОСТРОЕНИЯ ШКОЛЬНОГО УЧЕБНИКА ГЕОМЕТРИИ НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ, ЭНТРОПИИ И ФРАКТАЛЬНОЙ ОРГАНИЗАЦИИ

Монография

им. А. А. Кулешова

Могилев
МГУ имени А. А. Кулешова
2025

УДК 37.022:514
ББК 74.022
Р-59

Печатается по решению редакционно-издательского совета МГУ имени А. А. Кулешова

Р е ц е н з е н т ы:

доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой физико-математических дисциплин Института информационных технологий БГУИР
Л. И. Майсеня;
доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Физические методы контроля» Белорусско-Российского университета
А. В. Хомченко

Рогановская, Е. Н.

Р-59 Теория и практика построения школьного учебника геометрии на основе методов оптимизации, энтропии фрактальной организации : монография / Е. Н. Рогановская. – Могилев : МГУ имени А. А. Кулешова, 2025. – 316 с. : ил.

ISBN 978-985-894-227-4

В работе проведен анализ состояния теории и практики создания школьного учебника. Отмечено, что многие проблемы школьного учебника носят исторический характер и обусловлены ограниченностью описательных методов, с помощью которых традиционно осуществляется их построение. Недостаточность описательных методов, характерных для педагогической науки и практики в целом, актуализирует поиски математических методов, способных поднять совершенствование школьного учебника на новый уровень. В данной работе в этих целях использованы известные и широко распространенные в современной науке и практике оптимизация по В. Парето, аксиоматическое построение теории вероятности А. Н. Колмогорова, теория энтропии К. Шеннона и фрактальная организация Б. Мандельброта. Их применение конкретизировано на примере построения учебника геометрии 7 класса. Работа адресуется всем, кто заинтересован в достижении прогресса в данной области, и в первую очередь начинающим исследователям – студентам, магистрантам и аспирантам.

УДК 37.022:514
ББК 74.022

ISBN 978-985-894-227-4

Базовые математические понятия и методы

АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ ПО А. Н. КОЛМОГОРОВУ, расширяющее прикладные возможности теории вероятности, обеспечивающее применение её к исследованию трудности учебного материала.

ОПТИМИЗАЦИЯ ПО ПАРЕТО. Оптимизация по совокупности критериев. Множество альтернатив называется **оптимальным по Парето**, если: а) каждая из альтернатив не имеет предпочтения одновременно по всем назначенным критериям; б) улучшение одной из них возможно лишь при ухудшении других альтернатив.

ИНФОРМАЦИОННАЯ ЭНТРОПИЯ СИСТЕМЫ ПО К. ШЕННОНУ. Рассматриваются новые прикладные её возможности с учетом аксиоматического определения вероятности, сложности и трудности дидактических систем и их регулирования.

ФРАКТАЛЬНАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ СИСТЕМЫ ПО Б. МАНДЕЛЬБРОТУ, дающая возможность дидактического применения идей повторения и самоподобия.

СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ – в отличие от реформирования или перестройки предполагает поэтапные преобразования системы посредством количественных и качественных изменений с о х р а н я е м о й   о с н о в ы (В. С. Безрукова. Энциклопедический словарь педагога. – Екатеринбург, 2000).

СОВЕРШЕНСТВО И РАЗВИТИЕ, означающие высшую степень развития, в сочетании с лаконичностью, простотой, гармоничностью (Философия: энциклопедический словарь; под ред. А. А. Ивина – М. : Гардарики, 2004).

СОВЕРШЕНСТВО И ОПТИМИЗАЦИЯ достигнуто не тогда, когда нечего добавить, а тогда, когда нечего у б р а т ь ... (Антуан де Сент-Экзюпери).

Введение

ПОСТРОЕНИЕ ШКОЛЬНОГО УЧЕБНИКА ГЕОМЕТРИИ НА ОСНОВЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ КАК МЕТОДИЧЕСКАЯ ПРОБЛЕМА

Лейтмотивом данной работы являются понятия **«традиции», «инновации», «совершенствование», «развитие», математические методы оптимизации, аксиоматической теории вероятности, энтропии и фрактальной организации системы.** Цель – повышение доступности массового обучения, в первую очередь обучения на базовом уровне, играющего ведущую роль в повышении образовательного уровня населения страны.

Проблемы повышения качества школьного учебника для различных учебных предметов чаще всего являются общими, причем как для учебников прошлых лет, так и для так называемых «современных» учебников, «учебников нового поколения». Ранее считалось, что такой замкнутый круг имеет место только для учебников естественнонаучного и математического циклов, но, как оказалось, не в меньшей мере ему подвержены и учебники гуманитарного цикла. Сторонники традиций нетерпимо относятся к новшествам и также нетерпимо к традициям относятся сторонники новых подходов. И те и другие чаще всего считают компромисс невозможным. Обе стороны приводят неопровержимые аргументы. Мы не будем приводить подобные примеры по различным учебным предметам (это увело бы нас далеко от поставленной конкретной проблемы), читатель найдет их в предостаточном количестве в различных научных публикациях и Интернет-источниках. Возвращаясь к проблеме качества школьного учебника геометрии, отметим, что в методическом отношении причина возникающих затруднений заключается **в неэффективности теоретических средств и методов описательного плана**, с помощью которых пытаются их разрешить. Неэффективность описательных средств и методов достаточно сильно подорвала престиж самого понятия «совершенствование», после чего исследователи дружно переключились на «оптимизацию». Но можно сказать, что «оптимизацию» постигает, если уже не постигла, та же участь, что и «совершенствование».

Смена терминологии, по существу, мало что меняет. Сами эти категории крайне важные и актуальные, ибо изменчивы сами критерии, средства и методы, на основе которых пытаются их реализовать. Оценивая общую тенденцию развития школьного учебника положительно, наряду с этим отметим, что теория и практика разработки школьного учебника слишком долго задержалась на описательном уровне. Казалось бы, определенный прогресс следовало ожидать от учебников по математике, но теория их построения также не опирается на какие-либо математические методы, ограничиваясь субъективным пониманием текущей ситуации, субъективной интуицией и опытом отдельных экспертов и описательной дидактикой, не заботясь о том, насколько они применимы в новых условиях. Нужны новые теоретико-методические компетенции. На наш взгляд, прогресс в развитии школьного учебника необходимо искать в применении математических методов, искусственного интеллекта, нейронных сетей. Только в этом случае можно надеяться, что «совершенствование» и «оптимизация» смогут приобрести истинное содержание представляемых ими категорий. Обратимся к опыту создания школьного учебника геометрии и к более широкому контексту – опыту реформ среднего математического образования.

Верно ли, что проблема школьного учебника существовала всегда и периодически обострялась? Существовала она и в античные времена. Долгое время «Начала» Евклида были не только научным трудом, но и единственным учебным руководством. Что касается «учебного руководства», то большинство учащихся по этому «руководству» не могли продвинуться дальше теоремы о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника (из-за доказательства этой теоремы), за что эту теорему ещё в античные времена прозвали «ослиным мостом». С развитием математики возникли различные построения евклидовой геометрии. Имевшая место определенность и однозначность построения геометрии безвозвратно исчезла. В преподавании геометрии возникла труднейшая проблема – проблема выбора оптимального варианта. Прогресс в области математики не снял остроту проблемы выбора и оптимизации школьного учебника. Сколь-нибудь удовлетворительного решения эта проблема не имеет до сих пор. Причины разные. С одной стороны, традиционное геометрическое содержание веками шлифовалось и во многих отношениях до сих пор представляет собой стройную систему, достойную подражания. Вместе с этим для неё характерно использование устаревшего математического языка, математического содержания и излишняя детализация второстепенного материала. С другой стороны, значительное влияние стал оказывать фактор возрастания массовости образования. До революции 1917 г. учебники А. П. Киселева (в которых традиционная система получила наиболее удачное воплощение) были учебниками для гимназий, где уровень образований был достаточно высоким по всем предметам, но его нельзя считать массовым, тем более всеобщим. Сам Киселев, сравнивая тиражи изданий своих учебников до революции и после неё, писал о «мизерных тиражах» первых и о «многомиллионных тиражах» последних. Это говорит о том, что с точки зрения массовости охвата населения образованием ситуация изменилась коренным образом. Учебники, хорошие для гимназистов из обеспеченных семей с домашними учителями и репетиторами, стали иначе оцениваться с точки зрения всеобщего среднего образования.

Так ли неудачны проводимые реформы и чему учит их опыт? О необходимости реформ говорилось еще до 1917 г. на Всероссийских съездах учителей математики. В советское время крупная реформа назревала постепенно, начиная с 1936 г, когда была образована группа наиболее выдающихся математиков, утвержденных президиумом АН СССР (математики более старшего поколения – академики: Н. Н. Лузин (председатель), Д. А. Граве, А. Н. Крылов и др.; а также математики нового поколения – О. Ю. Шмидт, И. М. Виноградов, С. Л. Соболев, Л. Г. Александров, А. Н. Колмогоров и др.). Были созданы комиссии, в которые входили Г. М. Фихтенгольц, Л. А. Люстерник, Б. Н. Делоне и др. В 1939 г. роль идеолога реформы взял на себя А. Я. Хинчин. Основной причиной возникающих проблем в школьном образовании А. Я. Хинчин справедливо считал «недостаточный научный уровень подавляющего большинства нашего учительства». На начальном этапе реформы предпринимались попытки улучшить действующие учебники (в 1938 г. Н. А. Глаголев внес небольшие редакционные правки в геометрию, в 1940 г. А. Я. Хинчин – в арифметику). Усиление начального этапа реформы отмечается даже во время войны. В 1943 г. создаётся Академия педагогических наук РСФСР, среди её членов-учредителей два математика-реформатора – А. Я. Хинчин и В. Л. Гончаров. В 1945 г. подключились ещё три математика-реформатора – П. С. Александров, Н. Ф. Четверухин, А. И. Маркушевич. Ближайшая цель состояла в замене учебников А. П. Киселёва, через 7 лет это произошло окончательно. Появились учебники И. Н. Шевченко, А. Н. Барсукова, Н. Н. Никитина, С. И. Новоселова и др. Одновременно велась широкая пропаганда установок предстоящего основного этапа реформы. Осуществлялось это под идейным руководством А. И. Маркушевича, через журналы «Математическое просвещение» и «Математика в школе» (главным редактором последнего был с 1958 г. Р. С. Черкасов – соавтор новых учебников геометрии).

Основной этап реформы относится к концу 60-х гг. прошлого столетия. В 1968 г. вышел в свет первый «пробный» учебник А. И. Маркушевича «Алгебра и элементарные функции». В разгар реформы он редактировал реформаторские учебники алгебры для 6–8 классов (авт. Ю. Н. Макарычев и др.). Для старших классов учебники алгебры писал А. Н. Колмогоров (в соавторстве), учебники геометрии З. А. Скопец (в соавторстве). Реализация реформы в 1970–1978 гг. тесно связана с именем академика А. Н. Колмогорова, который в 1967 г. был поставлен во главе Ученого методического совета Минпроса СССР и сохранял этот пост до 1980 г. Результаты реформы увидели в 1978 г., когда первый выпуск обученных «по реформе» учащихся пришел в вузы. По свидетельству академика-педагога Ю. М. Колягина, «было повсеместно отмечено, что математические знания выпускников страдают формализмом, навыки вычислений, элементарных алгебраических преобразований, решения уравнений фактически отсутствуют. Абитуриенты оказались практически не подготовленными к изучению математики в вузе» (Колягин Ю. М. Русская школа и математическое образование. – М. : Просвещение, 2001, – С. 200). Против реформы выступили академики А. Н. Тихонов, Л. С. Понтрягин, В. С. Владимиров и др. По их инициативе Бюро отделения математики АН СССР приняло 10 мая 1978 г. Постановление: «Признать существующее положение со школьными программами и учебниками по математике неудовлетворительным как вследствие неприемлемости принципов, заложенных в основу программ, так и в силу недоброкачественности школьных учебников. Принять срочные меры к исправлению положения. Ввиду создавшегося критического положения рассмотреть возможность использования некоторых старых учебников» [там же, с. 200–201]. Причины затруднений, как видно, были сконцентрированы только на учебнике. В итоге решили не делать резких поворотов назад и сохранить в обновленном виде те новые учебники, которые вызывали меньше всего нареканий. Сохранены учебники по математике для 5–6-х классов, по алгебре для 6–8-х классов и в доработанном виде учебники алгебры и начал анализа для старших классов. Уже одно это обстоятельство объективно свидетельствует о том, что в значительной своей части реформа была успешной. Больше всего нареканий вызвали учебники геометрии. Они были построены на совершенно новой математической основе – на основе теории геометрических преобразований, и какая-либо доработка их в сторону приближения к традиционному построению была невозможна. По этой причине они были заменены на учебник А. В. Погорелова, тесно связанный с учебником А.П. Киселева и задачником Н. Рыбкина.

На наш взгляд, позитивное начало в проведенной реформе преобладало над негативным, а последнее оказалось «несколько» преувеличенным. Не совсем правильно, что в общей оценке реформы в центре оказался прежде всего школьный учебник. На самом деле на исход реформы оказали влияние и другие значимые факторы. Причина состоит не столько в недостаточном качестве новых учебников, сколько в их новизне и непривычности для учителя, в неподготовленности к ним основной массы учителей. К новым учебникам должны быть своевременно подготовлены учителя, и учебники должны быть не просто не хуже прежних, а настолько лучше, чтобы это превосходство стало очевидным подавляющему большинству учителей, учащихся и родителей, и главное – не допускали снижения качества обучения. К сожалению, одномоментно создать такой учебник невозможно. Вечного учебника не существует, и нужно своевременно заботиться о создании более совершенного альтернативного учебника. Основной этап реформы должна предварять также активная подготовка к ней работающих учителей и студентов в вузе. Возможно необходима апробация учебника вначале в отдельном регионе страны. Поспешность и жесткая директивность сроков проведения реформы усугубили ситуацию с качеством знаний учащихся, породили в учительской среде и среди родителей разочарование в новых учебниках и реформах образования. Не на пользу пошли и новомодные стремления в духе Болонской декларации (в частности, организация элитного образования и др.), механическое подражание которой оказалось более успешными лишь для снижения качества отечественного образования.

Необходимо принять во внимание, что часто внешние условия были неблагоприятными для проведения образовательных реформ. Их отодвигали Первая мировая война, Октябрьская революция 1917 г. Начало преобразований в Советской России естественным образом было связано не с восстановлением гимназического образования, а с ликвидацией всеобщей безграмотности населения. Возобновление реформаторского движения с 1936 г. было также приостановлено Великой Отечественной войной. Потом надо было восстанавливать разрушенную страну. Относительно более благоприятные условия были созданы для реформы 1970–1978 гг. Можно допустить, что стремление идти «в ногу» с реформами на Западе сказались на сравнительно быстрые темпы проведения основного этапа этой реформы, в результате чего не все практические шаги реформы были проработаны с нужной основательностью и глубиной.

Состояние проблемы на данный момент. Уже в наше время О. И. Мельников справедливо отмечает, что в Республике Беларусь «в последние годы значительно ослабла преемственность при обучении математике между средней и высшей школой. Это привело к тому, что в вузы приходят абитуриенты, недостаточно подготовленные к восприятию как математических, так и опирающихся на них технических дисциплин» [64, с. 23].

Наблюдается снижение внимания в средней школе к теоретическим знаниям, сообщение большинства теорем без доказательств. Это приводит к тому, что даже несмотря на возрастание количества выпускников с высоким баллом аттестата и результатов по ЦТ (что становится все более усиливающимся явлением), студенты первых курсов не готовы к усвоению теоретических дисциплин и испытывают значительные трудности при обучении в вузе. Теряет свои возможности и обучение в средней школе геометрии, которое в развитии учащихся традиционно играло значительную роль. На базовом уровне в учебниках допускаются потеря научности изложения, математические некорректности, не обеспечивается должное упрощение логической системы геометрии, преодоление её громоздкости (свойства идущего еще от «Начал» Евклида); недостаточно используются приемы упрощения без потери содержания (тезис А. П. Киселева). Механическое сокращение объема учебника не выход из положения (тем более что это «достоинство» всего лишь видимость, так его с лихвой перекрывают дополнительные пособия типа «Наглядная геометрия», «Алгебра в задачах» и т.п.). Нужна систематическая и менее затратная научная и экспериментальная работа по улучшению учебников. Этот вывод подтверждает и сравнение белорусских программ и учебников по математике, например, с российскими программами и учебниками, которое свидетельствует о сильном их расхождении. В белорусских учебниках отсутствуют многие крупные темы. При построении единого образовательного пространства с Россией эта ситуация, безусловно, требует коррекции.

Возникает также вопрос, не поторопились ли мы с исключением в Беларуси углубленного уровня обучения, дискредитировав его предварительно «квазиэлитным» образованием – слишком широким охватом учащихся углубленным уровнем и искусственным превращением обычных школ в лицеи и гимназии.

Не изучен до конца вопрос о целесообразности слияния базового и повышенного уровней в одном учебнике. При отсутствии их четкого разграничения такой учебник неизбежно становится менее эффективным.

Необходимость оптимальной меры традиционного и нового содержания в учебнике геометрии. Определение такой меры вправе отнести к наиболее высоким уровням исследования, определяющим его методологию [63].

Небольшие элементы аксиоматического метода в учебниках геометрии присутствуют всегда, начиная еще от Евклида. Они необходимы и в современных учебниках, тем более что с развитием математики появились другие, более краткие и простые способы построения системы аксиом. Наиболее коротким путем с выходами к практике может быть введен координатный метод (в виде небольшой темы). С векторами и геометрическими преобразованиями сделать это гораздо сложнее. Но определенные элементы новых тем на базовом уровне тоже необходимы. Векторы, например, необходимы всем учащимся при изучении курса физики. Поэтому исключение векторов из планиметрии на базовом уровне считаем непродуманным шагом, то же самое можно сказать об отнесении их на факультативные занятия без самых минимальных применений к решению задач. Ограничения могут заключаться в выборочном применении обоснований, в доказательстве только наиболее важных теорем, тесно связанных с традиционным геометрическим содержанием, опуская доказательства большинства алгебраических свойств векторных операций. Из геометрических преобразований поначалу можно ограничиться понятиями осевой и центральной симметрии (как это делал А. П. Киселев), равенство симметричных отрезков рассмотреть в виде задач на применение признаков равенства треугольников. Элементы фрактальной геометрии могут быть применены с целью более совершенной организации учебного материала и особенно системы задач на основе идей повторения и самоподобия. Какой-либо «добавочной» теории о фракталах включать в учебники не предполагается.

Необходимо иметь в виду, что в последнее время участились образовательные реформы, но первопричиной их явился не учебник, а изменения общей организации образования. Вот далеко не полный перечень подобных изменений: отмена углубленного уровня обучения, массовое создание лицеев и гимназий, попытка перехода на 12-летний срок обучения, переход на Централизованное тестирование с «плавающей» шкалой требований, введение новых учебных предметов, изменение соотношения между физико-математическими, естественнонаучными дисциплинами и гуманитарными дисциплинами. Сюда относится также исключение предметов, реально готовящих учащихся к жизни в современных сложных условиях и т.п.

Новые подходы требуют подготовки новых разработчиков. Студенты, магистранты и аспиранты, к которым в первую очередь обращена данная работа, должны иметь необходимую исследовательскую подготовку в университете, приобрести новые компетенции и быть готовыми к творческой работе с настоящими и будущими учебниками. *Основное внимание должно быть сконцентрировано прежде всего на учебнике базового уровня обучения, который в первую очередь определяет образовательный уровень населения.*

В данной работе анализируются объективные трудности проблем школьного учебника, показывается, что успешное решение их на пути обычного составительства (к тому же не лишенного порой заимствований без всяких ссылок) невозможно, а привлечение в качестве авторов лиц, которые раньше никаких дел с разработкой учебников не имели, создает большие риски для математического образования. Нужны научно-исследовательские лаборатории, научно-исследовательские коллективы и знающие люди по их организации. Нужны не случайные рецензенты учебников, а экспертные заключения нескольких компетентных комиссий (математической – от Национальной академии наук, педагогической – от Академии педагогических наук и общественной, состоящей из учителей и родителей). В Российской Федерации в последнее время именно так и делается. Пора за учебники браться всерьёз. Данная работа призвана оказать посильную помощь начинающим ученым в подготовке их к исследовательской деятельности по проблеме оптимизации школьного учебника на основе математических методов, сокращающих описательный подход, субъективизм, произвол и повторение прежних ошибок. По нашему мнению, с точки зрения самой высокой цели качественное образование для всех является необходимым условием для выживания общества. Качественное образование для избранных – путь к социальному расслоению с его негативными последствиями. Нужна не массовость гимназий и лицеев, не учебник для разных уровней, прежде всего нужен качественный учебник для всех. Каждая школа должна быть Центром современного образования, нацеленного на сохранение будущего у сограждан своей страны.

В заключении данного Введения отметим, что большая ответственность лежит на методике преподавания математики. Общие цели, принципы и подходы обучения, формулируемые в дидактике на описательном уровне, остаются недостижимыми, своего рода сияющими и заманчивыми вершинами, недостижимыми вовсе не потому, что ошибочны. Причина в том, что они сформулированы в такой форме и с такими смыслами, которые не задают определенную их реализацию и допускают потенциальную возможность огромного количества различных реализаций. Без глубокого анализа существующей ситуации, без применения математических методов, искусственного интеллекта, нейронных сетей и формирования знающих кадров эта ситуация вряд ли может быть удовлетворительно решена. Предлагаемые математические методы могут оказаться тем переходным мостом, который облегчит использование искусственного интеллекта и нейронных сетей в построении учебника, поможет анализировать огромное количество возможных практических ситуаций (отечественных и зарубежных) и выбирать оптимальные из них.

Глава 1
ОСНОВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ СОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ И ОПТИМИЗАЦИИ УЧЕБНИКА ГЕОМЕТРИИ 7–9-х КЛАССОВ

1.1. СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ ЛОГИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ И ДИДАКТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА УЧЕБНИКА ГЕОМЕТРИИ

1.1.1. СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ УЧЕБНИКА ГЕОМЕТРИИ НА ОСНОВЕ ОПТИМИЗАЦИИ ПО В. ПАРЕТО

Понятие логико-математической системы (ЛМС) учебника геометрии

Под **логико-математической системой (ЛМС)** учебника геометрии понимаем иерархическую систему построения: а) теоретического материала – построение определенной математической базы (системы аксиом и определений, теорем и доказательств); б) задачного материала, в котором присутствует два вида логических связей – связи задач с теорией (определяющие, системообразующие связи) и связи задач друг с другом (локальные связи). Эти две системы взаимодействуют друг с другом: те или иные изменения в теоретическом материале вызывают изменения в системе задач, и наоборот. К примеру, в 7 классе при традиционных построениях теоретического материала геометрии существует проблема снабжения его содержательными геометрическими задачами на вычисление (ввиду отсутствия в начале построения геометрии геометрических вычислительных методов). Перейти к содержательным задачам на доказательство также затруднительно, так как понимание доказательств и потребности в них у учащихся еще не сформированы. Евклид и его последователи вынуждены были уделять особое внимание задачам на построение, выполняемым с помощью различных инструментов. Древнегреческие математики в таком соотношении различных видов задач какого-либо «перекоса» не видели, а задачи на построение с помощью циркуля и линейки считали «венцом геометрии». В современной алгебраизированной геометрической науке геометрические построения «венцом» уже не являются, изменилась их роль и в школьном курсе. В результате потребность в вычислительных методах и задачах на вычисление (особенно в первый год обучения) еще больше увеличилась. Реализация этой потребности возможна только при соответствующем совершенствовании системы теоретического материала. В первую очередь имеем в виду совершенствование системы традиционного геометрического содержания (например, более раннее, неформальное ознакомление учащихся с теоремами Фалеса и подобием треугольников и др.).

Под **параметром ЛМС учебника геометрии** понимается показатель, ЛМС учебника геометрии, выражающий какое-либо его существенное свойство. В математике и ее приложениях под параметром обычно подразумевают количественные параметры. Применительно к ЛМС понятие параметра целесообразно расширить. В работе исследуются следующие две группы параметров учебника:

– количественные параметры (объем учебного материала, определяемый количеством аксиом, определений, теорем, доказательств, количеством учебных тем и задач, количеством шагов в доказательстве теоремы или решении задачи, соотношением различных видов задач, методов доказательства),

– качественные параметры (последовательность изложения учебных тем, распределение учебных тем по различным годам обучения, трудность доказательств, трудность задач (степень их новизны, необычности, непривычности, неожиданности хода решения и т.п.), разграничение задач по признакам – обязательные и дополнительные задачи и др.).

Если изменение значений некоторого параметра ЛМС учебника вызывает существенные изменения значений других его параметров, то такой параметр назовем **ключевым** (или параметром **активного воздействия)**. С помощью ключевого параметра можно воздействовать в определенном направлении на всю систему параметров. К примеру, если разработка более простых доказательств отдельных теорем упрощает доказательства группы других теорем, но не всех, а некоторых усложняет, то итоговая эффективность такой разработки проверяется с помощью построения множества Парето, которое характеризуется как множество эффективных решений и эффективных компромиссов.

ЛМС является сложной системой, связи между элементами которой носят специфический логический характер и устанавливаются с помощью аксиом, определений и доказательств. Понятие ЛМС может относиться к общей части для различных уровней обучения, а также к дополнительному материалу для повышенного уровня обучения. Минимальную ЛМС теоретического материала, общую для различных уровней обучения, рассматриваем как центральный компонент ЛМС учебника геометрии.

Фундаментальные понятия и ключевые теоремы – это наиболее важные в научном и теоретическом отношении понятия и теоремы, играющие особую роль в формировании ЛМС всего учебного курса. Фундаментальными понятиями являются, например, понятия длины отрезка, параллельности и перпендикулярности прямых, равенства и подобия треугольников и др. Ключевые теоремы рассматриваем как центральный компонент ЛМС теоретического материала. Понятие ключевой теоремы в том или ином конкретном построении является относительным и зависит от принятой системы изложения. Не исключается также, что некоторые теоремы являются ключевыми в различных системах изложения. Выделение ключевых теорем осуществляется: а) в процессе построения целостной ЛМС, целостность которой обеспечивается минимальным количеством составляющих её аксиом, определений, теорем и доказательств, б) в процессе ориентации ЛМС на определенную систему аксиом и степени этой ориентации, в) в процессе выбора последовательности учебных тем, распределения их по различным годам обучения, г) обеспечением связи между родственными фундаментальными геометрическими понятиями (например, между равенством и подобием треугольников), возможным сокращением дистанции между ними, д) обеспечением роли ключевых теорем в упрощении доказательств в различных учебных темах (это признаки равенства и подобия треугольников, элементы тригонометрии и др.).

Одна из наиболее точных и выразительных характеристик совершенства дана Антуаном де Сент-Экзюпери: «**Совершенство достигнуто не тогда, когда нечего добавить, а тогда, когда нечего убрать**». «Нечего убрать» означает, что дальнейшее сокращение выхолащивает и обесценивает содержание учебника, снижает его возможности для получения полноценного образования. В полной мере высказывание Антуана де Сент-Экзюпери относится к школьному учебнику и в первую очередь к его содержанию. Целостная минимальная ЛМС – это ЛМС, которая не содержит ничего «лишнего». Избыточные теоремы по отношению к минимальной ЛМС теоретического материала рекомендуем относить к задачному материалу. К числу избыточных, например,

Антуан де Сент-Экзюпери (1900–1944)
французский писатель, журналист, профессиональный военный лётчик, автор знаменитой сказки «Маленький принц»

можно отнести формулы длины медианы и биссектрисы треугольника, теорему о прямой Симпсона и др. К дополнительному материалу в качестве общего ознакомления можно отнести, например, небольшое число избранных теорем: теоремы Чевы, Менелая, Стюарта и др. Отнесение избыточного материала в задачи не нарушает целостность ЛМС. Оптимальная ЛМС та, которая состоит из фундаментальных геометрических понятий и ключевых теорем, относящихся к этим понятиям. Если в том или ином учебнике ЛМС не является целостной и минимальной, обращение к этому понятию может оказаться полезным для оценки степени неполноты или избыточности ЛМС и подсказать пути дальнейшего совершенствования учебника на основе оптимальности по Парето. Одним из наиболее трудных вопросов является определение соотношения традиционного и нового геометрического содержания, роли традиций и инноваций в формировании ЛМС. Имеется определенный опыт в реализации различных подходов к определению такого соотношения. Традиционное содержание хорошо представлено, например, в классическом учебнике геометрии А. П. Киселева [42] и в учебниках, близких к нему. Примером включения нового содержания являются учебники геометрии под редакцией А. Н. Колмогорова [44], З. А. Скопеца [43], которые создавались в соответствии с идеей укрепления связи школьного курса с современной математической наукой.

Обеспечение целостности ЛМС теоретического материала минимальным количеством понятий и фактов облегчает восприятие ЛМС и способствует формированию системных знаний учащихся. Целостность и минимальность ЛМС теоретического материала обеспечивается, прежде всего, сокращением второстепенного учебного материала, применением одних ключевых теорем к доказательству ряда других ключевых теорем: применение свойства внешнего угла треугольников к доказательству единственности перпендикулярной прямой, признака параллельности прямых, теоремы о сумме углов треугольника и др. Упрощение структуры ЛМС достигается также путем более раннего помещения ряда ключевых теорем в общей системе учебного курса. Концентрация ключевых теорем в учебнике усиливает его содержательность, научную ценность, оказывает существенное влияние на обеспечение простоты доказательств. Например, раннее введение теоремы о внешнем угле треугольника существенно упрощает изложение вопросов перпендикулярности и параллельности прямых, теоремы о сумме углов треугольника, доказательства признаков равенства прямоугольных треугольников.

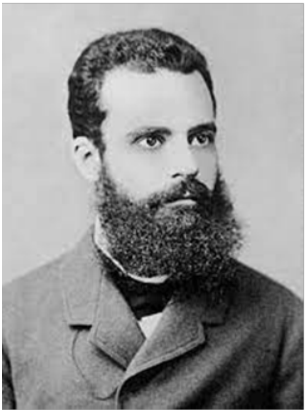
Возросшая роль теоремы о внешнем угле треугольника делает её одной из эффективных ключевых теорем. Этот пример подсказывает, что взаимодействие традиций и инноваций носит сложный характер и инновации не связаны только с включением нового геометрического содержания, напротив, связаны прежде всего с более рациональным построением традиционного содержания на традиционной основе. Сказанное подчеркивает актуальность ознакомления студентов, магистрантов и аспирантов с различными доказательствами ключевых теорем, с ЛМС и способами её проектирования, формируя тем самым готовность выпускников университета к психологической восприимчивости и практической реализации инноваций.

Способы совершенствования учебника на основе оптимизации по В. Парето

1. О понятии оптимизации. В теории и практике обучения математике часто встает вопрос о выборе одного варианта из совокупности альтернативных вариантов. Альтернатива всегда предполагает определенный выбор на основе сравнения различных вариантов. При этом, естественно, стремятся выбрать наилучший вариант, удовлетворяющий определенным условиям и критериям. В результате возникает потребность в выборе оптимального варианта.

Идея оптимизации в педагогике впервые была высказана и развита Ю. К. Бабанским и его последователями. Однако описательный подход на общем дидактическом уровне обладает ограниченными возможностями, а использование математических методов оптимизации к разработке дидактических проблем оказалось достаточно трудным делом и остается не разработанным до сих пор (по нашим оценкам, даже на первоначальном уровне). Как сравнивать между собой, например, различные варианты изложения одной и той же учебной темы в различных учебниках, как сравнивать различные уроки на одну и ту же тему и т. д. Академик А. Н. Колмогоров, редактируя учебник геометрии 6–8-х классов по геометрии Н. Н. Никитина, сделав некоторые правки, сказал, что «улучшить его не возможно». Понятно, что сказано это было не в смысле, что данный учебник уже «лучший из лучших» и поэтому его улучшить нельзя. Но это же самое можно сказать о написанном позднее (на основе геометрических преобразований) учебнике геометрии 6–8-х классов под редакцией самого А. Н. Колмогорова, если попытаться его теснее связать с традиционным геометрическим содержанием. Не означает ли это, что учебники не всегда и не по всем параметрам можно сравнивать? Как сравнивать учебники, например, с точки зрения того, какая последовательность учебных тем в них лучше, если они построены на совершенно различных математических основаниях?

Чаще сравнение сводится к тому, что в таком-то учебнике по такому-то критерию изложение лучше, чем в другом учебнике. Понятно, что такое сравнение имеет смысл, если учебники строятся на одной и той же математической основе. Однако улучшение по одному критерию даже одной учебной темы часто приводит к ее ухудшению по другому критерию, и вопрос об оптимизации данной учебной темы остается открытым. Такая неопределенность возникает тогда, когда стремятся получить один-единственный оптимальный вариант. А если по одним и тем же критериям окажутся «одинаково оптимальными» сразу несколько вариантов? В данной работе показывается, что оптимизация по Парето является наиболее адекватным видом оптимизации для уточнения смысла самого понятия «оптимизация учебника».



Вильфредо Парето (1848–1923)
итальянский экономист, инженер и социолог

Открытие В. Парето, безусловно, является выдающимся и в полной мере остается не освоенным до сих пор. В теории вероятностей В. Парето разработал понятие Парето-распределения. В теории экономики – понятие оптимизации по Парето (состояние системы, при котором ни один показатель не может быть улучшен без ухудшения другого). Это понятие было применено им и в социологии (Большая российская энциклопедия). Математические основы оптимальности по Парето рассматриваются в целом ряде современных публикаций. Для более подробного ознакомления рекомендуем работы [1–8]. С математическими основами оптимизации по Парето, изложенными в доступной форме, можно ознакомиться по работе [2]. Концепция такого подхода к компетенциям учащихся высказана в нашей работе [76].

В предлагаемой работе рассматриваются графические и табличные методы оптимизации по Парето содержания учебника, характеризуемые конечным числом альтернатив с двумя и более критериями.

2. Выбор допустимых значений критериев. Критерии позволяют сравнивать альтернативы, выбирать наилучшие из них или выбирать альтернативы, не имеющие преимущества друг перед другом. Допустим, что имеется множество учебников (альтернатив) 1–10, каждый из которых определенным образом характеризуется совокупностью двух критериев p_1 и p_2. Значения критериев подсчитываются непосредственно по сравниваемым учебникам. Изображая альтернативы **точками**, а значения их критериев считая **координатами точек**, будем изображать альтернативы на **координатной плоскости** (рис. 1.1). Поскольку все альтернативы и значения их критериев взяты из реально существующих учебников, то все они считаются **допустимыми**. Приходим к области D допустимых неотрицательных значений критериев выбираемых альтернатив, выделяемых на рисунке **прямоугольником**.

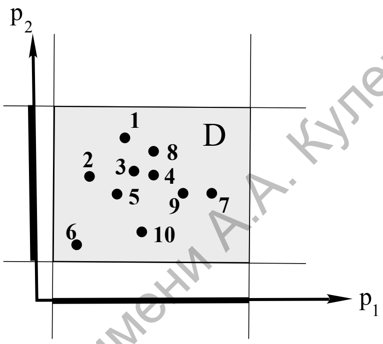


Рис. 1.1

Если дополнительно рассматривается некоторая новая альтернатива, то возможно, что она или попадает, или не попадает в ранее построенный прямоугольник. В последнем случае область D расширяется. Построенная область D облегчает сравнение альтернатив. Например, те альтернативы, которые располагаются «кучно», в виде «роя», означают, что они близки друг к другу. Особый интерес представляют собой альтернативы, которые располагаются на периферии роя. Как их сравнивать друг с другом и какую полезную информацию может дать такое сравнение? На эти вопросы ответ дает теория оптимизации по Парето.

3. Множество Парето. Оптимальность по Парето.

Определение 1. Множество альтернатив (вариантов) называется **множеством Парето** (обозначаемым далее буквой P), если оно содержит альтернативы, обладающие следующими свойствами: а) каждая из них не имеют предпочтения одновременно по всем назначенным критериям; б) улучшение любой одной из альтернатив множества P возможно лишь при ухудшении некоторых других альтернатив множества P. Альтернативы (варианты), входящие в множество Парето, называют **оптимальными по Парето.**

Множество Парето называют также множеством **неулучшаемых альтернатив, или множеством эффективных компромиссных альтернатив**. Его можно также назвать **множеством баланса (равновесия) альтернатив**. Нахождение множества Парето опирается на попарное сравнение альтернатив с помощью понятия «доминирование» – упорядочение альтернатив по предпочтению. Оставшиеся после таких сравнений альтернативы образуют множество Парето.

Определение 2. **Альтернатива А1 доминирует над альтернативой А2**, если она предпочитается А2 (лучше по всем критериям) или по меньшей мере «не хуже», т.е. хотя бы по одному критерию А1 лучше, по остальным критериям одинаковые. При этом А1 оставляется, а А2 исключается из дальнейшего сравнения альтернатив.

Определение 3. **Альтернатива А называется Парето-оптимальной** (т.е. $A \in P$), если она не доминируется никакой другой альтернативой из рассматриваемой их совокупности. Все такие альтернативы образуют множество Парето. Сравнение заканчивается, если остаются только несравнимые альтернативы, которые **не лучше и не хуже друг друга**.

Эти определения хорошо согласуются с интуицией и опытом в наиболее простых примерах. Пусть оба критерия максимизируются.

Пример 1. Из двух альтернатив А1(6, 5) и А2(3, 4) первая альтернатива лучше второй (по обоим критериям), она и принадлежит множеству Парето: $A1 \in P$.

Пример 2. Из двух других альтернатив А1(6, 5) и А2(6, 7) вторая альтернатива лучше первой (у нее первые критерии одинаковые, а у второй альтернативы второй критерий лучше), она и принадлежит множеству Парето: $A2 \in P$.

Пример 3. Рассмотрим две альтернативы А1(2, 3) и А2(1, 6), связанные с физическим содержанием: это два тела, находящиеся в состоянии равновесия на концах рычага, сбалансированные равенством $2 \cdot 3 = 1 \cdot 6$ (равенство произведения массы тела на плечо рычага). С точки зрения доминирования по Парето ни одна из этих альтернатив не доминирует над другой (они несравнимые). Поэтому $\{A1, A2\} \subset P$. Вывод полностью согласуется с физикой.

Пример 4. Из двух альтернатив А1(1, 1) и А2(3, 3) альтернатива $A_2 \in P$.

Рассмотрим более содержательный пример на применение этих определений.

Пример 5. Рассмотрим одну и ту же тему из учебников 1–9 (количество альтернатив) с точки зрения двух критериев и направлений их предпочтения:

p_1 – количество доказываемых теорем,

p_2 – количество задач, решаемых с их помощью.

В нашем примере альтернативы, соответствующие точкам 1, 3, 6, образуют множество Парето (рис.1.2): $P = \{1, 3, 6\}$.

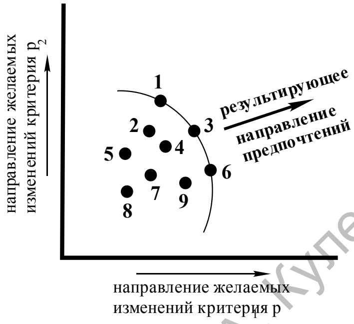


Рис. 1.2

В самом деле.

Альтернатива A1 доминирует над альтернативами A2, 5, 7, 8. Поэтому эти четыре альтернативы множеству Парето не принадлежат (они сразу исключаются из дальнейшего сравнения).

Альтернатива A3 доминирует над альтернативами A4, 9. Поэтому эти две альтернативы множеству Парето также не принадлежат.

Остались три альтернативы A1, 3, 6. Каждая из них не доминируется двумя другими (и вообще всеми остальными альтернативами). Поэтому $P = \{1, 3, 6\}$.

Вероятность вхождения учебника в множество Парето составила 3/9 = 1/3. В зависимости от величины энтропии множества альтернатив можно судить о наличии или отсутствии определенной тенденции.

В практике создания учебника встречаются разные толкования «неулучшаемых объектов». Во Введении уже были приведены слова А. Н. Колмогорова, который после внесения некоторых правок в учебник геометрии 6–8-х классов Н. Н. Никитина, по сути, отказался от этого и сказал, что «его невозможно улучшить». Часто высоко оценивается улучшение учебника по отдельному его критерию, при котором другие его критерии не ухудшились. Совершенствование учебника нередко рассматривается как поэтапное, эволюционное улучшение по различным критериям. Совершенствование учебника обычно рассматривается как улучшение, сохраняющее традиционную основу. Посмотрим на затронутые понятия с позиции оптимизации по Парето.

4. Четыре вида множества Парето. Первый графический способ построения множества Парето (с помощью правила «паруса»). Для одной и той же совокупности альтернатив множество Парето может быть различным в зависимости от направлений предпочтения критериев. *Направлением предпочтения* называется направление улучшения критерия.

Ниже показаны примеры множества Парето для разных направлений предпочтения критериев (рис. 1.3). Стрелки указывают направление улучшения соответствующего критерия.

Множество Парето нетрудно определить, если воспользоваться так называемым *правилом «паруса»,* в соответствии с которым направление предпочтения можно рассматривать как направление ветра. Тогда множество Парето будет определяться формой паруса, надуваемого сразу двумя ветрами. Линия, на которой располагаются точки множества Парето, называется *Парето-фронтом*, или *линией Парето*.

Эти понятия лежат в основе оптимизации по Парето графическими средствами при конечном числе вариантов, задаваемых двумя критериями. В приведенных выше вариантах учебника а)–г) критерии p_1 и p_2 могут иметь, например, такие содержательные итерпретации:

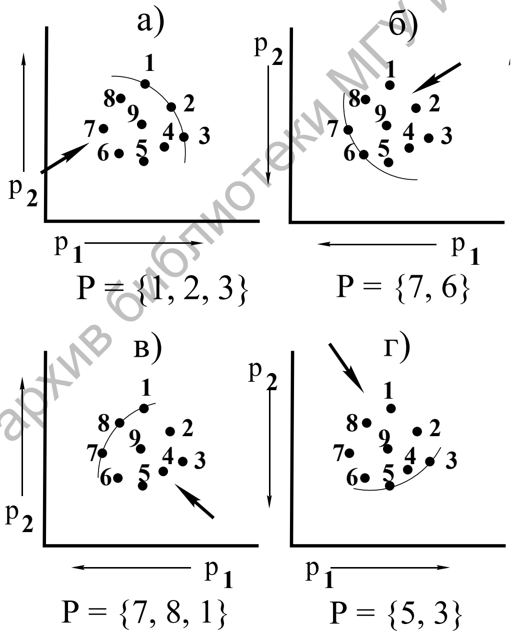


Рис. 1.3

Вариант	p_1	p_2	Альтернативы, оптимальные по Парето
а)	Количество вводимых понятий недостаточно для рассмотрения новых теорем и решения новых задач и требует увеличения (в данной теме в 9 учебниках).	Количество мотиваций, иллюстраций, пояснений к ним в этих же учебниках характеризуется заметным разбросом и требует более точного согласования в зависимости от количества и трудности понятий.	P= {1, 2, 3} Для двух альтернатив интуитивно очевидно, что чем больше значение критерия p_1 (чем больше понятий, и среди них трудных понятий), тем больше должно быть значение критерия p_2. Но когда в множество P вошли три альтернативы, то необходим определенный компромисс. Альтернатива с наибольшим значением по критерию p_1 уже не будет иметь наибольшее значение по другому критерию, и наоборот. И в этом компромиссе будет участвовать некоторая промежуточная альтернатива. Множество Парето указывает оптимальный вариант компромисса. (Оба критерия максимизировались.)
б)	Для различных учебников характерно значительное количество теорем в данной теме (в том числе и второстепенных). Требуется сокращение этого количества.	Значительное количество задач в этих же учебниках на применение теорем, приводимых с решением. Требуется их сокращение.	P= {7, 6} Интуитивно очевидно, что необходимо сокращение значений обоих критериев. Множество Парето указывает конкретные варианты оптимального сокращения. (Оба критерия минимизировались.)

Окончание таблицы

Вариант	p_1	p_2	Альтернативы, оптимальные по Парето
в)	Значительное количество определений в данной теме (в том числе и второстепенных) в различных 9 учебниках. Требуется их сокращение.	Большой разброс по количеству теорем, относящихся к этим определениям.	P= {7, 8, 1} Интуитивно ясно, что значения критериев p_1 и p_2 не сбалансированы. Множество Парето указывает конкретные варианты достижения баланса. (Критерии разнонаправленные.)
г)	Часть доказательств теорем в учебнике аналогичны предыдущим, эта аналогия повторяется в последующих доказательствах; теоремы снабжены предварительными примерами, подсказками, указаниями, не содержат скачков трудности, все теоремы этой части по трудности доступны учащимся.	Другие доказательства теорем в этом же учебнике, напротив, не аналогичны предыдущим и последующим доказательствам, непривычны учащимся, учащиеся встречаются с ними впервые, содержат скачки трудности, могут быть недоступны части учащихся.	P= {5, 3} Множество Парето указывает, каким образом можно сбалансировать эти доказательства так, чтобы доступность не пострадала. Для последующего выбора одного варианта из полученных двух Парето-оптимальных вариантов требуется дополнительное исследование (дополнительные предпочтения с большим учетом конкретной ситуации). (Критерии разнонаправленные.)

5. Второй графический способ построения множества Парето (с помощью прямоугольников). Множество Парето для двух критериев можно построить графически с помощью прямоугольников. Для каждой альтернативы, представленной на графике точкой, строится прямоугольник (рис. 1.4). (Отношение "лучше" указывают стрелки.) Очевидно, угловая точка каждого прямоугольника является лучшей точкой по отношению ко всем другим, оказавшимся внутри этого прямоугольника, так как у этой угловой точки значения критериев p_1 и p_2 наибольшие.

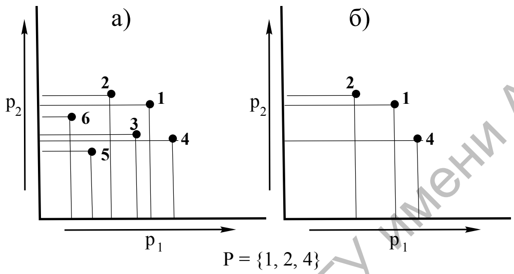


Рис. 1.4

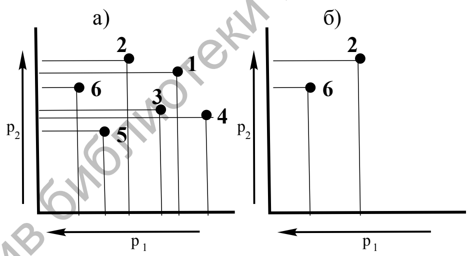


Рис. 1.5

Поэтому все точки, оказавшиеся внутри построенных прямоугольников, исключаются из рассмотрения. Для сокращения процесса исключения удобно начать с прямоугольника, внутри которого находится наибольшее количество альтернатив – в данном случае с прямоугольника при вершине 1. Исключаются сразу альтернативы 3, 5 и 6. Остаются точки 1, 2 и 4. Построенные при этих вершинах прямоугольники уже не содержат какие-либо точки. Поэтому P = {1, 2, 4}. К такому же ответу придем, применяя метод Парето-фронта. При других направлениях предпочтения критериев p_1 и p_2 правила исключения точек будут другими. Например, на рисунке 1.5 по критерию p_1 лучшей будет точка 6, а по критерию p_2 лучшей точкой будет точка 2. Все остальные точки, находящиеся вне одного или другого прямоугольника, исключаются. Получаем P = {2, 6}. К такому ответу приводит и метод Парето-фронта.

6. Построение множества Парето с помощью таблицы. Пусть имеется ряд альтернатив, каждая из которых характеризуется некоторым набором критериев (существенно, что их может быть больше двух). В этом случае обратиться к рисунку нет возможности. Для разъяснения общего подхода ограничимся, как и выше, двумя критериями. Перебор альтернатив может начаться с любой из них. Стремятся выбрать такую альтернативу, чтобы перебор был короче.

Пример 6. Пусть имеется 9 альтернатив, каждая из которых характеризуется значениями двух критериев p_1 и p_2. (Оба критерия максимизируются.) Процесс построения множества Парето отображается следующей таблицей.

Альтернативы	Значения p_1, p_2	Сравнение альтернатив: начинаем перебор альтернатив снизу и поднимаемся вверх. Обоснование
A9	10, 6	A9 выбираем в качестве начальной точки перебора
A1	3, 10	A1 оставляется, так как не хуже и не лучше A9
A8	7, 8	A8 не исключается, так как не хуже и не лучше A9
A2	2, 9	A2 исключается, так как хуже A1 по обоим критериям
A3	9, 5	A3 исключается, так как хуже A9 по обоим критериям
A4	6, 7	A4 исключается, так как хуже A8 по обоим критериям
A5	4, 4	A5 исключается, так как хуже A9 по обоим критериям
A6	6, 4	A6 исключается, так как хуже A9 по обоим критериям
A7	8, 3	A7 исключается, так как хуже A9 по обоим критериям
A8	7, 8	A8 не исключается, так как не хуже и не лучше A9
Ответ. Не исключенными остаются три альтернативы A9, A8 и A1. В рассматриваемой совокупности альтернатив нет ни одной альтернативы, которая бы доминировала эти три альтернативы. Они и образуют множество Парето: P = {A9, A1, A8}.		

Графический и табличный способы свидетельствуют о том, что нельзя исключать также и такие случаи:

а) если какая-либо альтернатива не входит в множество Парето, то возможно частичное ее улучшение (при сохранении множества Парето неизменным), которое не ведет к ухудшению учебника по другим критериям;

б) независимо от трактовок оптимальности для многокритериальных задач оптимальная альтернатива обязательно должна быть Парето-оптимальной. Поэтому окончательный выбор оптимальной альтернативы следует осуществлять из множества Парето-оптимальных альтернатив. Теоретически можно допустить, что «ветер» плохо предсказуем, а два «ветра» тем более. Поэтому нельзя исключать случай, когда все альтернативы (или большая часть из них) при «сильном ветре» окажутся на линии Парето-фронта (рис. 1.6) и будут образовывать множество Парето. В этом случае вероятность вхождения альтернативы в множество Парето равна 0,7. Дальнейший выбор оптимальной альтернативы потребует применения более сильных методов, в частности, обобщенного аддитивного, или мультипликативного, критерия.

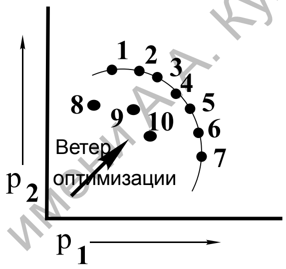


Рис. 1.6

7. Точка оптимума множества Парето. *Обобщенный аддитивный критерий.* Пусть для двух альтернатив находится обобщенный аддитивный критерий $K=a_1 \cdot p_1+a_2 \cdot p_2, \ldots$ (*), т.е. отыскивается в множестве Парето *альтернатива, в которой выражение* (*) *принимает максимальное значение*. Эта альтернатива называется **точкой оптимума множества Парето**. Коэффициенты a_1 и a_2 называются *весовыми коэффициентами* – они отражают относительную важность каждого критерия в принятии решения и позволяют определить, насколько каждый критерий влияет на итоговый результат анализа. Правильный выбор весовых коэффициентов помогает учесть различные предпочтения и интересы заинтересованных сторон, что позволяет установить ***баланс между различными критериями, найти компромиссные решения.*** Для решения этой задачи построим **линию уровня** критерия K (рис. 1.7а), т. е. линию постоянных значений K = const: $a_1 \cdot p_1+a_2 \cdot p_2 = K$. Отсюда

$$p_2 = \frac{K - a_1 \cdot p_1}{a_2}.$$

Предельное положение линии уровня – положение, когда она оказывается **опорной прямой множества Парето**, т. е. прямой, которая проходит через некоторую точку множества Парето, причем все другие точки этого множества лежат по одну сторону от этой прямой. Точка множества Парето, обладающая этим особым свойством, называется **точкой оптимума множества Парето**. В примере, представленном на рисунке 1.7а, точкой оптимума множества Парето является точка 1.

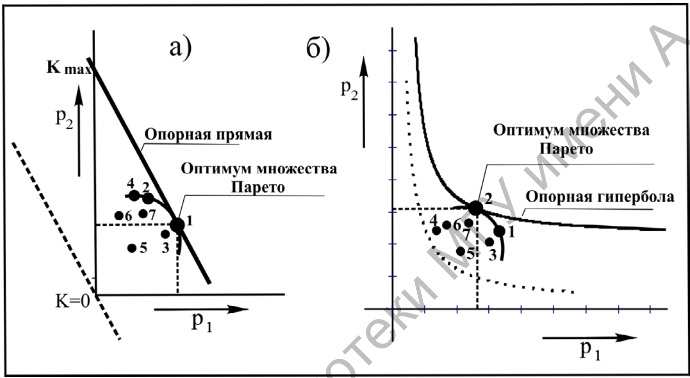


Рис. 1.7

Пример 7 (содержательной конкретизации обобщенного аддитивного критерия). Пусть p_1 – количество задач, общих для базового и повышенного уровней, p_2 – количество задач, предназначенных в основном для повышенного уровня, причем 1) $a_1 = a_2 = 1$; 2) $2a_2 = a_1$; 3) $a_2 = 2a_1$. Предлагается найти точку оптимума (альтернативу с наибольшим К) в множестве Парето, представленном на рисунке 1.7а, для указанных соотношений между a_1 и a_2.

Обобщенный мультипликативный критерий. Пусть альтернатива характеризуется двумя критериями p_1 и p_2 и пусть

$$p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} = 1 - \text{const}. \ (**)$$

Для простоты построения линии уровня положим $a_1 = 1$, $a_2 = 1$. Тогда уравнение линии уровня критерия K = 1 будет иметь вид: $p_1 \cdot p_2 = 1$. Отсюда получаем уравнение гиперболы: $p_2 = 1/p_1$. Предельное положение гиперболы, при котором она становится опорной линией, т.е. проходит через некоторую точку множества Парето, а все остальные точки множества Парето оказываются лежащими по одну сторону от гиперболы, показано на рисунке 1.7б. Выделенная таким образом *точка 2 является оптимумом множества Парето.*

8. Множество Парето и шкалы измерений. Множество Парето обладает различными свойствами. Важнейшим из них является то, что его состав не зависит от типа шкалы, в которой производится измерение критериев, – *количественной или порядковой (ранговой шкалы предпочтений).*

Пример 8. Для иллюстрации этого свойства вернёмся к таблице из п. 5 и заменим в ней количественные значения критериев p_1 и p_2 на места этих критерий в ранговой шкале. Упорядочим вначале значения ранга p_1, затем значения ранга p_2. Нумерацию начинаем с низших значений рангов. Если критерии имеют одинаковые значения, то они делят между собой занимаемые места и ранг получается как среднее арифметическое значение этих мест. Например, значение критерия p_1=6 встречается дважды (у альтернатив 4 и 6). Эти два значения делят между собой на ранговой шкале четвёртое и пятое места. Тогда их ранг равен 4,5 (к этому приему целесообразно прибегать, когда одна из двух сравниваемых альтернатив оказывается вблизи Парето-фронта). Аналогично рассчитывается ранг для критерия p_2=4. Наименьшее значение критерия p_1=2, является наихудшим и поэтому ему присваивается низший ранг, равный 1. Соответственно, наилучшее значение p_1=10 получает высший ранг, равный 9, так как всего девять альтернатив. Остальные значения p_1 получают промежуточные ранги, соответствующие порядковым номерам значений критерия p_1. Аналогичное соответствие рангов и значений имеет критерий p_2. В результате замены в таблице из п. 5 количественных значений критериев их рангами получим приводимую ниже таблицу. Если теперь построить множество Парето, используя вместо количественных значений критериев их ранги, то увидим, что независимо от способа построения множества Парето – по количественным значениям критериев или по рангам – состав множества Парето будет один и тот же: P = {A1, A8, A9}. Как видно, множество Парето обладает следующими свойствами. Его можно строить не только для количественных критериев, но и для качественных. Кроме того, порядковая шкала позволяет сделать одинаковым способ нахождения множества Парето при любом количестве критериев. Отмеченное свойство множества Парето дает возможность сравнения учебников, используя порядковую шкалу: если учебник А по каким-либо критериям (параметрам) лучше учебника В, а учебник В по этим критериям лучше учебника С, то учебник А по этим критериям лучше учебника С.

Номера альтернатив	Значения критериев p_1 и p_2	Ранги значений критериев (нумеруем с низших значений критериев)	
		p_1	p_2
A1	3, 10	2	9
A2	2, 9	1	8
A3	9, 5	8	4
A4	6, 7	4–5	6
A5	4, 4	3	2–3
A6	6, 4	4–5	2–3
A7	8, 3	7	1
A8	7, 8	6	7
A9	10, 6	9	5

9. Об оптимизации изложения учебного материала, имеющего методологическую направленность. А. П. Киселев, автор знаменитых школьных учебников математики, одним из требований к разработке учебника выдвигал требование о необходимости точности и ясности изложения, о сохранении научности в формулировании целей и средств её достижения. Оптимизация по Парето применима и к анализу этого требования, что подчеркивает широту области её применения к оптимизации учебника.

Пример 9. Сравним с этой точки зрения альтернативы изложения учебного материала методологического содержания «Как решать задачу» (такой параграф имеется, например, уже в действующем учебнике 5 класса).

Критерии сравнения, соответствующие содержанию задач в 5 классе:

p_1 – ориентация изложения процесса поиска решения задачи на применение восходящего анализа (отталкиваемся от требования задачи и выясняем, что достаточно знать для получения ответа);

p_2 – ориентация изложения на применение в процессе поиска синтетического метода анализа (находим, какие выводы можно сделать из условия задачи).

Возможные состояния критериев, построение порядковой шкалы (с учетом возрастных особенностей учащихся 5-го класса):

а) критерий не применяется или применяется неявно и незначительно, что им можно пренебречь. Такой критерий будет занимать самое низкое место под номером 1;

б) критерий доминирует на всех этапах решения задачи, потребности в применении другого критерия нет. Такой критерий будет занимать самое высокое место. Номер места будет равен общему количеству мест;

в) промежуточное состояние: ни один из критериев не доминирует, но присутствует с перевесом на каждом этапе решения задачи. Критерий занимает промежуточное место.

Так как для критериев выделено всего три состояния, то состоянию а) присвоим номер 3 (самое высокое место), состоянию б) – номер 1 (самое низкое место), состоянию в) – номер 2 (промежуточное место).

Действующий учебник является альтернативой (1, 2) или (2, 1).

Порядковая шкала построена, теперь можно перейти к ее использованию.

Обозначим альтернативные варианты – кандидаты на включение в множество Парето. С учетом возможных состояний критериев, альтернативы (1, 1) и (3, 3) сразу исключаются. Поэтому общее число кандидатов равно 8 – 2 = 6.

	Состояние критерия p_1	Состояние критерия p_2	Альтернативы	Сравнение альтернатив	Обоснование
1	3	2	A1(3, 2)	A1 **не исключаем**	Принимаем как отправную точку перебора. Выбрали по самому лучшему первому критерию и не худшему второму критерию
2	3	1	A2(3, 1)	A2 исключаем	A2 хуже A1
3	2	1	A3(2, 1)	A3 исключаем	A3 хуже A1
4	1	2	A4(1, 2)	A4 исключаем	A4 хуже A1
5	2	3	A5(2, 3)	A5 **не исключаем**	A5 не хуже и не лучше альтернативы A1
6	1	3	A6(1, 3)	A6 исключаем	A6 хуже A5
Вывод. Остались две равноценные альтернативы (одна не хуже и не лучше другой). Они и образуют множество Парето **P = {A1, A5}**, где A1(3, 2), A5(2, 3). Вероятность вхождения альтернатив в множество Парето равна 2/6 = 1/3. Действующий учебник в множество P не входит.					

Пример 10. Далее можно из полученных двух альтернатив, оптимальных по Парето, выбрать одну, например, с помощью обобщенного аддитивного критерия. Так, если $K = p_1 + 2p_2$, то точкой оптимума множества P будет точка A5, если $K = 2p_1 + p_2$, то точкой оптимума множества P будет точка A1 (см. рис. 1.8). Наибольший оптимум множества Парето находится в единственной точке A1, который почти в 2 раза больше оптимума в точке A5. Это означает, что в изложении данного учебного материала можно добиться в два раза большей эффективности. Вероятность достижения такого оптимума равна 1/6. Для решения педагогической задачи этот результат обеспечить интуицией или опытом не представляется возможным. Приведенный пример свидетельствует о том, что методологическая направленность данного учебного материала получает оптимальное решение при условии четкой его ориентации на методы поиска решения задачи. При недостаточности такой ориентации она становится в лучшем случае неопределенной.

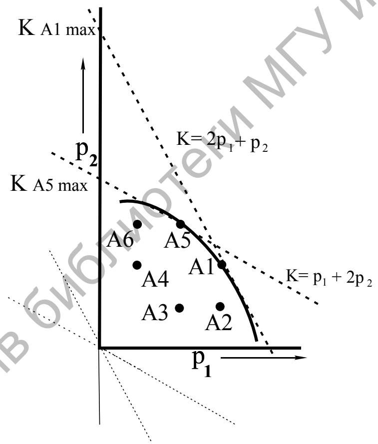


Рис. 1.8

Пример 11. Проверим, влияет ли произвол выбора первой альтернативы в качестве начальной точки в процессе перебора. Допустим, что перебор начали с альтернативы A2 (для сокращения перебора начальную альтернативу выбираем не из числа худших).

Состояние критерия p_1	Состояние критерия p_2	Альтернативы	Сравнение альтернатив	Обоснование
1	2	A1(1, 2)	A1 исключаем	A1 хуже A2
3	2	A2(3, 2)	A2	A2 пока оставляем как начальную точку сравнения
3	1	A3(3, 1)	A3 исключаем	A3 хуже A2
2	1	A4(2, 1)	A4 исключаем	A4 хуже A2
2	3	A5(2, 3)	A5 не исключаем	A5 не хуже и не лучше оставленной альтернативы A2
1	3	A6(1, 3)	A6 исключаем	A6 хуже A5
Ответ. Остались две равноценные альтернативы A2 и A5 (одна не хуже и не лучше другой). Они и образуют множество Парето P = {A2, A5}, A2(3, 2), A5(2, 3). Как видно, перебор альтернатив можно начинать с любой из них. В любом случае приходим к одному и тому же ответу.				

Выводы. Активное развитие в последние десятилетия математических теорий, относящихся к исследованию, выбору и оптимизации решений, оказывает влияние на самые различные сферы науки и практики. Педагогика и методика – новое направление расширения этой сферы. Без освоения понятий, методов и результатов этих теорий невозможно развитие и понимание современных подходов в области теории школьного учебника и методик преподавания учебных предметов. Вместе с тем существует весьма ощутимый разрыв между уровнями изложения современных математических теорий в научной литературе и учебной литературе, предназначенной для студентов или педагогических специалистов, не имеющих специального математического образования. Преодоление указанного разрыва – исключительно актуальная задача. В данной работе представлен материал по применению оптимизации по Парето, который связан с построением и исследованием математических моделей принятия педагогических решений. Автор ограничивается рассмотрением задач принятия решений в актуальной, не исследованной ещё области – создания и выбора педагогических альтернатив. Ограничение касается оптимизации конечного числа дискретных альтернатив наиболее простыми и наглядными способами – графическим и табличным способами с использованием количественной и порядковой шкалы. Существенным при этом является точная педагогическая интерпретация направлений предпочтения и результатов оптимизации по Парето.

Изложенный материал является предельно элементарным, но уже он свидетельствует, что оптимизация по Парето позволяет во многих случаях эффективно решать вопросы сравнения, выбора альтернатив, их оптимизации. В полной мере этот вывод справедлив как в отношении содержания обучения, так и компетенций субъектов образовательного процесса. Большое значение в оптимизации Парето играет понятие «ветра» (выбора предпочтений).

Изложенный материал доступен студентам, магистрантам, аспирантам и может использоваться в процессе организации их исследовательской работы.

1.1.2. ЗАВИСИМОСТЬ ЛМС ОТ ВЫБОРА СИСТЕМЫ АКСИОМ, ОПРЕДЕЛЕНИЙ, ТЕОРЕМ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВ

Что означает ориентация ЛМС учебника геометрии на систему аксиом? Вовсе не построение в духе оснований Д. Гильберта [25]. Говоря об ориентации изложения геометрии в школьном учебнике никто не собирается доказывать в нем теоремы типа: если точка C лежит между точками A и B, а точка D между точками A и C, то точка D лежит между точками A и B. Ориентация понимается совсем в другом смысле. В школьном учебнике необходимы прежде всего такие аксиомы, определения, теоремы и доказательства, которые:

– показывают и с т о к и образования фундаментальных геометрических понятий (точка, прямая, луч, полуплоскость, угол, равенство фигур, параллельность прямых, длина отрезка, мера угла и т.д.);

– позволяют отличать геометрические понятия не по их внешним признакам, а по свойствам (без этого затрудняется применение определений при доказательстве теорем и решении задач);

– упорядочивают геометрические понятия, приводя их в систему.

Почти через 1000 лет после Евклида Прокл (410–485 гг. н.э.) так характеризует необходимость построения такой системы: «Геометрия в целом имеет в своем составе некоторые ведущие теоремы, играющие по отношению ко всему следующему роль исходного начала; эти теоремы все собой пронизывают и дают доказательства многих свойств...

Их функции можно сравнить с функциями букв алфавита в отношении языка... И очень трудно в каждой науке отобрать и расположить в надлежащем порядке элементы, из которых все дальнейшее следует... Такого рода трактат должен быть освобожден от всего лишнего (ибо это служило бы препятствием к приобретению знания); он должен отобрать все, что охватывает предмет, и доводить это до конца (ибо это высшая услуга науке); вместе с тем должно быть уделено большое внимание ясности и точности (ибо противное служило бы помехой нашему пониманию); нужно стараться выражать теоремы в широком охвате (ибо мелочное деление делает знание недоступным восприятию). И во всем этом система Евклида превосходит все остальное... совершенство обеспечиваются тем, что она восходит от более простого к более сложному» (цит. по источ. [26, с. 37]). Высказанные комментарии имеют прямое отношение к школьному изложению геометрии. Разумеется, показывать истоки геометрии надо не формально, а в интересной форме, с примерами из окружающей среды. Различные системы аксиом обычно «по-своему» представляют эти истоки, и тем не менее, если они применяются в школьном учебнике, то все они должны отвечать сформулированным выше требованиям.

Традиционная аксиоматика – аксиоматика Д. Гильберта. Д. Гильберт [25] значительно усовершенствовал построение, заложенное в «Началах» Евклида: добавлены аксиомы порядка на прямой и плоскости (тем самым с помощью М. Паша был устранен один из существенных логических пробелов), построены строгие основания для конгруэнтности (равенства) треугольников, особое значение имеет использование аксиом Архимеда и Кантора для обоснования вопросов измерения геометрических величин, дано четкое разграничение евклидовой и неевклидовой геометрии Н. И. Лобачевского. Данная система аксиом достаточно громоздка – насчитывает более двух десятков аксиом.

Школьные учебники обычно придерживались исторического состояния уровня обоснования: приводились аксиомы принадлежности, но аксиомы порядка, как правило, в явном виде не формулировались, равенство треугольников определялось путем наложения. Тем не менее измерения геометрических величин стали излагаться гораздо строже. Некоторые авторы и эксперты видели в этом достоинство изложения, его связь с математической наукой – математическим анализом. Несмотря на трудности такого изложения для массового обучения, невозможность строгого обоснования теории действительного числа в средней школе, оно было достаточно распространенным, начиная с учебников геометрии А. П. Киселева. В рамках традиционного подхода не приветствовалось введение координатного метода в геометрии, признаки равенства треугольников заметно понижали потребность во введении движений, не ставился вопрос о включении векторов. Причина заключалась не только в инерции традиций, но и в увеличении нежелательной разнородности содержания учебника, в ограниченности ресурса учебного времени. Определенные подвижки в этом плане произошли только с введением углубленного уровня обучения и факультативных занятий. От углубленного уровня в Республике Беларусь отказались (сказалась избыточность различных организационных форм обучения, стремление сделать их излишне массовыми). Последнее обстоятельство привело к увеличению количества учащихся в классах углубленного обучения, не соответствующих целям этого обучения. Неоправданным оказалось и излишне подробное изложение в школьном курсе вопросов, которые обычно рассматривались в высших учебных заведениях.

Более рациональное построение традиционного геометрического содержания и особенно исключение нетрадиционного содержания привели к возникновению недостаточности теоретического материала для освоения выделенного учебного времени – ситуации, которая прежде не возникала никогда. В связи с этим на базовом уровне появились дополнительные вопросы традиционной геометрии (теоремы Чевы, Стюарта, Менелая и др.), которые раньше на базовом уровне не рассматривались, а если рассматривались, то в учебниках углубленного уровня, и то в качестве дополнительного материала. Однако если сравнить значимость этих теорем, например, с координатным методом в геометрии, то неравноценность такой замены совершенно очевидна.

Координатная аксиоматика евклидовой геометрии. Такая аксиоматика аксиоматизирует понятие декартовой прямоугольной системы координат. М. М. Постниковым [32] для этой цели используется всего две аксиомы. В первой аксиоме сообщается, что система координат есть биективное (взаимно однозначное) отображение множества точек плоскости на множество пар действительных чисел. Во второй аксиоме приводятся формулы перехода от одной прямоугольной системы координат к другой прямоугольной системе, которые связывают координаты точки в этих системах. Такие свойства системы координат обычно рассматриваются в любом вузовском курсе аналитической геометрии, выступая в них не аксиомами, а теоремами. Координатная аксиоматика обеспечивает изложение геометрии полностью в аналитической форме, включая традиционное содержание, векторы, геометрические преобразования и многие другие вопросы высшей геометрии.

Что касается школьного курса геометрии, то применительно к углубленному обучению возможна адаптированная аксиоматика, включающая аксиомы системы координат, которая обеспечивает с самого начала изложение геометрии в традиционно-синтетической и аналитической форме.[1] На наш взгляд, смысл в использовании такого изложения возникает больше в рамках единого, интегрированного учебного предмета «Математика» в целях обеспечения более тесных связей между геометрией и алгеброй. Лучше такого связующего средства в математике, как координаты, ничего не существует.

I (аксиома расстояния). *Любым двум различным точкам соответствует единственное положительное число, называемое расстоянием между данными точками.*

II (аксиомы системы координат на плоскости). 1. *Система координат точкам плоскости ставит в соответствие пары чисел так, что: каждой точке соответствует одна и только одна пара чисел x и y; каждой паре чисел x и y соответствует одна и только одна точка плоскости*. 2. *Пусть даны две точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. Тогда квадрат расстояния AB вычисляется по формуле $AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$.*

Из аксиом I и II следует, что расстояние между двумя точками (при выбранной единице измерения) не зависит от выбора системы координат. Понятие «прямая» в данном изложении является определяемым, что позволяет теснее связать друг с другом курсы геометрии и алгебры.

III (аксиома о выборе системы координат). *Пусть A и B – две точки, принадлежащие произвольной прямой a. Тогда оси системы координат всегда можно расположить так, что точка A будет началом координат, а точка B будет принадлежать положительной полуоси оси абсцисс.*

С помощью координат на плоскости вводятся координаты на прямой. С помощью понятия «расстояние» – понятие «точка *C*, лежащая между точками *A* и *B*». При помощи последнего вводится понятие «отрезок». Понятия «луч» и «полуплоскость» вводятся в основном на наглядной основе. Строгое изложение этого материала может быть следующим. Дадим определение выпуклой фигуры.

Если фигура содержит отрезок, соединяющий любые две ее точки, то она называется *выпуклой.*

С помощью системы координат могут быть доказаны такие следствия.

Даны прямая и принадлежащая ей точка *O.* Тогда точки этой прямой,

---

[1] Рогановский, Н. М. Учебник для 7–9-х классов общеобразовательных школ с углубленным изучением математики. Утвержден Министерством образования Республики Беларусь / Н. М. Рогановский. – Минск : Народная асвета, 1992.

отличные от точки *O*, образуют два таких множества, что: каждое из этих множеств выпукло; если точка *A* принадлежит одному из этих множеств, а точка *B* – другому, то точка *O* лежит между точками *A* и *B*.

Каждое из множеств, о которых говорится в предыдущих следствиях, называется *лучом* или *полупрямой.* Точка *O* – *начало (вершина)* этих двух лучей. Эти два луча называются *дополнительными.*

Аналогично вводится понятие полуплоскости.

IV (аксиомы измерения углов). *Каждому углу соответствует определенная положительная градусная мера. Развернутый угол равен* 180°. *Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами.*

V (аксиома откладывания угла). *От любого луча в заданную полуплоскость можно отложить угол, равный данному, и притом только один.*

VI (Аксиома о равенстве двух треугольников). Обоснование вопросов равенства треугольников упрощается принятием следующей аксиомы. *Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам ц углу между ними другого, то такие треугольники равны.*

VII (аксиомы измерения площадей). Измерение площадей фигур опирается на заключительную группу аксиом. *Каждому многоугольнику соответствует единственное положительное число, называемое площадью многоугольника. Площадь квадрата равна квадрату его стороны. Если два треугольника равны, то равны и их площади. Если многоугольник состоит из неперекрывающихся многоугольников, то его площадь равна сумме площадей составляющих его многоугольников.*

Целесообразность применения в школьном курсе системы аксиом, включающей в адаптированном виде аксиомы системы координат на плоскости, возникает при выполнении хотя бы следующих условий: а) переход на единый курс математики, интегрирующий геометрию и алгебру (вопрос, который одно время изучался в Республике Беларусь, в учебном плане до сих пор содержится только одна позиция «Математика» вместо двух позиций «Геометрия» и «Алгебра»); б) установление более тесных интегративных связей между учебными курсами геометрии и алгебры при их раздельном существовании; в) изложение координат совместно с векторами, построение которых существенно упрощается с применением координат; г) изложение учебного курса геометрии на углубленном уровне обучения и обеспечение такого обучения квалифицированными учительскими кадрами (наиболее актуальное условие, новый подход всегда требует творческих учителей, которых надо готовить ещё в университете).

Предварительных условий, как видно, набралось немало.

О построении геометрии на основе геометрических преобразований и векторов. Существовали предложения о построении курса планиметрии целиком на идее геометрических преобразований, инициатором которой явился академик А. Н. Колмогоров. В соответствии с этой идеей был написан учебник для базового уровня обучения [44]. Учебник по содержанию сильно отличался от традиционных учебников, содержал достаточно подробные сведения о движениях, преобразования подобия и их видов. Скромнее выглядели применения теоретического материала. В основном они касались изучения различных композиций геометрических преобразований. Крайне скудно было представлено применение геометрических преобразований при решении задач традиционной геометрии. Пожалуй, чрезмерное ограничение традиций решило судьбу этого учебника (как учебника базового уровня) вопреки колоссальному научному авторитету и завидной настойчивости академика А. Н. Колмогорова.

Аналогичная ситуация возникла и в отношении построения школьного учебника геометрии на основе векторной аксиоматики. Идея такого построения исходила от крупного французского математика Ж. Дьедонне, одного из участников группы Бурбаки, работавших над изложением математики на теоретико-множественных основах. В духе Ж. Дьедонне В. Г. Болтянским была написана работа [39]. Изложение больше было посвящено линейной алгебре, нежели традиционным теоремам и задачам. Ж. Дьедонне, по-видимому, в качестве возражения своим оппонентам утверждал, что такое построение геометрии не нужно пытаться как-то приспособить к учащимся, его нужно предлагать тогда, когда учащиеся созреют до него. Но как оказалось такого «созревания» не обнаружилось ни у учащихся, ни у студентов, ни у учителей.

Аксиоматика, содержащая аксиомы измерения и откладывания отрезков и углов. Идея включения аксиом измерения и откладывания отрезков и углов в школьный курс геометрии принадлежит известному математику Биркгофу, жившему вначале в Англии. В Англии его идеи не прижились, и он эмигрировал в США, где применяемый им подход к вопросам измерения геометрических величин получил широкое распространение, а позднее распространился и в других странах. В СССР его впервые применил академик А.В. Погорелов [47], позднее ряд других авторов в Российской Федерации и Республике Беларусь. Аксиомы измерения и откладывания существенно упростили на базовом уровне изложение вопросов измерения, освободили от необходимости явного использования аксиом Архимеда и Кантора, понятия предела последовательности и опоры на теорию действительного числа, которые при необходимости с той или иной полнотой должны освещаться, прежде всего, в алгебре.

1.1.3. ПОСТРОЕНИЕ ЛМС С УЧЕТОМ БАЛАНСА НАУЧНОСТИ, СТРОГОСТИ И ДОСТУПНОСТИ. В КАКИХ СЛУЧАЯХ ОПТИМИЗАЦИЯ ПО В. ПАРЕТО ДАЕТ ОТРИЦАТЕЛЬНЫЙ ОТВЕТ

О научности и строгости изложения. Школьный учебник обязан соединить в себе научность, строгость и доступность изложения. Но как соединить эти категории, которые в реальной практике создания учебника выступают как противоположности? А что если эти противоположности являются «непримиримыми»? Требуется даже больше, не только соединить, но и обеспечить их баланс. Мы уже знаем, что в школьном учебнике неизбежны определенные послабления в отношении строгости изложения.

Проблема состоит в том, какие послабления строгости допустимы, в отношении каких понятий. Эта проблема обсуждается и в специальных работах (см., например: Шень А. О математической строгости в школьном курсе математики. – М.: МЦНМО, 2006. 72 с). Классическим примером нестрогого изложения является использование «наложения» при обосновании признаков равенства треугольников. О строгости часто говорят в сочетании с такими терминами, как искусственная строгость, формальная строгость, излишняя строгость, недостаточная строгость, вынужденное нарушение строгости, грубое нарушение строгости, все нестрого, нарушение строгости по причине совершения логической или математической ошибки и т.д.

1. Часто смешивают понятия строгости и научности изложения. Ошибочно считают, что строгость и есть научность, а поскольку в школьном курсе все изложить строго невозможно, то оно не является научным. На самом деле эти понятия не являются тождественными, хотя нередко разделить их трудно и они часто действительно совпадают. Если строгостью иногда по необходимости можно поступиться, то научностью изложения поступиться никогда нельзя.

2. Послабления строгости часто связаны с тем, что не все теоремы одинаково важны. Некоторые теоремы вытекают из более крупных теорем, они называются следствиями и приводятся без доказательства.

Такие послабления встречаются довольно часто. Доказательства следствий опускаются нередко по причине необходимости сокращения общего количества доказательств. В этих случаях послабления строгости имеют место, но научность изложения не нарушена (следствия сформулированы без ошибки и после порождающих их теорем они действительно могут быть доказаны).

3. Или такая ситуация: в доказательстве выделятся несколько случаев, один (основной) случай доказывается и сообщается, что доказательства других случаев опускаются по причине их аналогичности. В этой ситуации также некоторое ущемление строгости присутствует, но научность не пострадала. Вот если в доказательстве необходимо рассмотреть несколько случаев, но они никак не обозначаются, а рассматривается только один случай, то пострадает и строгость и научность.

4. Некоторые доказательства могут опускаться (на базовом уровне обучения) по причине их сложности. Например, при решении задач удобно пользоваться формулами, выражающими медианы, высоты и биссектрисы треугольника через его стороны, но выводы их достаточно сложны (особенно для биссектрисы). Для биссектрисы соответствующую формулу можно привести без доказательства. Строгость при этом несколько пострадает, но научность не будет нарушена.

5. На базовом уровне новые темы (координаты, векторы, геометрические преобразования) могут быть представлены в сокращенном виде. Например, могут быть опущены большинство доказательств алгебраических свойств векторных операций и основное внимание уделено тем свойствам, которые необходимы при решении геометрических задач. Как и выше, строгость при этом пострадает, но научность не будет нарушена.

6. Конечно, уровни научности могут быть различными (в научной монографии один уровень, в учебном пособии другой). Но каким бы ни был уровень научности он должен оставаться научным. Нельзя искажать смысл математических понятий, нельзя допускать логические и математические ошибки в доказательствах и решении задач. Главное в этом вопросе заключается в том, чтобы избежать, особенно на базовом уровне обучения, крайностей в использовании элементов как строгого, так и нестрогого изложения. В любом случае, даже при наличии элементов нестрогого изложения оно должно всегда оставаться **научным, т.е. не приводить к искажению понятий, фактов, к логическим ошибкам, к ошибкам в формулировании определений, доказательствах теорем и решениях задач**.

7. Кроме того, помимо научности, в логическом и математическом плане существует еще **научность в психолого-педагогическом плане**. Как видно, учебник должен быть научным со стороны целого комплекса смежных наук. Различные виды научности, как правило, имеют различные направления, которые часто противонаправлены и выходом из этой ситуации является обеспечение определенного их баланса. Встречающееся иногда утверждение типа «В школьном курсе столь много неизбежных не строгостей, что стремиться в нем к какой-либо строгости вообще нет смысла. Любое изложение может быть только строгим или не строгим, третьей возможности не существует» в методологическом отношении, особенно применительно к школьному курсу, не является верным. В школьном курсе определенная не строгость допустима, можно говорить лишь о допустимой или не допустимой не строгости, об уровнях строгости и т.п. В равной мере это положение относится как к геометрии, так и к алгебре. Кроме того, было бы интересно посмотреть на работу по основаниям математики, в которой бы была обеспечена идеальная строгость. Существует ли такая работа? Скорее всего, такой работы не существует и её не может быть так, как не существует и само понятие идеальной строгости.

8. В свое время известный алгебраист А. Г. Курош в связи с алгебраизацией геометрии объявил: «Смерть геометрии!». Что тут можно сказать? Геометрия – единственная математическая наука, которая ближе всего к живой природе, и «смерть геометрии» может означать «смерть человеческого мозга». Исключать такую связь никак нельзя. Потеря научности изложения является высшим проявлением не строгости. Одним из распространенных её проявлений является смешивание различных понятий друг с другом, подмена одного понятия другим – логическая ошибка, приводящая к их путанице и реальной потере научности. Нельзя, например, смешивать и путать такие понятия, как «угол как пара лучей с общим началом» и «центральный угол окружности». Первый угол не может быть больше 180°, второй – не больше 360°. Вписанный угол окружности есть угол первого вида (хотя и со своим названием). При введении тригонометрических функций или сектора и сегмента круга используется центральный угол окружности. Переход к радианной мере естественно вначале показать для углов, рассматриваемых в геометрии, в механике, затем в алгебре обобщить на произвольную радианную меру от $-\infty$ до $+\infty$.

9. Обратимся к практике создания учебника. А. П. Киселев, например, говорил о трех качествах хорошего учебника: **точности в формули-**

ровке понятий, **простоты в рассуждениях** и **сжатости в изложении**. Точность − это соответствие смыслу, сжатость − сжимание без потерь, в том числе без потерь научности и доступности. Необходимость этих качеств учебника сомнений не вызывает, однако способы их обеспечения еще не достаточно определены. Определенную ясность в характеристику упомянутых качеств учебника вносят конкретные примеры, разработанные в практике его создания.

В частности, при введении аксиом измерения геометрических величин традиционно рекомендуется общий подход: вводится единица измерения геометрической величины; затем числовое значение этой величины определяется как число, которое показывает, сколько раз единица измерения и её десятичные части помещаются в измеряемой величине. Например, утверждение «длина отрезка равна 2,35» означает, что единичный отрезок и его десятые и сотые части помещаются в данном отрезке соответственно два раза, три раза и пять раз. Иначе говоря, отношение длины измеряемого отрезка к длине единичного отрезка равно 2,35.

Значимость последнего утверждения подчеркивается тем, что если числовое значение длины отрезка зависит от выбора единичного отрезка и не является постоянным для отрезка, то, напротив, отношение отрезков уже не зависит от выбора единичного отрезка. Это объясняет фундаментальность понятия отношения, понятий и теорем, связанных с ним (обобщенной теоремы Фалеса, подобия треугольников, элементов тригонометрии). Знакомство учащихся с независимостью отношения отрезков от выбора единицы измерения с самого начала вносит ясность в процесс измерения и в обоснование названных выше крупных разделов школьного курса геометрии. В формализованном виде этот подход применяется в учебнике [47] и оправдывает себя при углубленном уровне обучения. Более доступное и краткое обоснование его делает возможным более раннее изучение обобщенной теоремы Фалеса и подобия треугольников. Положительным является также тот факт, что оказывается возможным сблизить изложение родственных понятий равенства и подобия треугольников (традиционно значительно удаленных друг от друга в ЛМС), сократить временную дистанцию между ними, коренным образом изменить возможности применения соответствующих математических методов при решении содержательных геометрических задач.

Еще раз подчеркнем, что раннее введение обобщенной теоремы Фалеса, определения подобных треугольников и первого признака подобия треугольников позволяет упростить доказательство теоремы Пифагора (одной из центральных геометрических теорем), свойства биссектрисы треугольника, раньше ввести собственно геометрические способы решения задач на вычисление и доказательство. Без обобщенной теоремы Фалеса продолжительное время приходится решать вычислительные задачи алгебраическим способом (типа найти величины по их сумме и разности). Все эти задачи являются больше арифметическими или алгебраическими, чем геометрическими, геометрической является только их фабула. Безусловно, это сильно обедняет геометрическую составляющую задач и плохо готовит их к применению собственно геометрических методов в следующих классах.

Отметим также, что более раннее введение обобщенной теоремы Фалеса позволяет сблизить в общей структуре учебного курса такие фундаментальные геометрические понятия, как понятие равенства и подобия треугольников, упростить на их основе введение теоремы Пифагора, элементов тригонометрии и координатного метода. Более тесно связанным оказывается курс геометрии с пропорциями, которым уделяется значительное внимание в предыдущих классах и о которых потом почти забывают в последующих классах. В итоге создаются условия для своевременного введения самых эффективных геометрических методов решения задач – метода равенства треугольников, метода пропорциональных отрезков, метода подобия, теоремы Пифагора, а в последующем – элементов тригонометрии.

Сохранение научности – естественный предел снижения уровня строгости. Многие определения геометрических понятий имеют глубокие исторические корни. Выдающийся специалист по основаниям геометрии В. Ф. Каган по поводу определений в «Началах» Евклида (точка, линия, прямая, поверхность, граница, плоскость, плоский угол, прямолинейный угол) отмечает: «Приводимые определения не только составляют самое слабое место во всем сочинении, но в известной мере являются источником большинства его дефектов» [26, с. 41]. Без какого-либо преувеличения можно сказать, что подобное влияние «Начал» Евклида прослеживается до сих пор в некоторых ныне действующих учебниках геометрии.

Сокращение содержания достигнуто, если дальнейшее сокращение приводит к потере целостности его ЛМС. Сокращение как самоцель часто порождает новые трудности, связанные, например, со снижением доступности – отсутствием в должной мере пояснений, дополняющих формальное изложение.

В каких случаях оптимизация В. Парето дает отрицательный ответ. Рассмотрим введение понятий в учебнике геометрии А. П. Киселева [42] с позиции оптимизации Парето, с позиции критериев обеспечения научности и строгости (предупреждаем: взяты не самые лучшие примеры, которые, к сожалению, иногда «проникают» и в современные учебники). В этом учебнике вводятся следующие понятия и используются термины:

(1) «прямая конечная», «прямая бесконечная», «прямая неограниченная», прямая называется полупрямой (с. 5), на с. 18 медиана и биссектриса треугольника определены как «конечные прямые»;

(2) на с. 6 неудачно сформулировано предложение, которое дезориентирует учащихся (при измерении отрезков могут получиться числа «целые и дробные»);

(3) на с. 6 совсем непонятное предложение «Всякую часть плоскости можно наложить всеми ее точками на другое место той или иной плоскости, причем накладываемую часть можно предварительно перевернуть другой стороной», на с. 18 «сторона *AB* упадет на *BC*», на с. 20, формулируя определение равных фигур, говорится, что они должны быть «вполне совмещены»;

(4) на с. 8 некорректно сформулировано определение внутренней области угла, на с. 9 утверждается, что «внутренняя область развернутого угла составляет половину плоскости»;

(5) на с. 13 перпендикуляром к прямой называется луч, на с. 18 отрезок, на с. 19 утверждается, что прямая *BD* есть биссектриса угла, раньше наклонная была лучом, а на с. 27 стала отрезком;

(6) определение окружности не вызывает замечаний ни с точки зрения научности, ни с точки зрения строгости.

Оценим научность и строгость приведенного выше материала. Напомним, что множество Парето является, прежде всего, множеством баланса и компромиссных решений.

Критерии сравнения:

p_1 – ориентация изложения учебного материала на обеспечение научности;

p_2 – ориентация изложения учебного материала на обеспечение строгости.

Возможные состояния критериев, построение порядковой шкалы:

а) критерий доминирует при введении данного понятия. Такой критерий будет занимать самое высокое место. Номер места будет равен общему количеству мест;

б) критерий не применяется или применяется совсем в небольшом количестве. Такой критерий будет занимать самое низкое место под номером 1;

в) промежуточное состояние: ни один из критериев не доминирует, но присутствует с определенным перевесом. Критерий занимает промежуточное место.

Так как для критериев выделено всего три состояния, то состоянию а) присвоим номер 3 (самый высокий номер), состоянию б) – номер 1 (самый низкий номер), состоянию в) – номер 2 (промежуточный номер). Порядковая шкала построена, теперь можно перейти к ее использованию.

Обозначим альтернативные варианты – кандидаты на включение в множество Парето. Учтем, что в множество Парето не включаются альтернативы с одинаковым состоянием критериев (одинаково хороших или одинаково плохих). В нашем примере общее число кандидатов сокращается на основании именно этого свойства множества Парето:

<table>
<tr><th></th><th>Состояние критерия p_1</th><th>Состояние критерия p_2</th><th>Альтернативы</th><th>Сравнение альтернатив</th><th>Обоснование</th></tr>
<tr><td>(1)</td><td>1</td><td>1</td><td>A1(1, 1)</td><td>$A1 \notin P$</td><td rowspan="5">Альтернативы А1– А5 исключаем как одинаково плохие по обоим критериям. Графически эти альтернативы изображаются одной точкой А(1; 1), которая не принадлежит множеству Р по указанной причине.</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>1</td><td>1</td><td>A2(1, 1)</td><td>$A2 \notin P$</td></tr>
<tr><td>(3)</td><td>1</td><td>1</td><td>A3(1, 1)</td><td>$A3 \notin P$</td></tr>
<tr><td>(4)</td><td>1</td><td>1</td><td>A4(1, 1)</td><td>$A4 \notin P$</td></tr>
<tr><td>(5)</td><td>1</td><td>1</td><td>A5(1, 1)</td><td>$A5 \notin P$</td></tr>
<tr><td>(6)</td><td>3</td><td>3</td><td>A6(3, 3)</td><td>$A6 \in P$</td><td>А6 оставляем как лучшую по обоим критериям.</td></tr>
<tr><td colspan="6">Вывод. Р = А6. Как видно, промежуточные состояния критериев совсем оказалось не использованным. Это означает, что ни одна из альтернатив А1–А5 не входит в множество Парето. Пришли к наихудшему, но ожидаемому с самого начала выводу. Для нас этот пример имеет значение ещё потому, что он подтверждает правильность алгоритма нахождения множества Парето и в таком «крайнем» случае. Результаты объективного анализа, субъективного опыта и интуиции совпадают и показывают, что в современных учебниках подобные ситуации недопустимы.</td></tr>
</table>

Достаточно сложно (в том числе и в ряде действующих в настоящее время учебниках) вводится **определение угла**. Рассмотрим этот вопрос подробнее. При определении понятия угла в научной литературе и школьных учебниках существуют следующие подходы.

Первое определение: угол – пара лучей, выходящих из одной точки. В этом случае угол определяется однозначно, угол не может быть больше 180° (Д. Гильберт [IV. 4, с. 68]). По трехступенчатой градации это определение – пример самой высокой научности и самой высокой строгости (добавим – при сохранении самой высокой доступности). Но и тут не все так просто. В учебнике Н. Н. Никитина, например, приводится определение угла по Гильберту, далее предлагается учащимся нарисовать угол и вырезать его из бумаги и сообщается, что в результате получили не один угол, а два. В итоге создалась путаница из двух разных определений угла.

Второе определение: угол – пара лучей, выходящих из одной точки, вместе с какой-либо частью плоскости, на которые пара лучей разбивает плоскость. В этом случае пара лучей задает два угла, в зависимости от того, какая часть плоскости выбирается. При этом о каком-либо правиле выбора не упоминается. В результате определение однозначно угол не задает. Становится неверным утверждение, что при пересечении двух прямых образуется четыре угла. Под определение смежных углов подходят углы, сумма градусных мер которых равна 180° и больше 180°. Под определение вертикальных углов подходят как равные, так и неравные друг другу углы. Углы с соответственно параллельными и одинаково направленными сторонами могут быть равными и неравными. Неверным становится утверждение о том, что каждый угол можно отложить на луче в заданную полуплоскость и т.п. Чтобы устранить эти коллизии, в некоторых учебниках сразу после определения угла указывается, что из двух частей плоскости выбирается «меньшая» (см., например, учебник В. Ф. Шарыгина [55, с. 35]). В этом случае нарушения научности не происходит, можно говорить о некотором нарушении строгости.

Третье определение (обычно в учебниках по основаниям геометрии): угол – пара лучей, выходящих из одной точки вместе с её внутренней областью. При этом внутренняя область определяется как: а) пересечение двух полуплоскостей, каждая из которых задается стороной угла и содержит другую сторону угла; б) выпуклая фигура, такая, что отрезок, соединяющий любые две её точки, не пересекает стороны угла. В этих случаях угол определяется однозначно и указанные выше коллизии не возникают. Исключение составляет развернутый угол, для него любая из полуплоскостей может быть выбрана в качестве внутренней области, тогда другая считается внешней. Обычно внутренней областью негласно считают полуплоскость, в которой выполняются некоторые построения: проводится луч, делящий развернутый угол в заданном отношении, проводится биссектриса развернутого угла и т.п. Можно считать, что нарушения научности и строгости в данном случае не происходит.

Четвертое определение. Высказывание В. Ф. Кагана в адрес «Начал» Евклида в определенной мере относится к некоторым школьным учебникам, действующим в настоящее время. В учебном пособии [41] уже на с. 10 (страницы указаны по 1-му изд.) вводится термин «плоский угол» (хотя ничего не сказано о «неплоском» угле в планиметрии). Далее, на с. 33–34 в тексте и на рисунках подчеркивается, что пара лучей образует два угла в зависимости от того, какая часть плоскости берется. Приводится рисунок, на котором изображены углы в 60°, 90°, 120°, 270°, 360° с соответствующей закрашенной частью плоскости, вводится термин «полный угол». Говоря о двух углах, ничего не говорится, какими отличительными признаками обладают эти углы, что порождает нечеткость в их употреблении. Например, приводится аксиома измерения углов: «Если внутри угла из его вершины провести луч…» (с. 34). Однако, что такое «внутри угла» никак не объясняется, части плоскости, ограниченные лучами, никак не характеризуются. Без пояснений часто используется и понятие «луч проходит между сторонами угла». Совершенно непонятно, какие две части плоскости надо иметь в виду для полного угла. На с. 33 утверждается, что «другая (не закрашенная) полуплоскость относительно прямой *AC* также задает развернутый угол *ABC*». Данное предложение с точки зрения математики нельзя признать удачным (полуплоскость может быть одна и та же, а вершина развернутого угла может быть выбрана на границе полуплоскости как угодно). Далее следует более крупная некорректность. После аксиомы измерения углов приводится аксиома откладывания угла (с. 34 в 1-м изд. и с. 37 во 2-м изд.): «От любого луча в данную полуплоскость можно отложить угол…». Как понимать выражение «отложить в данную полуплоскость угол», если он «не вмещается в полуплоскость»? Как, например, отложить в полуплоскость угол, равный 270°? Отметим, что во 2-м издании указанного учебника все это занимает «достойное» место. Корректно и понятно эта аксиома сформулирована в учебнике А. В. Погорелова: «От любой полупрямой в заданную полуплоскость можно отложить угол с заданной градусной мерой, м е н ь ш е й 180°, и только один» [47, с. 13] (разрядка наша – Е. Р.). В учебнике А. В. Погорелова при введении понятия угла используется первое определение. Угол с самого начала меньше 180°, тем не менее для ясности в аксиоме откладывания угла подчеркивается, что откладываемый угол меньше 180° (методически такая формулировка целиком и полностью оправданна, хотя логически делать это было необязательно). И после всех перечисленных «нюансов» в учебнике [41] сообщается, что в дальнейшем из двух углов будем рассматривать меньший из них. Сообщение, как видно, запоздалое, так как до него наделано немалое количество огрехов. Эти же «огрехи» сохранились и во 2-м издании учебника. Формулировкам определений в учебнике необходимо уделять больше внимания, так как с их помощью доказываются теоремы (и все «нечеткости» переносятся в весьма обширную область). Не менее важно – с помощью определений формируется математическая речь учащихся.

- Четкости математического языка не способствуют явно неудачные формулировки и обороты речи (приведем примеры из 2-го изд. учебника [41]): «Определение. Перпендикуляром к данной прямой называется отрезок, который лежит на прямой, перпендикулярной данной, один из концов которого (основание перпендикуляра) является точкой пересечения этих прямых» (с. 47); «*MK* – перпендикуляр, опущенный на прямую *a*, рис. 89» (с. 47); «Перпендикуляр, опущенный из точки *M* на прямую *a*» (с. 48); «... перпендикуляр, восстановленный (восставленный) к прямой *a*» (с. 48); «перпендикуляр из данной точки к данной прямой» (с. 52). Не проще ли во всех случаях говорить о «перпендикуляре, проведенном из данной точки к данной прямой»? А вот еще примеры: «Если сложить углы *ABF* и *CBD*, то получится угол *ABC* плюс угол *DBF*» (с. 38 в 1-м изд., с. 39 во 2-м изд.); «Найдите величину угла, обозначенного знаком вопроса» (с. 108).

- Часто, стремясь к строгости, приводят громоздкие определения. Примером может служить определение **ломаной**. При всей его громоздкости оно все равно остается некорректным. Требования «никакие два соседних звена не лежат на одной прямой» недостаточно. Необходимо добавить «и нет звеньев, таких, когда одно из звеньев является частью другого». При этом сложную формулировку удобнее разбить на отдельные предложения. Например: *Ломаной* называется геометрическая фигура, состоящих из отрезков, для которых конец первого отрезка служит началом второго отрезка, конец второго отрезка – началом третьего отрезка и т.д. При этом требуется также, чтобы никакие соседние отрезки не лежали на одной прямой и любой отрезок не являлся частью другого отрезка.

Выводы. Приведенный анализ свидетельствует, что некоторые учебники содержат полный комплекс нарушений научности и строгости изложения учебного материала. А ради чего? Ради доступности. Так это неверно. Никогда путаное и с ошибками изложение не может быть оправданно какой-либо «доступностью». В учебнике ошибок не должно быть – даже одна ошибка это все равно, что «в бочку меда – ложку дегтя, всю бочку испортишь». Уже одна ошибка превращается в массовую ошибку, так как она тиражируется огромным количеством субъектов образовательного процесса. Даже если некоторая ошибка исправлена в последующем издании за пять лет существования издания она уже принесла большой вред.

1.1.4. О ПОСТРОЕНИИ ТЕОРИИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ: ТРАДИЦИИ И ИННОВАЦИИ

Возможны следующие **виды регулирования сложности системы изложения теоретического содержания, в частности, доказательств теорем**:

а) в рамках традиционной последовательности учебных тем и традиционной последовательности содержания внутри тем;

б) в рамках традиционной последовательности учебных тем за счет изменения последовательности содержания внутри тем;

в) за счет изменения традиционной последовательности тем.

Особенно ценными являются упрощения доказательств за счет изменения последовательности содержания учебного материала, приводящей к новой, более компактной ЛМС. Диапазон выбора ЛМС расширяется, создаются условия для выбора её оптимального варианта.

Сложной в 7 классе остается ситуация с научностью и строгостью построения теории равенства треугольников, с доказательством признаков их равенства.

1. а) **«Доказательства» «наложением» – традиция, идущая со времен Евклида.** Ситуация настолько «хроническая», настолько «освящена» традициями столетий, что создается убеждение, что изменить её невозможно. Особенность ситуации состоит в том, что признаки равенства треугольников, по существу, приводятся в самом начале курса геометрии.

Вместо строгих доказательств используется «наложение» (для первых двух признаков) и «приложение» (для третьего признака). Общеизвестно, что эти обоснования не являются строгими, однако учащимся они подаются как строгие с употреблением слов «теорема» и «доказательство», а в методике не всегда вскрывается степень нестрогого изложения, которая, по нашему мнению, доходит до границ недозволенного, т.е. вступает в грубое противоречие с научностью изложения. Примечательно, что в учебниках накопилось большое разнообразие обоснований равенства треугольников путем «наложения», цель которых одна – выдать совершенно нестрогое рассуждение за строгое. А поскольку равенство треугольников присутствует в каждой геометрической теме, то тем самым «мина» закладывается под весь школьный курс геометрии.

б) **Наложению треугольников предпосылается довольно обширный предварительный материал** (см.: [46]). Вначале с помощью совмещения определяется равенство отрезков и углов. Затем рассматриваются рисунки треугольников, имеющих один равный элемент, два равных элемента, равными две стороны и углы между ними. После последнего случая делается вывод «получили равные треугольники, т.е. у полученных треугольников оказались равными и остальные стороны и углы» (с. 52). Вот это «т.е.» означает, что авторы переключились уже на другое определение равных треугольников (определение по Гильберту). Заметим, что другого, «специального» определения равенства треугольников ни раньше, ни в данном месте вообще не приводится. На фоне определений равенства отрезков и углов такое «отсутствие» выглядит, мягко говоря, довольно странно. После этого переходят к трем признакам равенства треугольников. Говорится «Построим два треугольника» (с. 52). На самом деле приводится просто готовый рисунок, никакие построения не делаются и словами ничего не поясняется. Далее описывается наложение треугольников со всеми особенностями, указанными в предыдущем варианте. Психологической убедительности такое изложение, конечно, добавляет. Хотя объем текста при этом увеличивается, но четкого определения равенства треугольников тем не менее не приводится. Более того, допущено смешивание двух определений. После трех признаков равенства треугольников говорится о его свойстве жесткости. Если бы о нем упомянули перед наложением треугольников, то наложение выглядело бы более убедительным.

в) **Понятие наложения вводится сразу для произвольных фигур** (см.: [40]). На с. 15 через наложение дается определение равенства произвольных геометрических фигур. Приводятся рисунки к этому общему понятию, в том числе сказано «Примерами равных фигур могут служить многие предметы: две одинаковые монеты, два одинаковых чайника» (с. 16). Интересно, как можно наложением совместить эти объемные предметы, особенно чайники? Что должен понимать ученик? Далее наложением доказывается свойство углов при основании равнобедренного треугольника (с. 33). В отличие от Евклида применяется копирование одного треугольника на прозрачный лист бумаги. Обратная теорема и свойства высоты равнобедренного треугольника доказываются таким же способом. Далее, с помощью уже мысленного наложения доказывается первый признак равенства треугольников. На рисунке приводятся только одинаково ориентированные треугольники (с. 40). Не ясно, согласуется ли приводимый текст доказательства для случая, когда треугольники имеют противоположную ориентацию. Аналогичные замечания к доказательствам второго и третьего признаков равенства треугольников. С помощью наложения доказывается равенство противоположных сторон прямоугольника (с. 47). Как видно, в этом учебнике наложение применяется не меньше, чем у самого Евклида и содержит все элементы нестрогого изложения, причем столь настойчивая «систематичность» заметно снижает научную ценность содержания.

2. Доказательства, не использующие наложение.

а) В учебнике [45] приводится определение равенства треугольников в духе Д. Гильберта, сформулированного несколько в других терминах (с. 126). На с. 132 все три признака сформулированы как аксиомы: приводится и сам термин «аксиома», и все необходимые рисунки. Сделано все намного проще, честнее и понятнее.

б) Примером строгого изложения служит книга А. В. Погорелова (Элементарная геометрия. – М., 1974 г., 208 с.), предшествующая школьному учебнику этого автора. В ней 1-й признак равенства треугольников принят в качестве аксиомы, для 2-го и 3-го признаков приводятся полноценные логические доказательства, пригодные (что особенно существенно отметить) для любой ориентации треугольников.

Заметим, что на возможность принятия 1-го признака равенства треугольников в качестве аксиомы указывал еще в 1908 г. выдающийся математик Ф. Клейн (Клейн, Феликс. Элементарная математика с точки зрения высшей : в 2-х томах. Т. 2 : Геометрия. Пер. с нем; под ред. В. Г. Болтянского. – 2-е изд. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1967. – С. 268–269).

в) На наш взгляд, прием отнесения одного из признаков равенства к аксиомам для школьного учебника является весьма привлекательным [48]. Повышается роль этого признака в логической системе, отпадает необходимость в достаточно сложном доказательстве в начале учебного предмета, появляется возможность более рационального построения ЛМС. Два других признака получают при этом обычные по сложности доказательства, которых немало в школьном курсе. В методике известен метод «подводящих задач», который используется для облегчения введения того или иного материала. Д. Пойа называет этот метод «методом вспомогательных задач». Этот метод при необходимости применим и в данном случае – с целью подготовки учащихся к доказательству признаков равенства треугольников и облегчения их восприятия.

г) Еще лучше, если в качестве определения принимается 3-й признак равенства треугольников, а 1-й признак в качестве аксиомы. 2-й признак после этого доказывается сравнительно легко, а вопрос об изложении всех трех признаков максимально упрощается (Н. М. Рогановский).

д) Позже в школьном учебнике [47] этот признак отнесен А. В. Погореловым к теоремам, а в качестве аксиомы принята аксиома о существовании (об откладывании) треугольника, равного данному треугольнику. В логическом плане оба варианта равноценны. Алексей Васильевич неоднократно справедливо подчеркивал, что ему удалось достичь простого и строгого изложения. Методисты в печати распространили мнение, что учебник предназначен в основном для использования после объяснения учителя, чем создали неправильный имидж учебника как особо сложного, что совершенно не соответствует действительности: все учебники математики не отменяют учителя, и данный учебник не требует какой-то особой его роли.

е) В учебнике под ред. А. Д. Александрова 3-й признак равенства треугольников принят в качестве аксиомы. Это сделано и в учебнике Н. М. Рогановского. С помощью этой аксиомы доказываются другие два признака.

ж) Нетрудно убедиться, что принятие 2-го признака равенства треугольников в качестве аксиомы также позволяет с ее помощью доказать остальные признаки.

и) После трех признаков равенства треугольников равенство произвольных фигур можно определить следующим образом: две фигуры называются **равными**, если между их точками можно установить соответствие, при котором треугольник, соединяющий любые три точки одной фигуры, равен треугольнику, соединяющему три соответственные точки другой фигуры.

Выводы. Как видно, в обеспечении простоты и строгости достигнуты серьезные достижения, но до школьного учебника они по-прежнему не доходят. Может быть потому, что для этого надо делать ссылки на других авторов, но у нас почему-то делать такие ссылки не принято, наверное, потому что обходиться заимствованиями без ссылок проще.

1.1.5. НОВЫЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ЕДИНСТВЕННОСТИ ПРЯМОЙ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ДАННУЮ ТОЧКУ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНО ДАННОЙ ПРЯМОЙ

Учебник А. П. Киселева. Достаточно трудоемким является доказательство значимой в построении ЛМС теоремы о единственности прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данной прямой. Как уже отмечалось, научность, строгость и сложность доказательства любой теоремы зависит от общей последовательности изложения теорем, от места их рассмотрения в логической системе. Существуют различные подходы, вызванные определенными затруднениями в отыскании приемлемого доказательства. У Евклида эта теорема вообще отсутствует. В современном переиздании раннего учебника геометрии А. П. Киселева [42, с. 26] эта теорема приводится сразу после измерения углов, еще до 1-го признака равенства треугольников. Используется при этом воображаемый эксперимент с перегибанием листа бумаги. Используется он и в учебнике [41], хотя сам А. П. Киселев впоследствии от него отказался. Приведенное доказательство привлекает наглядностью, естественностью рассуждений, хотя описание эксперимента неизбежно оказывается довольно громоздким и в словесной форме трудно воспроизводимым для учащихся.

В более поздних изданиях учебника единственность перпендикулярной прямой А. П. Киселев стал вводить после теоремы о внешнем угле треугольника. Применение этой теоремы максимально упростило доказательство.

Новое доказательство теоремы о единственности перпендикулярной прямой. Оно предполагает два случая: $M \in AB$, $M \notin AB$. В первом случае теорема доказывается с помощью аксиомы об откладывании угла, равного данному углу. Определенную трудность, как отмечалось выше, представляет собой доказательство теоремы для второго случая. Иногда второй случай откладывается на определенный промежуток и рассматривается после введения необходимого материала (см. учебник А. В. Погорелова). Имеется возможность упростить доказательство второго случая, не откладывая его «на потом». Если данную теорему рассматривать сразу после 1-го признака равенства треугольников, то доказательство для второго случая нетрудно свести к первому случаю (в точке, лежащей на прямой, оказываются проведенными две различные прямые, перпендикулярные данной прямой).

Наиболее простое доказательство. Вначале с помощью 1-го признака равенства треугольников доказывается, что внешний угол треугольника больше каждого внутреннего угла, не смежного с ним; после этого единственность перпендикулярной прямой получается как непосредственное следствие из теоремы о внешнем угле треугольника. К такому изложению (правда, не сразу) пришел и А. П. Киселев (см. выше или гл. 2).

1.1.6. О НАУЧНОСТИ И СТРОГОСТИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ ПРИЗНАКОВ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПРЯМЫХ

В школьных учебниках существуют различные доказательства признака параллельности двух прямых.

Первое доказательство. Представляет интерес доказательство в учебнике [48]. Пусть $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$ – накрест лежащие углы. Требуется доказать, что $a \parallel b$. Допустим, что a и b не параллельны и пересекаются в точке X (рис. 1.9). Получим ΔABX. Отложим отрезок $AY = BX$, проведем отрезок BY, получим ΔBAY. Эти треугольники равны по 1-му признаку. Из их равенства следует, что $\angle 5 = \angle 1$. Так как и $\angle 2 = \angle 1$, то $\angle 5 = \angle 2$. Получили противоречие: часть угла не может быть равна углу. Сделанное допущение неверно, значит, $a \parallel b$.

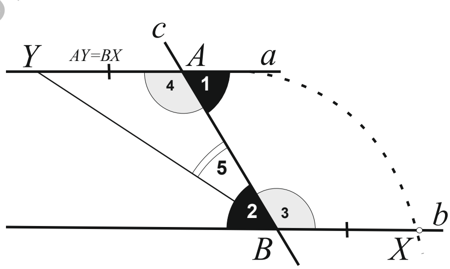


Рис. 1.9

Второе доказательство. Оригинальное доказательство приводится в учебнике [56]. Пусть $\angle 1 = \angle 2$. Докажем, что $a \parallel b$ (рис. 1.10а). Для этого из середины O отрезка AB проведем перпендикуляр OM к прямой a и отложим на прямой b отрезок $BN = AM$. Докажем, что OM и ON лежат на одной прямой.

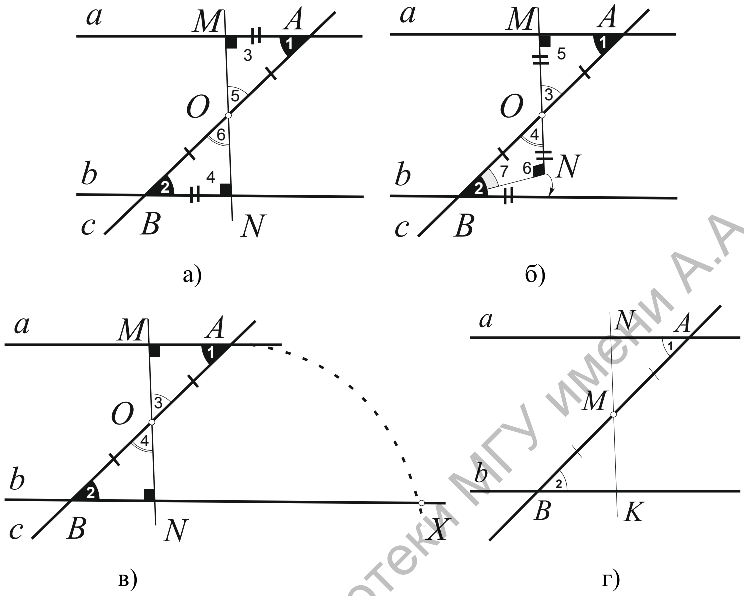


Рис. 1.10

В самом деле $\Delta OAM = \Delta OBN$ по 1-му признаку; из их равенства следует, что $\angle 3 = \angle 4 = 90°$. Теперь рассмотрим углы 5 и 6. Так как стороны OA и OB лежат на одной прямой и $\angle 5 = \angle 6$, то другие стороны этих углов (OM и ON) также лежат на одной прямой (предложение, обратное теореме о равенстве вертикальных углов, которое, к сожалению, не всегда выделяется в учебниках). Отсюда следует, что прямые a и b перпендикулярны к одной и той же прямой MN. Поэтому $a \parallel b$.

Третье доказательство (еще одно новое доказательство). Достаточно строгим и простым является следующее доказательство. Пусть при пересечении прямых a и b секущей c образовались равные накрест лежащие углы (рис. 1.10б): $\angle 1 = \angle 2$. Докажем, что $a \parallel b$. Отметим точку O – середину отрезка AB. Из точки O проведем перпендикуляр OM к прямой a. На продолжении OM за точку O отложим отрезок $ON = OM$. Построим ΔBON. $\Delta AOM = \Delta BON$ (как по 1-му, так и по 2-му признаку равенства треугольников). Тогда $\angle 6 = \angle 5 = 90°$ и $\angle 7 = \angle 1 = \angle 2$.

Точка $N \in b$. В противном случае оказалось бы, что из двух равных углов ($\angle 2$ и $\angle 7$) один из них является частью другого. Это противоречит следствию из аксиом измерения углов. Тогда получаем, что a и b перпендикулярны к прямой MN и на основании следствия из единственности перпендикулярной прямой $a \parallel b$.

Четвертое доказательство. Предложим доказательство, которое, как и предыдущее, по-видимому, не встречается в научной и учебной литературе. Допустим, что прямые a и b пересекаются в точке X (рис. 1.10в). Из середины O отрезка AB проведем прямую $OM \perp a$. Рассмотрим прямую OM и ΔABX. Так как прямая OM пересекает сторону AB треугольника ABX и не пересекает сторону AX (так как пересекает продолжение стороны AX), то на основании следствия из аксиомы полуплоскости прямая OM пересекает сторону BX и, значит, прямую b в некоторой точке N. Далее, как и выше, получаем, что $\Delta AOM = \Delta BON$ (по 2-му признаку равенства треугольников), $\angle 6 = \angle 5 = 90°$. Поэтому $a \parallel b$ (как две прямые, перпендикулярные к прямой MN). Утверждения $a \nparallel b$ и $a \parallel b$ противоречат друг другу. Следовательно, допущение $a \nparallel b$ неверно. Значит, $a \parallel b$.

Дополнительное замечание о допустимой и недопустимой строгости изложения. На фоне предыдущих доказательств определенные вопросы вызывает доказательство в 1-м издании учебника [41, с. 88]. Приведем его. Из середины M отрезка AB опустим перпендикуляр MK на прямую b (рис. 1.10г) и продлим его до пересечения (подчеркнуто нами. – *Е.Р.*) с прямой a в точке N. Треугольники BKM и ANM равны по стороне и двум прилежащим к ней углам ($AM = MB$, $\angle 1 = \angle 2$ по условию, $\angle BMK = \angle AMN$ как вертикальные). Из равенства треугольников следует, что $\angle ANM = \angle BKM = 90°$. Тогда прямые a и b перпендикулярны прямой NK. А так как две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны между собой, $a \parallel b$.

Особенность этих рассуждений состоит в том, что без обоснования утверждается, что прямая MK, перпендикулярная к прямой b, пересечет прямую a. Логический пробел налицо, вопрос состоит в том, является ли он оправданным. В самой теореме требуется выяснить, пересекаются ли прямые a и b или они параллельны. Внутри доказательства возникает схожая ситуация с прямыми MK и a, но доказательство при этом не приводится. Так как в 1-м издании учебника [41] отсутствует предложение, на которое можно было сослаться, то, на наш взгляд, осталась без обоснования самая существенная и нетривиальная часть доказательства.

Отметим, что в научных и учебных источниках по-разному, но всегда этот момент доказывается. Логическая четкость отсутствует и во 2-м издании учебника [41]. Безусловно, это не лучшим образом сказывается на качестве учебника.

Наиболее простое доказательство данного признака дает применение теоремы о внешнем угле треугольника. Такое доказательство приведено ещё в «Началах» Евклида. Это еще раз подчеркивает роль теоремы о внешнем угле треугольника в упрощении доказательств.

Не всё зависит от школьного учебника: о научности содержания вузовского учебного пособия «Методика преподавания математики». Принцип научности в обучении полностью относится к данному вузовскому курсу, играющему особую роль в профессиональной подготовке учителя математики. На достаточно высоком уровне этот принцип реализовывался в учебных пособиях прошлых лет (С. Е. Ляпина, В. М. Брадиса, В. В. Репьева, Н. В. Метельского и др.). К сожалению, положительный отечественный опыт не всегда поддерживается (см., например, учебное пособие О. Н. Пирютко «Методика преподавания математики». Мн. Народная асвета, 2023).

- Вызывает вопросы сам отбор учебной информации и способ оформления текстов. В данном пособии нет отдельных тем, посвященных таким важным вопросам, как методика обучения теоремам и их доказательствам, решению задач, методика разработки и проведения урока математики, организация факультативных занятий, изучения натуральных чисел в пятом классе и т.д.
- Применена многоколоночная форма текста, обычно используемая в газетах и журналах. В учебных пособиях ее применение, как правило, носит ограниченный характер. Двух колоночное изложение в единичных случаях применяется для сравнения определений и теорем (еще А. П. Киселевым). Применяются многоколоночные таблицы с большим количеством числовых данных. Многоколоночное изложение обычно рекомендуется для плохо систематизированного материала. В большинстве случаев, особенно при потере чувства меры, изложение в виде параллельных колонок мешает восприятию текста. Против изложения многими колонками многоцелевого учебного материала категорически выступают психологи. Кроме того, оно противоречит традициям народов, у которых принята строковая форма записи, формирующая свои особенности восприятия и осмысления текста.
- Для пособия характерно путаное, порой недостоверное изложение учебного материала. Остановимся лишь на некоторых примерах:

1) На с. 9, отмечая связь МПМ с логикой, перечисляются логические понятия, такие как выражение, теорема, доказательство, правило вывода, и сюда же отнесено понятие уравнения. Возникает вопрос, а что тогда представляет собой математическое понятие? 2) На с. 8, говоря о связи математики с другими школьными предметами, начинают с географии и биологии, физика стоит на третьем месте, а информатика после химии на последнем месте. В то время как самыми близкими математике школьными предметами являются, безусловно, физика и информатика. 3) На с. 12 в категоричной форме утверждается, что реформа в СССР среднего математического образования в 70-х годах XX столетия была неудачной. С такой категоричностью согласиться нельзя. Позитивные её результаты подтверждаются тем, что многие учебники (для 5–6 кл., по алгебре для 7–9 кл. и алгебре и началам анализа для 10–11 кл.) были достаточно удачными уже потому, что современные учебники, так или иначе, продолжают идеи, заложенные в период реформы. Больше нареканий вызвали учебники геометрии. Но учебник по планиметрии вызвал столько нареканий не потому, что методически оказался на низком уровне и недоступным учащимся, основная причина – в новизне для учителя способа изложения учебного материала на основе геометрических преобразований. Неподготовленность учителей к этой новизне, отсутствие навыков применения нового похода сделали обучение малодоступным и сказались на его неудовлетворительных результатах. Если бы учителя предварительно лучше были подготовлены, таких результатов бы не было. 4) На с. 13 утверждается, что признание МПМ наукой связано с учебным курсом для пединститутов И. В. Арнольда «Теоретическая арифметика» (1937 г.). Но на самом деле это учебное пособие по основаниям арифметики, в нем не говорится вообще об обучении кого-либо и о средней школе. Позже возникала аналогичная ситуация. На соискание степени доктора педагогических наук по методике преподавания математики В. И. Костиным выдвигалось блестящее пособие для пединститутов «Основания геометрии» (1948 г.), но было принято решение за учебные пособия степень не присуждать. Это решение действует до сих пор. Так что отсчет возникновения МПМ как науки от И. В. Арнольда по меньшей мере является надуманным. А как быть с тем вкладом, который внесли I-й (1912 г.) и II-й (1914 г.) Всероссийские съезды преподавателей математики? На первом из них были представлены фундаментальные доклады С. И. Шохор-Троцкого «Психологические основы обучения математике»; М. Г. Попруженко –

«Учебная литература по математике»; К. А. Поссе и Д. М. Синцова – «Согласование программ математики средней школы с программами высших школ»; В. Ф. Кагана – «Подготовка учителей математики»; В. В. Бобынина «Исторические элементы в курсе математики в средней школе». Не менее фундаментальными были доклады на втором съезде: о значимости выступления профессора Б. К. Млодзеевского говорит, например, следующее его положение: «…успехи естествознания и техники выдвинули вопрос о введении в среднюю школу вопросов, изучаемых теперь обыкновенно в высшей школе; стало очевидным, что в настоящее время основные понятия исчисления бесконечно малых, аналитической геометрии, теории вероятностей должны быть достоянием каждого образованного человека». Не менее фундаментальными были доклады А. В. Васильева, С. А. Богомолова, С. И. Шохор-Троцкого, В. Р. Мрочека и др. (Более подробные сведения читатель может найти по учебному пособию «Дидактика математики» Н. В. Метельского.) Самые ранние сведения о возникновении МПМ связаны с Петром I. В России развивались ремесла, промышленность, нужны были новые компетенции, поэтому он организовал подготовку специалистов, заботясь об образовании прежде всего математическом. В 1703 г. издан первый учебник Магницкого «Арифметика – наука числительная», который включал в себя методические разработки, сведения по арифметике, алгебре, геометрии и тригонометрии. В 1783 г. вышло первое методическое пособие для учителей. В XVIII веке педагоги-математики опубликовали целый ряд пособий по методике. Гурьев по праву считается создателем методики преподавания арифметики. В книге Лобачевского «Наставления учителям математики в гимназии» описаны основные принципы обучения математике. Остроградский создал первый труд по методике преподавания геометрии. Публикацию научных статей и учебных пособий по методике нельзя противопоставлять диссертациям. Нельзя игнорировать и опыт зарубежных исследователей. Все это говорит о том, что связывать возникновение МПМ как науки с защитой какой-либо диссертации или возникновением аспирантуры методологически ошибочно.

- Отметим, что данное учебное пособие оказывается методологически несостоятельным и во многих других случаях. Например, слишком большое внимание уделяется понятию алгоритма. Конкретные алгоритмы обычно сообщаются в готовом виде, как их обнаружить не показывается. В ряде случаев, когда алгоритм насчитывает около десятка шагов, его запись усложняет восприятие, более краткой и удобной является словесная формулировка. Чрезмерное и формальное применение этого ценного понятия, начиная к тому же с 5 класса, пользы не принесет.

- В пособии нет примеров, показывающих студентам как формулировать цели урока, нет примеров применения методов обучения при изучении понятий, аксиом, теорем, доказательств, решении задач. Практические навыки не формируются. Зато после каждой темы приводятся листы для самооценки. Что будут оценивать студенты? Свои формальные, бессистемные и путаные знания, полученные по данному пособию?

- Говоря о научности изложения МПМ данного автора, нельзя не отметить наличие в нем многочисленных математических ошибок и некорректностей: 1) На с. 25 в третьей колонке говорится о понятии угла, «образованного двумя прямыми и секущей». Но угол по определению не может образовываться таким образом. 2) На с. 26 дается некорректное определение прямоугольного параллелепипеда (понятие тела не является здесь родовым понятием, ближайшим родом является прямой параллелепипед, для которого, в свою очередь, существует целая цепочка родовых понятий; кроме того, если внутри данного прямоугольного параллелепипеда проделана «дырка» в виде маленького прямоугольного параллелепипеда, то по приведенному определению трудно определить, является или не является полученный многогранник прямоугольным параллелепипедом). 3) На с. 36 спрашивается, можно ли утверждать, что «два луча (стороны углов) образуют прямую (может быть, ломаную, очень похожую на прямую?)». О ломаной здесь говорить – значит запутывать учащихся (лучи к понятию ломаной вообще никакого отношения не имеют). 4) На с. 38 утверждается, что центр описанной около треугольника окружности, есть точка пересечения биссектрис, а центр описанной сферы около тетраэдра есть точка пересечения биссекторных плоскостей его двугранных углов (без комментариев!). 5) На с. 40 приводится пример задачи, в котором ошибочно утверждается, что прямая DB перпендикулярна плоскости AD_1C. То, что это не опечатка, свидетельствует приводимое далее пояснение решения задачи, которое является совершенно бессмысленным. 6) На с. 52 приводится шесть аналитических соотношений для взаимного расположения двух окружностей, но на приводимых ниже рисунках видны только пять случаев. 7) На с. 59–60 приводится доказательство признака параллельности прямых, при этом используется признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и острому углу. Грубая ошибка: признак равенства треугольников обычно доказывается не перед признаком параллельности прямых, а после него. 8) На с. 78 говорится, что в множестве натуральных чисел выполняются все четыре арифметических действия. Несколько ниже оговаривается, что вычитание выполняется не всегда, аналогичное же утверждение для деления вообще отсутствует. 9) При характеристике числа 0 не сказано, что оно не является ни положительным целым числом, ни отрицательным целым числом, а боязнь употребить слово «множество» приводит к такой примитивной формулировке «Число 0 используется для обозначения отсутствия предмета». А положительные и отрицательные числа что обозначают? «Присутствие предмета»?

- Встречаются заимствования без ссылок. Например, на с. 190 во второй колонке в качестве аксиомы площади приводится избыточная аксиома «Площадь квадрата равна квадрату его стороны», которая упрощает вывод основных формул площадей фигур. Такая аксиома впервые в отечественных учебниках (в РБ и РФ) введена в учебнике Н. М. Рогановского «Геометрия. 7–9 кл, 1992 г., 2000 г.». Ссылки, разумеется, нет.
- Не лучше обстоит дело с корректностью формулирования определений дидактического и методического характера. Например: 1) На с. 21 во второй колонке говорится о дидактических принципах, называя их требованиями. В третьей колонке сообщается, что принципы обучения – это уже «основные положения, определяющие характер процесса обучения, которые формулируются на основании избранного подхода». Во второй формулировке в неопределенной форме представлено все: как определяемое понятие, так и родовое понятие и видовые признаки. Обучение чему? Любому предмету или математике? В чем заключается специфика обучения математике? «Основные положения» (родовое понятие) – чего? (по-видимому, теории и практики обучения математике). «На основании избранного подхода» – видовой признак. Что такое «подход»? Что такое «избранный подход»? Соотносятся ли они вообще с понятием принципа? Как выбирается подход? Сплошной туман. Лучше взять хороший учебник по педагогике и сослаться на него. В третьей колонке называются еще два «дополнительных» принципа обучения: принцип варьирования и принцип непрерывности. Довольно странно делить принципы на основные и дополнительные. Это то же самое, что считать, есть основные аксиомы математики, а есть аксиомы дополнительные. Далее, в третьей колонке говорится о трех аспектах принципа научности. Этот текст почти дословно совпадает с текстом (см. с. 37) из учебного пособия Н. М. Рогановского и Е. Н. Рогановской *Методи-*

ка преподавания математики. Часть I. Общая методика. Допущено Министерством образования Республики Беларусь. – Мн. : Народная асвета, 2018. – 174 с. Ссылки на заимствование не делается. Явные заимствования текста из упомянутого пособия (см. с. 37–38) отмечаются также на стр. 23–24 в третьей колонке, когда говорится о систематических и системных знаний, об отношении к ним математика МГУ М. М. Постникова.

- Отметим, что разделение учебного материала по двум колонками «Основной учебный материал» и «Дополнительный материал» часто оказывается произвольным.
- Путано формулируются многие нематематические понятия, тесно связанные с методикой. Подобный перечень может быть продолжен.

И что получается? В учебном пособии по МПМ сплошь и рядом делаются ошибки, которые не исправишь никаким пером. Эти ошибки дублируются на всю страну. Их повторяет большое количество студентов. Каждый из выпускников будет потом тиражировать подобные ошибки на огромную массу учащихся. Ясно, какое качество образования в итоге культивируется. Особенность ситуации состоит также в том, что автор пособия по МПМ и школьных учебников один и тот же. Все это говорит лишь об одном: школьный учебник находится в большой зависимости от субъектного фактора, а применение математических методов в процессе его создания позволит уменьшить эту зависимость, реально повысить качество учебника, «отсортировать» качественные учебники от некачественных.

1.1.7. ФОРМИРОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО АППАРАТА ГЕОМЕТРИИ: ВВЕДЕНИЕ В 8 КЛАССЕ ОБОБЩЕННОЙ ТЕОРЕМЫ ФАЛЕСА

Теорема Фалеса – частный случай обобщенной теоремы Фалеса, одна из ключевых теорем ЛМС, которая открывает новые возможности в развитии содержания школьного курса геометрии и решении задач. В 7 классе приоритетным является традиционное доказательство, которое опирается на основной учебный материал этого класса. Традиционное доказательство этой теоремы представляет собой своего рода кульминационный момент в применении метода равных треугольников. Прерывать эту линию в данном месте в 7 классе нецелесообразно. Ярким примером применения теоремы Фалеса является доказательство теоремы о точке пересечения медиан треугольника. Принципиальным является последующее применение теоремы Фалеса к доказательству обобщенной теоремы Фалеса в самом начале 8 класса, что открывает возможность раннего и доступного введения подобия треугольников, метрических соотношений в прямоугольном треугольнике и элементов тригонометрии. Тем самым создается новая, более компактная и совершенная систематизация теоретического материала, расширяются возможности применения наиболее эффективных геометрических методов при решении задач.

Что дает раннее введение обобщенной теоремы Фалеса? Существенные упрощения в систему изложения учебника геометрии 8–9-х классов вносит раннее введение обобщенной теоремы Фалеса. Во-первых, в 8 классе появляется мощный геометрический метод для решения вычислительных задач, что в традиционных изложениях геометрии полностью отсутствовало или вводилось слишком поздно. Эта теорема позволяет сбалансировать соотношение вычислительных задач с другими видами задач. Во-вторых, раннее введение этой теоремы позволяет сблизить фундаментальные геометрические понятия равенства и отношения отрезков, равенства и подобия треугольников, показать применение пропорций в геометрии, упростить доказательства признаков подобия треугольников, теоремы Пифагора, облегчить введение элементов тригонометрии и векторной алгебры. В результате коренным образом упрощается ЛМС геометрии в 8–9-х классах. Отметим, что упрощение ЛМС, включая изменение последовательности учебного материала, по значимости гораздо ценнее локальных упрощений.

Остановимся на логико-математических особенностях доказательства ОТФ и возможностях его дидактической обработки с целью обеспечения доступности. Доказательства ОТФ обычно опираются на использование теоремы Фалеса и процедуры измерения отрезков (идея такого подхода высказана, например, А. Лебегом [27]). В школьных учебниках применяются два подхода к реализации общей идеи: используются прямые или косвенные доказательства ОТФ. Прямое доказательство приведено, например, в учебнике геометрии Н. Н. Никитина и А. И. Фетисова [30], встречается оно и в сравнительно недавнем учебнике [36]. Метод от противного используется, например, в учебниках [31], [54]. На наш взгляд, первые доказательства менее формальные, более тесно связанные с практикой и теорией измерения расстояний. Вторые доказательства больше подходят для вузовского учебника (см., например, [33]). К сожалению, сравнительно позднее введение этой теоремы в школьных учебниках не позволило ей стать в полной мере ключевой теоремой. В учебнике А. П. Киселева [42], например, теорема о пропорциональных отрезках (ОТФ) рассматривается после признаков подобия треугольников, что существенно сокращает область её применения.

Новое доказательство ОТФ, методические приемы введения в 8 классе: подчеркивание общности рассуждений, конкретизация их, выбор основной формулировки ОТФ. Перечисленные методические приемы необходимы для обеспечения большей доступности ОТФ.

Существуют формулировки ОТФ, в которых речь не идет о двух параллельных прямых. В учебнике А. П. Киселева [42, с. 100] сказано: «Стороны угла, пересекаемые рядом параллельных прямых, рассекаются ими на пропорциональные отрезки». Остановимся на такой формулировке: «Если отрезки e и a принадлежат одной стороне угла и параллельные прямые, проходящие через концы этих отрезков, высекают на другой стороне угла соответственно отрезки e_1 и a_1, то

$$\frac{a}{a_1}=\frac{e}{e_1}\quad(1)\qquad\text{и}\qquad\frac{a}{e}=\frac{a_1}{e_1}\quad(2)$$

Доказательство ОТФ. Доказательство опирается на процесс измерения отрезков, о которых говорится в условии теоремы. Отрезок a измеряется отрезком e, принятым за единицу измерения, а отрезок a_1 – отрезком e_1, принятым за единицу измерения этого отрезка (рис. 1.11).

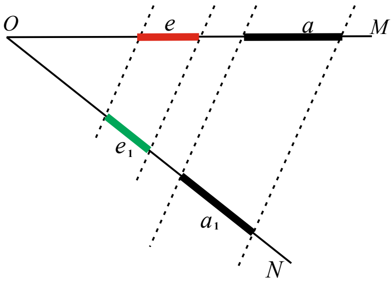


Рис. 1.11

Структура доказательства: а) вначале имеется возможность доказать равенство (1), б) затем равенство (2) получаем как производную пропорцию. Равенство (1) позволяет обобщить ОТФ на любое число соответственных друг другу отрезков. Так как доказательство на конкретном числовом примере дословно совпадает с доказательством в общем виде, то на базовом уровне рекомендуем провести его на примере получения конкретных числовых значений измерительного процесса.

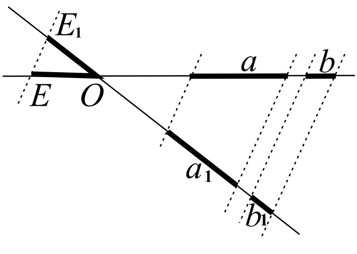


Рис. 1.12

Следствия. 1. Справедлива теорема, обратная ОТФ.

2. Прямая, параллельная некоторой стороне треугольника и пересекающая две другие его стороны, отсекает от него треугольник, стороны которого пропорциональны сторонам данного треугольника.

Замечание. ОТФ можно сформулировать так, что в ней вместо угла говорится о двух пересекающихся прямых. В случае пересечения прямых единичные отрезки могут быть выбраны по одну сторону от точки пересечения (как в рассмотренном выше доказательстве), а измеряемые отрезки – по другую (рис. 1.12).

Выделение подобия треугольников и метрических соотношений в прямоугольном треугольнике в качестве первых тем 8 класса. Наиболее естественным продолжением ОТФ в 8 классе является следующая последовательность учебного материала: определение подобия треугольников, 1-й признак подобия, метрические соотношения в прямоугольном треугольнике, теорема Пифагора, 2-й и 3-й признаки подобия треугольников. Поэтому в предлагаемой ЛМС школьного курса геометрии ОТФ и перечисленные только что темы рекомендуется разместить в начале 8 класса, обеспечивая тем самым непрерывное развитие содержательной линии треугольников.

1.1.8. ПЕРВООЧЕРЕДНЫЕ ПРИЕМЫ СОКРАЩЕНИЯ ФОРМАЛЬНОГО ИЗЛОЖЕНИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

1. Дополнение формального изложения теоретического материала *пояснительными текстами*, повышающими доступность учебного материала. Использование в этих целях воображаемого персонажа «Землянин», который в подходящих случаях приходит на помощь учащимся. Соответствующий текст рекомендуется набирать другим шрифтом для того, чтобы его легче было отличить от основного текста.

2. Приведение в теоретической части *задач с решениями*, показывающими конкретные примеры того, как может применяться данная теория. Различные в смысловом отношении небольшие части теории и задач рекомендуется выделять нумерованными подзаголовками с целью более четкого представления структуры каждого параграфа и общего количества информации в годовом курсе.

3. Приведение *вспомогательных задач*, подводящих к сложным доказательствам или решениям задач. Например, сложными являются задачи на описанную и вписанную окружности для произвольного че-

тырехугольника. Примеры таких задач, требующих для своего решения вспомогательных задач:

а) По одну сторону от прямой *AD* расположены точки *B* и *C* таким образом, что $\angle ABD = \angle ACD = 80°$. Докажите методом от противного, что окружность, описанная около треугольника *ABD*, пройдет через точку *C* и окажется окружностью, описанной около четырехугольника *ABCD*.

б) В четырехугольнике *ABCD* диагональ $AC = 1$ и делит его на равносторонний ΔABC и равнобедренный ΔACD с боковыми сторонами, равными 2. Докажите, что около этого четырехугольника нельзя описать окружность, но можно вписать в него окружность. Найдите радиус вписанной окружности.

в) В четырехугольнике *ABCD* диагональ $AC = 5$, $AB = AD = 3$, $BC = CD = 4$. Докажите, что около этого четырехугольника можно описать окружность и вписать в него окружность. Найдите их радиусы.

г) Нужна ли оговорка (что четырехугольник выпуклый) в теореме о том, что если суммы противоположных сторон четырехугольника равны, то в него можно вписать окружность? Нельзя ли построить невыпуклый четырехугольник, который удовлетворяет условию теоремы, но «вписанная» окружность получается «нетипичной» – касается двух его сторон и продолжений двух других сторон?

4. Сокращение излишеств в цветовых выделениях. Цветные иллюстрации стали широко применяться как прием понижения формального изложения. Однако излишнее многоцветие утомляет глаза и мешает сосредоточиться на изучаемом в данный момент фрагменте.

Приемы сокращения «цветовых» излишеств: для различных элементов теоретического материала применять рисунки на различных цветовых фонах: например, для аксиом – золотистый цвет, для теорем – прозрачно зеленый, для определений – прозрачно синий. Они не утомляют глаза и хорошо концентрируют внимание на рисунке. Цветные линии полезны также в рисунках к доказательствам методом от противного. Часть линий, относящихся к допущению в методе от противного, выделять красным цветом. Соответствующие предложения в тексте доказательства также выделять красным цветом. Это хорошо помогает учащимся в усвоении метода от противного. К задачам в большинстве случаев рекомендуется приводить черно-белые рисунки.

5. Иллюстрации на материале природной среды и общественной практики: фотографии парада планет – при изучении аксиомы прямой,

пожарной лесополосы – при изучении аксиомы о разбиении плоскости прямой на две части, конструкций железнодорожного моста – при ознакомлении со свойством жесткости треугольника, паутинной сети паука-крестоносца – при изучении обобщенной теоремы Фалеса, шарнирно-параллелограммных механизмов – при изучении параллелограмма и др.

6. Задачи с практическим содержанием, приводимым с целью мотивации обучения: измерение недоступных расстояний на местности, высоты сооружений. Особое внимание задачам с современным практическим содержанием (определение радиуса действия сотовой вышки, лазерные измерения и др.).

7. Задачи на «выход в пространство», показывающие применение планиметрических сведений на примере куба и пирамиды. Эти задачи приводятся с целью пропедевтики стереометрии.

8. Применение инструментальных вычислений с помощью таблиц и калькуляторов (особенно при использовании квадратных корней и тригонометрических вычислений).

9. Разгрузка учащихся за счет разграничения основного учебного материала для любого уровня обучения и дополнительного материала для повышенного уровня. Заголовками «Дополнительный материал» выделяется теоретическое содержание, которое в полном объеме предназначено для повышенного уровня, на базовом уровне оно может быть использовано не более чем на ознакомительном уровне. Остальной учебный материал является обязательным для каждого уровня обучения. Примеры: «Об измерении отрезков», «Первое знакомство с теоремой Пифагора» (7 кл.) и др.

10. В задачном отделе в каждой теме также выделяются основные и дополнительные задачи с примерным соотношением 2:1.

11. Разгрузка содержания учебника за счет отнесения избыточных фактов с точки зрения ЛМС к задачам. Для вычисления медиан, биссектрис и высот произвольного треугольника имеется определенный математический аппарат. Дополнительное знакомство учащихся с формулами, выражающими их через стороны треугольника, необходимо, так как позволяет эти вычисления значительно сократить. Некоторая избыточность этих формул позволяет отнести их к числу задач, приводимых с решениями в задачном отделе учебника.

Примеры формул для медиан, биссектрис и высот треугольника, которые позволяют упростить решение геометрических задач:

$$m_a^2=\frac{1}{4}(2b^2+2c^2-a^2),\quad m_b^2=\frac{1}{4}(2a^2+2c^2-b^2),\quad m_c^2=\frac{1}{4}(2a^2+2b^2-c^2)\ ;$$

$$l_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)},\ \ l_b = \frac{2}{a+c}\sqrt{acp(p-b)},\ l_c = \frac{2}{a+b}\sqrt{abp(p-c)};$$

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},\ \ h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\,.$$

Задача 1. Докажите формулу, выражающую высоту треугольника через его стороны:

$$h_c = \sqrt{b^2 - \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)^2}\ .$$

Доказательство. Пусть CD – высота, проведенная к стороне AB (рис. 1.13а). Положим, что $AD=x$. Применяя теорему Пифагора к треугольникам BCD и ACD, запишем:

$$\left.\begin{aligned} CD^2 &= a^2-(c-x)^2 \\ CD^2 &= b^2-x^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a^2-(c-x)^2 = b^2-x^2.$$

Выполним преобразования:

$$a^2-c^2+2cx-x^2 = b^2-x^2 \ \ \Rightarrow \ \ x = \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}.$$

Тогда, применяя теорему Пифагора к треугольнику ACD, получим:

$$h_c = \sqrt{b^2 - \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)^2}\ .$$

Если высота h_c располагается так, как на рисунке 1.13б, то рассуждения проводятся аналогично и приводят к той же самой формуле.

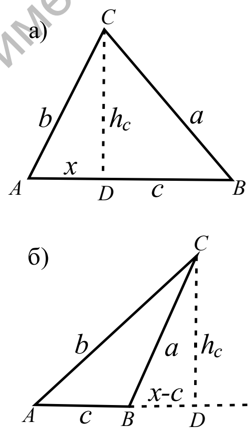


Рис. 1.13

Задача 2. Докажите, что $h_c = \sqrt{b^2 - \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)^2} = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Доказательство. Неоднократно раскладывая подкоренное выражение на множители (пока не получим стороны треугольника в первой степени), вводя периметр P и полупериметр p, придем к искомой формуле:

$$h_c^2 = b^2 - \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)^2 = \left(b - \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)\left(b + \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right) =$$

$$= \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2c} \cdot \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2c} = \frac{1}{4c^2}(-((b-c)^2 - a^2))((b+c)^2 - a^2) =$$

$$= \frac{1}{4c^2}(a^2 - (b-c)^2)((b+c)^2 - a^2) =$$

$$= \frac{1}{4c^2}(a - b + c)(a + b - c)(b + c - a)(b + c + a) =$$

$$= \frac{1}{4c^2}(P - 2b)(P - 2c)(P - 2a)P = \frac{16}{4c^2}(p - b)(p - c)(p - a)p =$$

$$= \frac{4}{c^2}(p - b)(p - c)(p - a)p .$$

Задача 3. Найдите медианы, биссектрисы, высоты и площадь треугольника со сторонами: а) 1, 2 и $\sqrt{5}$; б) 5, 5 и 6.

1.1.9. ТРАНСФОРМАЦИЯ НОВАЦИЙ В ТРАДИЦИИ

Что выбрать из нетрадиционного содержания? Из нетрадиционного содержания наибольшими возможностями, ввиду простоты его введения, обладает координатный метод. Соответствующие сведения из аналитической геометрии, включая сведения о векторах, могут быть сравнительно краткими, небольшими по объему, не претендующими на полноту специальной темы, носящей по возможности тесный интегративный характер. В этом смысле мы говорим об **«элементах»** координатной геометрии и векторов.

Некоторые сведения о векторах необходимы. Они нужны в курсе физики. Кроме того, изучение векторов в стереометрии (что делается в настоящее время) трудно сделать доступным, если отсутствует определенная пропедевтика в планиметрии. Отметим, что приведение теоретического материала новых тем без сопровождения применения его к решению содержательных задач (в основном курсе или на факультативных занятиях) не имеет смысла.

Кратко перечислим возможный состав таких «Элементов». Система координат вводится в алгебре, и поэтому отпадает необходимость заново её вводить в геометрии. Формула расстояния между двумя точками, заданными своими координатами, легко доказывается с помощью теоремы Пифагора. Формулы координат точки, делящей отрезок в данном отношении (при произвольном выборе делящей точки), сравнительно нетрудно выводятся с помощью обобщенной теоремы Фалеса, координаты середины отрезка получаются как частный случай. Традиционно несложно выводится уравнение окружности. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки (основное уравнение), имеется возможность вывести с помощью обобщенной теоремы Фалеса, а другие уравнения – с помощью основного уравнения. Заключает элементы векторной алгебры скалярное произведение векторов, которое вначале вводится в координатной форме.

Первые задачи связаны с нахождением координат точек геометрических фигур. Наиболее содержательными задачами такого вида являются задачи на применение формул расстояния между двумя точками, заданными своими координатами (1); координаты точки, делящей отрезок в заданном отношении (2–3), а также уравнения прямой, проходящей через две точки (4), с угловым коэффициентом (5–6), окружности (8–9) и условия параллельности (10–11) и перпендикулярности прямых (12):

Расстояние между двумя точками	$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$	(1)
Координаты точки M, делящей отрезок AB в отношении $k=\dfrac{AM}{MB}$	$x_M=\dfrac{x_A+kx_B}{1+k}\quad y_M=\dfrac{y_A+ky_B}{1+k}$	(2)
Координаты середины отрезка	$x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2},\ y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2}$	(3)
Уравнение прямой, проходящей через точки A и B	$\dfrac{x-x_A}{x_B-x_A}=\dfrac{y-y_A}{y_B-y_A}, x_B\neq x_A, y_B\neq y_A$	(4)
Уравнение прямой с угловым коэффициентом k	$y = kx + b$	(5)
Частный случай уравнения (5)	$y = kx$	(6)
Уравнение прямой в отрезках	$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1,\ a\neq 0,\ b\neq 0$	(7)
Уравнение окружности	$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$	(8)
Частный случай уравнения (8)	$x^2+y^2=R^2$	(9)

Окончание таблицы

Условие параллельности прямых , задаваемых уравнением (7)	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ или $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}$	(10)
Условие параллельности прямых , задаваемых уравнением (5)	$k_1 = k_2$	(11)
Перпендикулярность прямых, задаваемых уравнением (5)	$k_2 = -\frac{1}{k_1}$, или $k_2 k_1 = -1$	(12)

Вектор введем в традиционной геометрической форме и с самого начала свяжем его с понятием координат точек.

Определения. 1. **Вектором *AB*** называется направленный отрезок, т.е. отрезок, в котором точка *A* считается первой, а точка *B* – второй.

Обозначение: $\overrightarrow{AB}$ – вектор *AB*. Векторы обозначают также одной малой буквой: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. На рисунке направление от точки *A* к точке *B* показывается стрелкой. Точка *A* называется **началом вектора**, а точка *B* – **концом вектора**.

2. Если начало и конец вектора заданы координатами $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$, то числа $x_2 - x_1$ и $y_2 - y_1$ называются **координатами вектора *AB*.** Записывают: $\overrightarrow{AB}\ (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$.

Координаты вектора, как и координаты точки, служат для задания положения вектора на координатной плоскости.

3. **Длиной** вектора *AB* называют длину отрезка *AB*. Обозначение: $|\overrightarrow{AB}|$ – длина вектора *AB*.

Длина вектора *AB* находится по координатной формуле расстояния (1). Если координаты вектора обозначить буквами *x* и *y*: $x = x_2 - x_1$, $y = y_2 - y_1$, то для длины вектора $\overrightarrow{AB}$ формулу (1) можно записать короче. А именно: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Определение. Два вектора *AB* и *CD* называются **равными**, если они имеют одинаковое направление и равны их длины.

Записывают: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ – вектор *AB* равен вектору *CD*.

Наглядное представление о равных векторах дают стороны и половины диагонали параллелограмма. Заметим, что рассмотрение вопросов о равенстве векторов полностью основывается на теории параллелограмма и служит хорошим примером связи нового и традиционного материала.

Т е о р е м ы : 1 (*об откладывании вектора*). Для любого вектора $\vec{a}$ и точки A существует (и притом единственный) вектор $\overrightarrow{AB}$, равный вектору $\vec{a}$.

2. а) Если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то четырехугольник $ACDB$ – параллелограмм;

б) обратно: если четырехугольник $ACDB$ – параллелограмм, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

3. а) Если векторы равны, то равны одноименные координаты этих векторов;

б) и обратно: если одноименные координаты векторов равны, то векторы равны.

Следствия: 1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

2. С помощью равенства векторов $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{MB}$ можно предложить другое доказательство утверждения: если M – середина отрезка AB, то $x_B = 2x_{\text{М}} - x_{\text{А}}$, $y_{\text{В}} = 2y_{\text{М}} - y_{\text{А}}$ (ранее известные формулы 3).

Далее вводятся понятия векторной разности, противоположных векторов, нулевого вектора, произведения вектора на число.

Определение. Пусть вектор $\vec{a}$ имеет координаты x_1 и y_1 вектор $\vec{b}$ – координаты x_2 и y_2. Число $x_1x_2 + y_1y_2$ называется **скалярным произведением векторов** $\vec{a}$ **и** $\vec{b}$.

Таким образом, по определению $\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$.

3. Скалярное произведение двух векторов не зависит от выбора системы координат.

Т е о р е м ы : 1 (*векторный признак перпендикулярности двух прямых*). Если скалярное произведение ненулевых векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ равно 0, то прямые AB и AC перпендикулярны: $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow AB \perp AC$.

2 (*обратная теорема*). Если прямые AB и AC перпендикулярны, то скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ равно 0: $AB \perp AC \Rightarrow \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = 0$.

1.1.10. ПЛАН ПОСТРОЕНИЯ УЧЕБНИКА ГЕОМЕТРИИ 7–9-х КЛАССОВ

Планирование в каждом классе включает три темы и повторительный раздел, что позволяет создать условия для более качественного обучения. Повторительный раздел составляет основное содержание IV учебной четверти.

7 класс: 1. Первые геометрические понятия и аксиомы. Внешний угол треугольника. Перпендикулярные и параллельные прямые. Сумма углов треугольника.

2. Признаки равенства треугольников. Теорема Фалеса.

3. Задачи на построение.

4. Повторительный раздел.

8 класс: 1. Пропорциональные отрезки. Измерение отрезков и ОТФ. ОТФ на примере подводящей задачи. Доказательства ОТФ, дополнения к ОТФ. Обратная теорема и теорема о биссектрисе треугольника. Примеры применения ОТФ к решению задач. Определение подобия треугольников. Основная теорема о подобии треугольников. Три признака подобия треугольников. Применение подобия треугольников к решению задач.

2. Определения тригонометрических функций. Основное тригонометрическое тождество. Формулы приведения. Точные значения тригонометрических функций некоторых углов. Решение прямоугольного треугольника. Решение произвольного треугольника: теоремы косинусов и синусов. Задачи на применение теоремы косинусов и синусов.

3. Расстояние от точки до прямой. Расстояние между двумя параллельными прямыми. Свойства биссектрисы угла. Виды четырехугольников. Параллелограмм. Прямоугольник. Ромб. Квадрат. Трапеция.

4. Повторительный раздел.

9 класс: 1. Взаимное расположение прямой и окружности. Взаимное расположение двух окружностей. Центральный и вписанный угол окружности. Другие углы, связанные с окружностью (дополнительный материал). Вписанные и описанные треугольники. Замечательные точки треугольника. Вписанные и описанные четырехугольники. Прямая Эйлера (дополнительный материал).

2. Определение правильного многоугольника. Сумма углов многоугольника. Центр правильного многоугольника. Построение правильных многоугольников, вписанных в окружность. Выражение элементов правильного многоугольника через радиус описанной или вписанной окружности. Определения длины окружности и площади круга. Вычисление длины окружности и ее дуг. Вычисление площади круга и его частей. Задачи на комбинацию круга и многоугольников.

3. Элементы аналитической геометрии и векторной алгебры.

4. Повторительный раздел.

1.2. СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ СИСТЕМЫ ЗАДАЧ ШКОЛЬНОГО УЧЕБНИКА ГЕОМЕТРИИ

1.2.1. ЭНТРОПИЙНЫЙ ПОДХОД К КОЛИЧЕСТВЕННОЙ ОЦЕНКЕ СЛОЖНОСТИ И ТРУДНОСТИ СИСТЕМЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

О понятиях сложности и трудности задач

Объем, сложность и трудность учебного материала – наиболее важные признаки, определяющие его доступность для учащихся. Понятия сложности и трудности относятся к содержанию учебника в целом и к отдельным его фрагментам. Увеличение многообразия идейно разнородного содержания, количества учебных тем и различных их элементов (понятий, теорем, доказательств, математических методов, способов решения задач), поспешный переход от теории сразу к сложным задачам, недостаточность пояснительных текстов в учебнике, образцов решения задач, чрезмерное кодирование учебного материала математической символикой, бессистемное применение цветовых выделений – такие излишества и крайности не способствуют усвоению математики.

Проблема сложности и трудности учебника привлекала внимание многих исследователей, начиная с основоположников дидактики (Коменского, Песталоцци, Ушинского и др.). Не ослабевает актуальность этой проблемы и по настоящее время (А. М. Матюшкин, И. Я. Лернер и др.). Существуют исследования в методике преподавания математики (Ю. М. Колягин, В. И. Крупич и др.), До 70-х годов XX века понятия «трудность» и «сложность» фактически не различались, считались синонимами. Отметим наиболее важные этапы в развитии этих понятий.

1	А. И. Уемов. Проблемы построения общей теории упрощения научного знания // Логика и методология науки. – М. : 1967.	Предложил для определения сложности учебного материала подсчитывать число элементарных соотношений, на которые могут быть разбиты существующие в некоторой ситуации соотношения между вещами и их предикатами. В настоящее время под сложностью обычно понимается количество признаков в определении понятия, количество шагов в доказательстве теоремы, решении задачи (операционный подход). Для системы задач такой подход затруднителен.

2	И. Я. Лернер. Критерии сложности некоторых элементов учебника // В сб.: Проблемы школьного учебника. – М. : Просвещение, 1974. – Вып. 1.	Сложность отдельной задачи поставил в зависимость от следующих факторов: а) количества данных; б) числа промежуточных операций, которые необходимо выполнить, чтобы прийти к ответу; в) состава решения, то есть от числа выводов, которые нужно сделать для решения задачи. Предложил формулу сложности $S = A \bullet Б \bullet В$, где A – количество данных в условии задачи; $Б$ – число логических звеньев, необходимых для решения; $В$ – число рядоположенных выводов.
3	К. М. Ушаков. О критериях сложности учебного материала школьных предметов // Новые исследования в педагогических науках. – М.: АПН СССР, 1980. – № 2.	Исследовал взаимосвязь сложности и трудности учебного материала. «Сложность» рассмотрена как совокупность двух компонентов: сложность состава и сложность организации. 1-й компонент зависит от числа элементов, входящих в систему, и от их качества, 2-й – от количества и характера связей между элементами. Сложность рассматривается как объективное свойство содержания учебного материала. Трудность – субъективная характеристика, связанная с уровнем подготовленности учащихся. Подчеркнуто, что трудность имеет и объективную сторону, связанную со сложностью изучаемого объекта.
4	В. И. Крупич. Структура и логика процесса обучения математике. – М.: Изд. Моск. пед. ин-та, 1985	Использовал графы. Для их построения исходил из следующих условий: 1) выбирается основное отношение, управляющее поиском решения; 2) элементами графа являются только те вершины, на которых реализовано основное отношение; 3) ребра, соединяющие две вершины графа, являющиеся его элементами, указывают на явную связь; 4) связь будет неявной, если два элемента графа разделены вершиной, не являющейся его элементом. Сложность отдельной задачи определял по формуле: $S = m + n + i$, где m – число элементов, n – число явных связей, i – число типов связей.

5	А.Н. Захаров, А. М. Матюшкин. Проблемы адаптивных систем обучения // В кн. Кибернетика и проблемы обучения. – М.: Прогресс, 1990.	Обосновали различие понятий сложности и трудности задачи (с. 39): «Необходимо иметь в виду, что степень трудности учебного задания не совпадает со степенью его сложности. Степень сложности учебного материала характеризуется реальной сложностью учебного задания и нормой его задания. Степень трудности всегда предполагает соотношение подлежащего усвоению учебного материала с усвоенным материалом и интеллектуальными возможностями учащихся».
6	Авторское предложение: комплексная энтропийная оценка объема, сложности и трудности учеб. материала; регулирование энтропии малых групп задач; скачки трудности; группировка задач вокруг ключевых теорем; образцы решений.	Д. Пойа отмечал, что трудность является неотъемлемым свойством задачи: **там, где нет трудности, нет и задачи**. Малая группа задач, состоящая из 5–6-ти задач. Скачок трудности в малой группе задач. Распределение задач в малой группе по двум уровням трудности. Ограниченные возможности классической теории энтропии К. Шеннона в оценке трудности задач. Необходимость прикладной теории энтропии. Прикладная конкретизация аксиоматической теории вероятности А.Н. Колмогорова для конечных дискретных множеств. **Реализация идеи: вероятность решения легких задач больше вероятности решения трудных задач – основа прикладной теории энтропии**. Унификация энтропийной оценки трудности учебного материала.

Исследования 1–5 внесли определенный вклад в уточнение понятий сложности и трудности. Были предложены различные формулы, однако эти формулы носят чисто эмпирический характер и не являются следствием какой-либо математической теории. Кроме того, существующие эмпирические предложения хотя и достаточно разнообразны, чаще всего относятся к элементам содержания учебника, а не к их системам (и это несмотря на то, что системный подход является основной методологией современных исследований).

Приведем примеры наиболее крупных проблем, нерешаемых при описательном подходе.

Последовательность учебных тем чаще остается традиционной и не всегда способствует упрощению существующего уровня сложности и трудности учебника.

Не всегда выдерживается постепенность перехода от теории к задачам (когда после теории сразу предлагаются трудные задачи).

Не уделяется должное внимание обоснованному выделению «узловых» теорем, определения их места в учебнике, области применения. Уточнение этих вопросов позволило бы упростить многие сложные доказательства, и сделать возможным изучение традиционного курса планиметрии, например, не за три, а за два года. Но такое упрощение необходимо не ради сокращения обучения на один год. Более значимой целью подобной оптимизации является избавление от формального учебника, получение учебника с пояснениями трудных мест, более тесно связанного с окружающей средой и современной общественной практикой, содержащего прямые обращения к учащимся, всю необходимую помощь.

К системе учебника геометрии относится так же уточнение соотношения задач на вычисление, доказательство и построение, которое складывается порой стихийно и оказывается не сбалансированным. Соотношение задач для устного и письменного решения, стандартных и нестандартных задач, задач, приводимых с готовым решением и без решения, так же чаще устанавливается без четких критериев, на субъективной основе.

Источником вероятностных ситуаций является неопределенность границы между базовым и повышенным уровнем в учебниках, совмещающих эти два уровня. Более четкому разграничению базового и повышенного уровней в учебнике могло бы служить выделение в каждом параграфе отделов обязательных и дополнительных задач с определенным соотношением, например, 2:1.

Перечисленные вопросы с помощью эмпирических формул решить невозможно, требуется разработка системного подхода в его новом качестве на уровне больших сложных систем с применением математических методов и учетом вероятностных процессов, протекающих в этих системах.

Требуется разработка адекватных методов комплексной оценки сложности и трудности сложных систем с учетом понятий энтропии и информации. Снижение энтропии учебника – новый подход к совершенствованию учебника. Энтропия и информация вычисляются по формулам Шеннона и Хартли и связываются с вероятностной категорией – **частотой присутствия** в системе тех или иных видов задач, методов их решения, варьирования аналогичных задач, с частотой приведения образцов решения задач, указаний к решению, заданий на готовых чертежах, заданий для устного решения и т. п. Чем такая частота выше, тем система задач становится проще и менее трудной. Это обеспечивается тем, что система становится более связанной, однородной, сокращается разнообразие задач. Для больших систем задач это означает сближение сложности и трудности, избавляет от механического подсчета (к тому же просто невозможного) количества шагов в решении каждой задачи. Увязывание измерения сложности системы учебного материала с указанными параметрами дает возможность регулирования сложности и трудности его на этапе создания учебника.

Основные определения. Практически реализуемыми являются следующие количественные оценки сложности и трудности отдельно взятой задачи.

1. **Сложность одной задачи** характеризуется обычно количеством шагов, из которых состоит ее решение. Академик А. Н. Колмогоров сложность объекта непосредственно связывает с алгоритмическим подходом: сложность объекта y относительно объекта x определяется длиной n программы получения y из x.

Предложим ряд формул, которые позднее будут включены в общую математическую теорию прикладного плана.

2. а) **Трудность *t* одной задачи для субъекта** определяется нами как величина $\boldsymbol{t = n/N}$, где N – число шагов, из которых состоит решение задачи, n – число шагов, до которых ученик не смог додуматься.

б) **Трудность *t* одной задачи для группы субъектов** определяем, как среднее арифметическое трудностей задачи для субъектов, входящих в эту группу.

в) В практических целях возможна более удобная оценка. Например, **трудность *t* одной задачи для группы учащихся** может определяться как отношение количества учащихся, не решивших задачу, ко всему количеству учащихся.

г) Трудность совокупности задач для группы учащихся равна отношению количества учащихся, не решивших все задачи данной совокупности, ко всему количеству учащихся.

Большая сложность задачи одна из объективных причин, порождающих её трудность. Однако трудность вызывается также субъективными факторами: способностью восприятия новизны, интуитивного её осознания, склонности к аналитическим рассуждениям, размером оперативной памяти и т.д.

Сложность и трудность системы задач. Менее разработанной остается оценка сложности и трудности системы задач. В данной работе предлагается использовать в этих целях элементарный аппарат теории информации – понятия энтропии и информации и их количественные оценки, использующие формулы Шеннона и Хартли. К дидактическим системам, в частности, к системам учебных задач, применимы следующие понятия.

По Г. Н. Поварову, «**сложность системы** определяется числом элементов системы и характером связей между ними, степенью и разнообразием их взаимодействия» [14, с. 162]; «Большие, или сложные, системы характеризуются … числом элементов (10^4 – 10^7 и выше) и массовым, случайным их взаимодействием» [14, с. 166]. Оба эти признака сказываются и на трудности, особенно стохастичность. Система учебника – большая сложная система. Представить ученику эту систему как целое образование, самостоятельно или за короткий промежуток учебного процесса, невозможно. Определенную помощь могут оказать обзоры, проводимые в начале изучения каждой темы.

По Ф. И. Перегудову и Ф. П. Тарасенко: «**Сложность** (complexity) – свойство некоторого явления (объекта, процесса, системы), выражающееся в неожиданности, непредсказуемости, необъяснимости, случайности, «антиинтуитивности» его поведения» [13, с. 360]. Это определение не связано с количеством элементов системы. Система может быть не большой, но сложной в указанном смысле. Данное определение максимально **сближает понятия сложности и трудности** и, на наш взгляд, в прикладном плане в данном случае целесообразно говорить именно о трудности системы, а не о её сложности. В результате открываются реальные возможности для объективного изучения трудности дидактических систем математическими методами.

Различаем **структурную (статическую) сложность системы задач**, включающую связность и структуру подсистем задач, и **динамическую сложность системы задач**, характеризующую изменение системы **во времени** (изменения сложности происходят постепенно, равномерно, с ускорением, скачкообразно и т. п.). Динамическая сложность, как видно, хорошо характеризует систему со стороны её трудности. Представляет собой ещё одно направление изучения трудности дидактических систем.

Как видно, понятие трудности не исключалось и ранее, только оно существовало как разновидность сложности. В данной работе будем считать далее, что понятия сложности и трудности – это отдельные (различные) понятия, которые пересекаются. Их общая часть является одновременно и сложностью и трудностью, в дополнениях к этой общей части, в одной – только сложность, в другой – только трудность. Наличие общей части свидетельствует, что **трудность также как сложность может иметь количественную меру.**

Под **состоянием системы задач** обычно понимается упорядоченный набор задач, а также логико-математических и дидактических связей между ними, предназначенный для формирований соответствующих знаний, умений и навыков учащихся. Дидактические связи выражаются наличием в той или иной мере аналогичных задач, образцов решения, указаний к решению, образцов выполнения рисунка к задаче и т. п.

Определенный набор задач на отдельный урок – **является результатом разбиения задач составителем учебника на небольшие группы, а также результатом выбора задач учителем из учебника**. Ученик всегда имеет дело с небольшими группами задач, сменяющими друг друга обычно по мало понятной ему логике. Учитель может сохранять последовательность задач, имеющуюся в учебнике, а может частично отступать от этой последовательности, изменять её с целью большей адаптации к учащимся данного класса, с целью организации индивидуальной работы с учащимися, привлекать задачи из других источников и т.п. Не исключено, что в этом выборе появляются элементы «нежелательной» случайности, происходит не подготовленный переход («**скачок**») от задач одной сложности и трудности к задачам более высокой сложности или трудности, в классе решаются одни задачи, в домашнем задании попадаются задачи, неподготовленные классной работой. Не исключено, что подобные явления в той или иной мере заложены в самом учебнике. Свидетельством различных состояний системы задач является тот факт, что в различных учебниках обычно они существенно отличаются друг от друга.

Максимальное количество N состояний системы задач, состоящей из n задач, обычно приравнивается числу подмножеств n-элементного множества и находится по формуле $N = 2^n$.

Пример. Если группа задач состоит из 7 задач, то множество состояний этой группы равно $2^7 = 128$. При этом в это число включаются не только одноэлементные, двухэлементные и т.д. множества, но и пустое множество. Причем для каждого состояния необходимо определять его вероятность и наличие полной системы событий, определяемой равенством $\sum_{i=1}^{N} p_i = 1.$

В прикладных целях интерпретировать вероятности состояния для малых групп задач можно с помощью **относительной частоты** события.

Относительной частотой события, или частотой, называется отношение числа опытов, в которых появилось это событие, к числу всех произведенных опытов. Обозначим частоту события A через $W(A)$, тогда по определению $W(A)=\frac{m}{n}$, где m – число опытов, в которых появилось событие A; n – число всех событий.

Статистической вероятностью события называется число, около которого группируются значения частоты данного события в различных сериях большого числа испытаний. В этом случае вероятность можно приближенно находить как относительную частоту.

Виды энтропии. Никола Кайтез [11, с. 3] приводит более 60-ти значений энтропии в различных сферах науки и практики, которые в большинстве случаев относятся и к образовательным системам. Приведем некоторые из них: «В эволюции энтропия означает степень склонности системы переходить в состояние упорядоченности низшего ряда, а также мера ухудшения адаптации к окружающему миру <...>. В логике и аргументации – мера нелогичности, непоследовательности, противоречивости, аномалий, парадоксов <...>. В формальном языке – мера терминологической неточности <...>. В гносеологии – мера предрассудка, авторитарности, догматизма <...>. В кибернетике – мера неорганизованности системы <...>. В теории управления – мера нарушения координации, мера нестабильности, невозможности предвидеть состояние или поведение систем».

Энтропия сложной системы задач, состоящей из двух или более **несовместных подсистем** задач, обладает **свойством аддитивности**, т. е. она равна сумме энтропий составляющих подсистем. С точки зрения процесса решения несовместность подсистем всегда имеет место, так как одновременно, в один и тот же момент времени, а одном и том же опыте сразу решать даже две задачи невозможно (в отличие от подкидывания двух монет в известных опытах по теории вероятности), решение задач всегда предполагает некоторую очередность. Несовместность подсистем возникает, если они сильно отличаются новизной предметного содержания и методами решения задач. Чаще несовместность подсистем может быть вызвана некоторым скачком трудности задач.

Наиболее общие свойства энтропии: энтропия выражается неотрицательным действительным числом, максимальна при равновероятном распределении состояний (система находится в состоянии хаоса) и минимальна при наличии достоверного состояния (в этом случае энтропия равна 0).

Противоположным энтропии является понятие информации, которое направлено на снятие или уменьшение неопределенности (термин К. Шеннона) и тем самым на повышение организованности и упорядоченности системы.

Уменьшение неопределенности системы в 2 раза характеризуется информацией в 1 бит. Это сравнительно мелкая величина, но в дидактических исследованиях с учетом трудности задач она является значимой. Такая интерпретация в содержательном плане наиболее удобна к системам учебных задач, рассматриваемых в контексте обучения учащихся: плохо систематизированный набор задач содержит больше энтропии и менее доступен учащимся. Хотя в теории информации это одна из возможных интерпретаций. В другой содержательной интерпретации считается, что чем больше неопределенности, тем система потенциально содержит больше информации. В этом случае формула Шеннона служит формулой нахождения не энтропии системы, а информации. Смыслы понятий энтропии и информации в этом случае меняются местами. Независимо от интерпретации любая искусственная система обладает энтропией и информацией. В любом случае одно из этих понятий определяется через другое. В любом случае для их измерения используется одна и та же единица.

Система задач, реализуемая на практике учителем, характеризуется многообразием различных состояний системы – разнообразием и разнородностью состава задач, степенью стохастичности выбора их учителем и учащимися, мерой информации и энтропии, соотношением позитивных и негативных воздействий на систему – рациональным или нерациональным распределением учебного времени, соотношением различных видов задач по количеству, сложности и трудности, соотношением задач, решаемых в классе, и задаваемых для домашней работы и т.д.

Математическая теория энтропии и информации системы по К. Шеннону

Обратимся к основоположникам теории информации.

По Н. Винеру: энтропия и информация характеризуют систему с позиции хаоса и порядка. **Энтропия** – мера дезорганизации и неупорядоченности системы. Тогда как **информация** системы – в противоположность энтропии – средство повышения организованности и упорядоченности системы, т.е. «негэнтропия». Негэнтропия рассматривается только с опорой на понятие энтропии.

По Л. Бриллюэну, **информация** – мера уменьшения энтропии… информация является средством внесения определенности, упорядоченности, организации.

По В. Эшби, **информация** – средство ограничения разнообразия. При этом управляющий блок системы допускает такое разнообразие системы, которое необходимо и полезно для системы.

Возрастание энтропии и вместе с этим усложнение характерно для науки в целом, не обошла она стороной и математику, в которой, по точному выражению М. Клайна, в связи с возрастанием разнообразия её содержания происходит «утрата определенности».

Клод Шеннон (1916–2001)
Заслуженно считается отцом иформционного века

Для более глубокого ознакомления с теориями сложности, информационной энтропии больших сложных систем рекомендуем работы [9–17]. В том числе и работу [10], в которой впервые было введено понятие больших систем.

Впервые в 1948 г. К. Шеннон связал понятия информации и энтропии: **информация стала рассматриваться как уменьшение энтропии системы**, **повышающая организацию и упорядоченность системы**. Им предложена знаменитая формула, определяющая количество информационной энтропии (формула Шеннона). Начало изучения энтропии дидактических систем положено в работе [15, С. 14–28].

Энтропия системы есть неотрицательная величина, определяемая формулой Шеннона $H = -\sum_{i=1}^{N} p_i \log_2 p_i = \sum_{i=1}^{N} p_i \log_2 \frac{1}{p_i}$, $\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$, где H – количество энтропии системы, N – количество состояний системы, p_i – вероятность i-го состояния системы, $\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$ – условие полноты системы событий.

Неотрицательная величина $H_i = -p_i \log_2 p_i$ называется **частной энтропией** i-го состояния системы. Графическая зависимость значений частных энтропий от вероятности соответствующего состояния показана на рисунке 1.14. Для дискретных состояний график состоит из отдельных, изолированных точек. Если все N состояний равновероятны, то $p_i = \dfrac{1}{N}$ и из формулы Шеннона получается формула Хартли:

$$H_{\max} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} \log_2 \frac{1}{N} = \log_2 N.$$

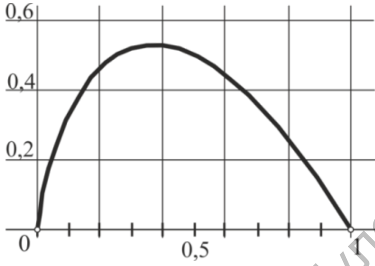


Рис. 1.14

Формула Хартли дает **максимальное** значение энтропии системы – для каждой системы своя постоянная величина, с которой удобно сравнивать другие значения энтропии этой системы. Если ситуация носит стационарный, не вероятностный характер, то к ней теория энтропии и информации не применимы.

В прикладной теории информации преобразование системы, приводящее к уменьшению энтропии, называется **эффективным преобразованием системы**.

Сравнение энтропии H текущего состояния системы удобно проводить с максимальной энтропией $H_{\max}$ системы, находящейся в состоянии хаоса (априорной величиной), измеряемой по формуле Хартли. В этом случае всегда $H \le H_{\max}$ и получается неотрицательная разность $\Delta H = H_{max} - H \ge 0$. Это значение ΔH примем за определение информации.

Информация системы есть неотрицательная величина

$$I = \Delta H = H_{max} - H \ge 0,$$

где $H_{\max}$ – максимальное значение энтропии (априорное – не зависящее от опыта – значение, определяемое по формуле Хартли), H – измеряемая энтропия системы в данный момент.

Информация показывает, насколько в результате преобразования системы произошло снижение максимальной энтропии. Это снижение представляет собой некоторое количество энтропии. Из этого равенства следует, что когда энтропия H возрастает, то информация I уменьшается и наоборот, когда энтропия уменьшается, информация возрастает. В частности, при наличии достоверного состояния энтропия $H = 0$ и информация становится максимальной, равной по величине $H_{\max}$.

Образовательный процесс, при всей его кажущейся внешне стационарности, допускает различные вероятностные состояния. Поэтому как бы хорошо он не был организован он обладает энтропией. В этом смысле энтропию естественно считать необходимым условием существования любой системы: хаотичность и упорядоченность в своей совокупности определяют в целом структурную организацию системы.

За единицу количества энтропии в данной работе принимается **1 бит**, при которой сложность, неопределенность уменьшается в два раза. Далее обычно это наименование в вычислениях опускается.

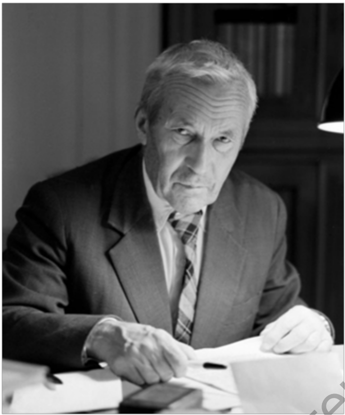
Виды энтропии дидактических систем. *Количественная энтропия,* учитывающая только количество задач. С увеличением численности системы задач энтропия возрастает. *Энтропия упорядоченной группы задач*, учитывающая количество и степень упорядоченности группы задач. *Энтропия трудности задач* – отражает субъектный фактор. Энтропию трудности системы задач мы называем также *дидактической энтропией*. *Энтропия, заложенная в системе задач в учебнике*, *Энтропия, порождаемая учителем*, при выборе задач для работы в классе и для домашней работы. *Накопительная энтропия*, представляющая собой в силу свойства аддитивности сумму предыдущих энтропий.

Подчеркнем, что применительно к системам учебных задач в учебнике преобладание энтропии по сравнению с количеством информации означает недостаточную однородность системы по целому ряду критериев, слабую связанность задач друг с другом, разупорядоченнсть задач по сложности и трудности, несбалансированность различных видов задач, случайность деления задач для классного и домашнего выполнения и т.п. Системы же с противоположными качествами являются более упорядоченными, с меньшей энтропией и с большими обучающими возможностями.

Энтропия присуща любой системе. Важно и **количественное значение** энтропии и особенно **направление** её изменения в результате того или иного подбора задач (убывание или возрастание). Если вероятность применения небольшого, локального набора задач близка к 1 (но не в смысле предела), то такой набор задач будем называть **доминирующим**. Не следует категорично исключать элементы недоминирующих локальных групп. Подсчет значений энтропии и информации по формулам Шеннона и Хартли показывает, что при вероятностях этих двух частей задачного материала в малых группах, близких к концам отрезка [0; 1] (например, 0,1–0,2 и 0,8–0,9) информация становится больше энтропии. Это означает, что малая группа оказывается построенной достаточно эффективно.

Аксиоматика теории вероятности А. Н. Колмогорова и ее прикладные аспекты. Способы нахождения энтропии системы задач, учитывающие их трудность

Случайным событием называется событие, результат которого заранее неизвестен. Наиболее общее определение вероятности события дается знаменитой аксиоматикой академика А. Н. Колмогорова. Она позволяет доказать все основные теоремы теории вероятности. А. Н. Колмогоровым было дано наиболее простое решение шестой проблемы Гильберта о создании аксиоматики этой теории. Д. Гильберт многое сделал для обоснования геометрии, еще больше совершил А. Н. Колмогоров для теории вероятности, впервые превратившей её разрозненные сведения в строгую математическую науку. Аксиоматика А. Н. Колмогорова допускает различные способы задания **вероятности событий,** которые, в отличие от классического и частотного, не опирается на физические модели или наблюдаемые частоты. Она быстро получила широкое мировое признание и используется в самых различных областях науки и практики. В настоящее время она присутствует во всех вузовских учебниках по теории вероятностей. В данной работе используется часть этой теории, которая относится к конечным дискретным вероятностным пространствам. А. Н. Колмогоров внес огромный вклад в развитие самых различных разделов математики (см. Интернет-источники).



Андрей Николаевич Колмогоров (1903–1987)
Математический гений XX столетия, впервые создавший строгие математические основания теории вероятностей

Аксиоматическое определение вероятности (аксиомы А. Н. Колмогорова)

Пусть E – **вероятностный эк**сперимент и (Ω, F, P) – **математическая модель** этого эксперимента – **вероятностное пространство** (термин А. Н. Колмогорова), где $\Omega = \{\omega_i\}$ – **пространство элементарных исходов**, элементами которого являются результаты эксперимента Е; F – набор **подмножеств множества** Ω, называемых **событиями**; $P(A_i)$ – **вероятности**, приписываемые событиям $A_i \in F$, причем эти вероятности удовлетворяют следующим аксиомам вероятности:

1. Для каждого события A_i из множества F определена числовая функция $P(A_i)$, называемая вероятностью, такая, что $0 \le P(A_i) \le 1$;

2. Вероятность достоверного события равна 1: $P(\Omega) = 1$;

3. Вероятность невозможного события равна 0: $P(\varnothing) = 0$;

4. Вероятность суммы конечного числа попарно несовместных событий (пресечение которых есть $\varnothing$) равна сумме их вероятностей.

Заметим, что для конечных пространств достаточно двух аксиом:

1. $P(\Omega) = 1$;

2. $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

Это означает, что если для некоторых событий $F = \{\Omega, \varnothing, A, B\}$ образующих алгебру, выполняются равенства 1–2, то величины $P(\Omega)$, $P(A+B)$, $P(A)$ и $P(B)$ по определению являются вероятностями.

Конечномерный дискретный случай (в данной работе рассматриваются только этот случай) **позволяет задавать F как часть подмножеств множества** Ω. Полезно иметь в виду, что на конечном множестве Ω понятия алгебры событий и σ-алгебры совпадают. Рассмотрим более подробно введенные понятия.

Алгебра событий

С математической точки зрения пространством Ω может быть произвольное множество. **В качестве множества событий** F **можно брать не все возможные подмножества Ω, а только часть их**: само множество Ω, пустое множество ∅ и множества A и B. Такое множество называется **алгеброй подмножеств Ω или алгеброй событий.** Оно содержит вместе с каждыми двумя подмножествами не только объединение событий, но и их пересечение, дополнение, разность и симметрическую разность.

Два события называются **совместными**, если они могут произойти одновременно. Два события называются **несовместными**, если они не могут произойти одновременно.

Два события называются **зависимыми**, если появление одного из них влияет на вероятность появления другого. Два события называются **независимыми**, если появление одного из них не влияет на вероятность появления другого.

Несовместные события, вероятности которых отличны от нуля, всегда зависимые.

Вероятность суммы двух событий А и В:

- для несовместных событий: $P(A + B) = P(A) + P(B)$;
- для совместных событий: $P(A + B) = P(A) + P(B) – P(A{\cdot}B)$;

Вероятность произведения двух событий:

- для независимых событий: $P(A{\cdot}B) = P(A) \cdot P(B)$;
- для зависимых событий: $P(A{\cdot}B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$.

Если $P(A) + P(B) = 1$, то события А и В образуют **полную систему событий**.

Отметим, что в процессе знакомства с обширной научной и учебной литературой мы не обнаружили работ по вероятности дидактических событий, в частности, по вероятности сложности и трудности математических задач. Существующий пробел мы устраняем, пользуясь «свободой» выбора вероятности событий в аксиоматике А.Н. Колмогорова для дальнейшего вычисления энтропии и информации.

Задача. На рисунке 1.15а схематично представлена группа пяти случайно отобранных задач. Кроме количества задач остальные характеристики этой группы неизвестны, или не учитываются (упорядоченная ли это группа, или неупорядоченная, все задачи одинаковой трудности, или по трудности задачи различаются, все задачи легкие или все трудные, задачи тематически связаны друг с другом, или вообще никак не связаны и т.п.).

На рисунке 1.15б задачи разделены на две части – легкие и трудные. В данном случае иззвестно количество задач и дополнительно указано, что задачи двух видов – три задачи более легкие, две задачи труднее, считается, что задачи одного вида имеют одинаковую трудность.

Поставим перед собой цель: выяснить особенности нахождения энтропии и информации каждой грцппы задач, а также соотношение энтропии и информации в каждом случае.

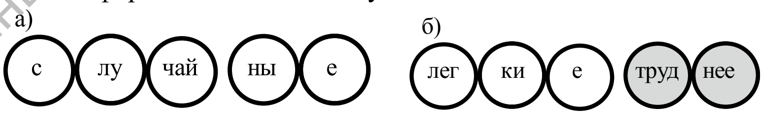


Рис. 1.15

1-й способ. **Нахождение энтропии и информации в соответствии с теорией К. Шеннона, учитывающей только количество задач.** На рисунке 1.15а найдем энтропию и информацию группы задач, состоящей из пяти задач. Если (как в теории К. Шеннона) рассматриваются **все подмножества** множества данных пяти задач, то возможны следующие состояния системы: не решены все задачи; решена только одна задача (любая из данных, но какая именно – неизвестно); решены только две задачи (также любые из данных, но какие именно также неизвестно); решены только три задачи (любые из данных, какие именно неизвестно); решены только четыре задачи (любые из данных, какие именно неизвестно); решены все пять задач. В этом случае Ω – множество данных пяти задач, множество состояний F – множество всех подмножеств множества Ω, F = $\{C_5^0;\ C_5^1;\ C_5^2;\ C_5^3;\ C_5^4;\ C_5^5\}$. Число состояний в каждом случае равно: $C_5^0=1$; $C_5^1=5$; $C_5^2=10$; $C_5^3=10$; $C_5^4=5$; $C_5^5=1$. Общее число состояний N = 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 = 2^5. Вероятности этих состояний равны:1/32; 5/32; 10/32; 10/32; 5/32; 1/32, причем сумма этих вероятностей равна 1. Так как в каждом состоянии только одно событие достоверно, а остальные недостоверны, т.е. все p_i=0, кроме одного p_k=1, то тогда $H = \log_2 1 = 0$ и изменения частных энтропий не получаем (как и следовало ожидать). Тогда по общей теории энтропии К. Шеннона

$$H=\left(\frac{1}{32}\log_2 32+\frac{5}{32}\log_2\frac{32}{5}+\frac{10}{32}\log_2\frac{32}{10}\right)\cdot 2\approx 2,6520,\ \ H_{\max}=\log_2 32=5,$$

$$I=H_{\max}-H\approx 5-2,6520\approx 2,3480,\ \ H\ >\ I \text{ на } 0,304 \text{ бит.}$$

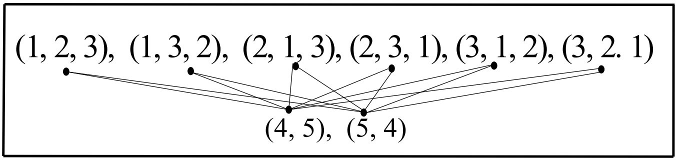
Теоретический анализ и выводы. 1. Характерным примером применения теории энтропии К. Шеннона служит теория кодирования и передачи информации. Предложенный только что вариант дидактической интерпретации показывает, почему необходимо рассматривать все подмножества множества Ω, почему неопределенности типа «любая одна задача из числа всех одноэлементных подмножеств», «любые две задачи их числа всех двухэлементных подмножеств» и т.д. не влияют на окончательный ответ. Тем самым энтропия системы сводится к сумме частных энтропий самих её состояний. Как конкретно те или иные задачи влияют на энтропию, этот способ не показывает, прямая связь отсутствует, хотя в содержательном отношении было бы полезно.

2. Для n = 5 превышение H над I незначительное и вполне (с точки зрения количества задач) допустимое. Для n = 6 ситуация изменится: информации будет больше, чем энтропии. Рассмотренные случаи позволяют уточнить понятие **«малая группа задач».** Они свидетельствуют, что при разбиении задач на малые группы предпочтительнее составлять

их из **не более, чем 5–6 задач**. Увеличение количества задач в малой группе можно допускать, если часть задач решается устно. Этот факт положен нами в основу определения малой группы задач и унификации количества задач в малой группе.

3. Заметим также, что энтропия пяти задач будет незначительной, даже в том случае, если ими окажутся пять нерешенных до сих пор (открытых) в математике проблем Гильберта! Этот факт наглядно свидетельствует о недостаточности количественной энтропии для оценки трудности задач и необходимости увязывания вероятности событий с трудностью задач.

2-й способ. **Комбинаторный способ, учитывающей деление группы задач на две части и возможность нахождения энтропии и информации с помощью аксиоматики вероятности А.Н. Колмогорова.** Рассмотрим группу задач, разделенную на две части: легкие и более трудные (рис. 1.15б). Деление группы задач на две части есть уже определенное упорядочивание. Однако вопрос о порядке требует уточнения. Одновременно с этим должен быть решен также вопрос о том, какое событие считать благоприятным. Если считать за благоприятное событие единственное событие «задачи должны быть решены все и в строго заданной последовательности», то нивелируется смысл деления задач на две части. Такое толкование благоприятного события необходимо исключить. Кроме того, если с самого начала применили некоторое упорядочивание, то естественно комбинаторику связать с размещениями или перестановками. Окончательное решение этих вопросов свяжем с основной целью – сравнить этот способ с 1-м способом. В результате будем считать, что множество Ω – множество всех перестановок, сохраняющие деление задач на две указанные части и не допускающие перестановку этих частей, число таких перестановок равно 12. Благоприятные события свяжем с выполнением следующих условий: а) они сохраняют отнесение задач к указанным двум частям, причем сами части не переставляются; б) считается, что хотя все задачи первой части легче задач второй части, но внутри каждой части по трудности существуют определенные различия, которыми нельзя пренебречь. Эти условия означают, что из всех перестановок множества Ω только одна является наиболее комфортной для учащихся с точки зрения трудности. Её и будем выбирать в качестве благоприятного события А. Пусть благоприятным событием является объединение перестановок (1, 2, 3) и (4, 5). Непосредственно выписывая такие перестановки и их объединение, получим, что Ω содержит $6 \cdot 2 = 12$ объединений таких перестановок (см. схему):



Обозначим множество {(1,2,3), (4,5)} буквой А. Все остальные множества такого вида из Ω обозначим как дополнение к А: $\overline{\mathrm{A}}$.
Применяя аксиомы вероятности А.Н. Колмогорова. имеем

$$\Omega = \{\Omega, \varnothing, \mathrm{A}, \overline{\mathrm{A}}\},\ N = 4,\ \mathrm{A} \cup \overline{\mathrm{A}} = \Omega,\ \mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{A}} = \varnothing,$$

$$P(\mathrm{A}) + P(\overline{\mathrm{A}}) = P(\Omega) = 1,\ P(\mathrm{A}) = 1/12,\ P(\overline{\mathrm{A}}) = 11/12.$$

$$H = \frac{1}{12}\log_2 12 + \frac{11}{12}\log_2 \frac{12}{11} = \frac{1}{12} \cdot \frac{\lg 12}{0,301} + \frac{11}{12} \cdot \frac{\lg \frac{12}{11}}{0,301} \approx 0,2988 + 0,1151 \approx 0,4139,$$

$$H_{\max} = \log_2 4 = 2,\ I = H_{\max} - H \approx 2 - 0,4139 \approx 1,5861,\ I > H.$$

Теоретический анализ и выводы. 1. Рассмотренный способ вполне приемлемый. В нем $I > H$, что положительно характеризует группу пяти задач, состоящую из двух заданных частей и отношением порядка, как самих частей, так и задач внутри каждой части с позиции трудности задач. Этот способ лучше по сравнению с первым способом, в котором $I > H$. Предложенный способ, в отличие от первого, учитывает и количество задач, и их трудность. Полученный результат согласуется с интуитивными ожиданиями (хаоса по сравнению с первым способом стало меньше, поэтому энтропии стало меньше, чем информации).

2. В данном способе мы отошли от «массовости» задания множества состояний: к Ω отнесли не все перестановки из 5 элементов (их 120), а всего четыре состояния: Ω, ∅, А, $\overline{\mathrm{A}}$.

3. Данный способ может использоваться при составлении малой группы задач в учебнике, в тестовых заданиях, заданиях ЦТ, заданиях для самостоятельной или контрольной работ.

4. В качестве недостатка можно отметить, что данный способ, оперируя достаточно крупными перестановками, плохо отражает процесс решения задач.

5. Допускает интуитивный (опытный) выбор единственного, наилучшего варианта выбора множества А. Тем самым не исключается определенный произвол в выборе этого множества.

РАЗРАБОТКА ПРИКЛАДНОЙ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ, ЭНТРОПИИ И ИНФОРМАЦИИ НА ОСНОВЕ АКСИОМАТИКИ ВЕРОЯТНОСТИ А. Н. КОЛМОГОРОВА

3-й способ. **Прикладная теория вероятности, энтропии и информации, учитывающая наличие двух уровней трудности с преобладанием количества легких задач.**

Множество Ω зададим как множество, состоящее из пяти данных задач Ω = {з1, з2, з3, з4, з5}, разделенное на две непересекающиеся части А = {з1, з2, з3}, В = {з4, з5}, объединение которых равно Ω (см. рис. 1.15б) – три первых задачи являются сравнительно легкими, две последние – более трудными, причем количество трудных задач меньше, чем более легких. Рассмотрим множество событий F = {Ω, ∅, A, B}. Нетрудно проверить, что множество F является σ-алгеброй (сумма, произведение, дополнение, разность, симметрическая разность любых двух событий из F снова принадлежат F). Общее число событий (альтернатив) N = 4. Так как $B = \bar{A}$, то данный случай сводится к предыдущему. Учитывая, что $A \cap B = \varnothing$ (события А и В несовместны), $A \cup B = \Omega$ и $P(\Omega) = 1$, то $P(A) + P(B) = P(\Omega) = 1$. Поэтому любые такие числа P(A) и P(B) по общей теории А. Н. Колмогорова являются вероятностями и достаточно задать одну из этих вероятностей, например, $P(A) = 3/5$, тогда $P(B) = 1 - 3/5 = 2/5$ (такое задание поддерживает соотношение $P(A) > P(B)$ – **вероятность решения легких задач больше вероятности решения трудных задач, а значит, учитывает трудность задач**). Поэтому для несовместных событий А и В энтропия их суммы

$$H = \frac{3}{5}\log_2\frac{5}{3} + \frac{2}{5}\log_2\frac{5}{2} = \frac{3}{5}\frac{\lg(5/3)}{\lg 2} + \frac{2}{5}\frac{\lg(5/2)}{\lg 2} \approx 0,4422 + 0,5288 \approx 0,9710,$$

За N примем количество событий (элементов множества F). Тогда

$$H_{\max} = \log_2 \mathrm{N} = \log_2 4 = 2, \quad I = H_{\max} - H \approx 1,0290, \quad I > H.$$

Теоретический анализ и выводы. 1. Идея сравнения случайных событий по их большей или меньшей вероятности высказана С. Н. Бернштейном (Теория вероятностей. Пособие для высшей школы. / Москва–Ленинград: Гос. издательство, 1927. – 363 с). Хотя, по мнению специалистов, формализовать теорию вероятностей на этой основе не удалось. После создания аксиоматики А.Н. Колмогорова эта идея нами используется для строгого **построения прикладной теории вероятностей, энтропии и информации, позволяющая соединить общую теорию вероятностей с её приложениями.**

2. Если за N принять не |F| = 4, а |Ω| = 5, то неравенство $I > H$ будет тем более выполняться. В рассмотренном способе, энтропия и информация мало отличаются друг от друга. Главное, что соотношение между ними оказалось в пользу информации. Такое соотношение характерно для 2–3-го способов.

3. Интересно отметить, что первая частная энтропия (0.4422) меньше второй частной энтропии (0.5288). Это означает, что большая вероятность решения первой части задач реально способствует уменьшению общего количества энтропии. Чем ближе значения P(A) и P(B) к концам отрезка [0; 1], тем энтропия будет уменьшаться, а информация возрастать.

4. Неполнота аксиом вероятностей допускает неоднозначное их задание даже для одного и того же вероятностного пространства. Не случайно, что в научной и учебной литературе во всех задачах на нахождение вероятностей событий (при применении аксиоматики вероятностей) вероятность хотя бы одного события задается, а не выводится откуда-либо из формальных соображений или тем более массовых экспериментов.

5. Выбор вероятности некоторых событий ограничивается спецификой практической ситуации – дополнительным ограничением. Например, вероятность события А должна быть больше 0,5, а вероятность события В меньше 0,5 (см. первый способ). Если скачок трудности значительный, то соотношение вероятностей может быть выбрано таким: P(A) = 0,7,   P(B) = 0.3.

6. Формальная неоднозначность вероятностей не должна восприниматься как ничем не ограниченный произвол для одной и той же системы задач. **На самом деле при разных скачках трудности каждый раз получаются различные системы задач и естественно, что им будут соответствовать различные вероятности.** Главное заключается в том, что если все условия в аксиоматическом определении вероятности выполняются, то заданные значения P(A) и P(B) (при их формальной неоднозначности) являются вероятностями событий А и В.

7. Тот факт, что две последние задачи труднее трех первых задач, выражают вероятности их решения (P(B) < P(A)) – вероятность решения трудной части задач меньше, чем вероятность решения более легкой

части. Не нужно упускать из вида, что трудность является субъектным фактором. То, что трудно для одних учащихся может быть менее трудным для других, то, что трудно в начале изучения темы может быть легким при завершении учебной темы и т.п. Субъектность не является недостатком, напротив, она выражает основной дидактический принцип – обучение должно вестись с учетом индивидуальных интеллектуальных возможностей учащихся и закономерностей усвоения на каждом этапе образовательного процесса.

8. Данный способ, включая и задание вероятностей, является формальным – он не зависит от опыта, вероятности задавались как отношения количества рассматриваемых задач. Содержательный контекст задачи позволяет задать вероятности с учетом опыта (см. определение трудности задач): трудность части малой группы задач, поделенной на две части, для группы учащихся равна отношению количества учащихся, не решивших все задачи данной части, ко всему количеству учащихся. Пусть, например, $t_1 = 1/m$, $t_2 = 3/m$, т.е. из m учащихся 1 ученик не решил все задачи первой части и 3 ученика не решили все задачи второй части. Тогда $t_1/t_2 = 1/3$. Будем считать, что **вероятности обратно пропорциональны трудностям задач**: P(A)/P(B) = 3/1 и учитывая, что сумма вероятностей равна 1, получим P(A) = 3/4 = 0,75, P(B) = 1/4 = 0,25. Нетрудно теперь найти энтропию и информацию малой группы задач, оставляя H_{max} прежним: $H \approx 0,3113 + 0,5 \approx 0,8113$. Как видно, общее количество энтропии уменьшилось, причем более заметное влияние оказало уменьшение значения первой частной энтропии. В этом случае вероятности находятся **по свершившемуся факту**, после выполнения работы учащимися. Однозначность выбора вероятностей обеспечена. Подобное обстоятельство свидетельствует о возможности унификации процесса построения малых групп задач.

9. Энтропию малой группы задач, состоящую из двух частей различной трудности, характеризуем как энтропию множества $A \cup B$ – с помощью вероятности событий A и B. В этом случае прикладная теория вероятности и энтропии отражает и количественный фактор (число задач), и их трудность, что имеет существенное дидактическое значение.

10. В виду важности понятия скачка трудности задач, приведем его уточнения.

1) **Скачок значительный.** Например, P(A) = 0,7, P(B) = 0,3. В этом случае $H = 0,8813$, $I = 1,1187$, $I > H$.

2) **Скачок средний величины.** Например, P(A) = 0,6, P(B) = 0,4. В этом случае $H = 0,9710$, $I = 1,0290$, $I > H$.

3) **Скачок незначительный.** Например, P(A) = 0,51, P(B) = 0,49. В этом случае $H = 0{,}9998$, $I = 1{,}0002$, $I > H$.

Как видно, при уменьшении скачка количества энтропии и информации отличаются все меньше и меньше.

Следующие способы оснваны на реальных ситуациях возникновения различных скачков.

4-й способ. **Прикладная теория вероятности, энтропии и информации, учитывающая количество учащихся, решивших ту или иную часть задач.** Рассмотрим следующую систему семи задач, состоящую из двух частей. Задачи в каждой части равновероятны, со своей внутренней вероятностью.

1-я часть (4 устных задачи): **1** (ответ обоснуйте**).** Может ли быть в треугольнике: а) два тупых угла; б) тупой и прямой углы; в) тупой и два острых; г) два прямых угла?

2-я часть (3 задачи для письменного решения): **2.** Углы треугольника относятся как 1:3:4. Найдите их. Обозначьте меньший угол буквой x. **3.** Сумма двух углов в треугольнике равна третьему углу. Докажите, что в треугольнике имеется прямой угол. **4.** Даны три произвольных угла. Выяснить, могут ли они быть углами треугольника, если они относятся как 1:2:3 и третий угол больше второго на 40°.

В данном случае Ω = {з1а, з1б, з1в, з1г, з2, з3, з4}. Рассмотрим множество непересекающихся событий A = {з1а, з1б, з1в, з1г} и B = {з2, з3, з4}, объединение которых равно Ω. Как и в предыдущем случае F = {Ω, ∅, A, B}. Теоретико-множественные операции любых двух событий из F дают событие, снова принадлежащее F. Поэтому F – алгебра событий. Общее число событий (альтернатив) N = 4. Вероятности событий равны: P(Ω) = 1. (вероятность достоверного события; P(∅) = 0 (вероятность невозможного события). Как и выше показывается, что P(A) + P(B) = 1. Осталось задать P(A) и P(B) таким образом, чтобы выполнялось записанное равенство. Вероятности решения задач каждой части этих задач (событий A и B) зададим из следующих соображений. Многократные наблюдения показывают, что уже на начальном этапе изучения учебной темы не менее 75% учащихся успешно справляются с решением первой части задач (с решением устных задач). Примем общее количество учащихся за 100**%**, за вероятность решения этой части задач за P(A) ≈ ≈ 0,75. Тогда P(B) = 1 – 0,75 ≈ 0,25 – вероятность решения второй части задач. Находим:

$$H \approx 0,75\log_2\frac{100}{75}+0,25\log_2\frac{100}{25}\approx 0,75\frac{\lg\frac{100}{75}}{\lg 2}+0,25\frac{\lg 4}{\lg 2}\approx 0,3113+0,5000\approx 0,8113,$$

$$H_{\max}=\log_2 \mathrm{N}=\log_2 4=2, \quad I\approx 2-0,8113\approx 1,1887,\ I>H.$$

Теоретический анализ и выводы. Значительный скачок P(A) = 0,7, P(B) = 0,3 получается, если количество учащихся, решивших первую и вторую части задач соответственно равны 18 и 8. Умеренный скачок P(A) = 0,6, P(B) = 0,4 получается, если количество учащихся, решивших первую и вторую части задач, соответственно равны 15 и 10. Незначительный скачок P(A) = 0,51, P(B) = 0,49 получается, если количество учащихся, решивших первую и вторую части задач, соответственно равны 13 и 12. Приведенные данные подчеркивают практическое происхождение вероятностей, которые освобождены от эмпиризма, так как они допустимы общей математической теорией А. Н. Колмогорова и получают на её основе строгое математическое обоснование.

5-й способ. **Прикладная теория вероятности, энтропии и информации, учитывающая затраты времени на решение каждой части задач.** Рассмотрим предыдущую систему задач. Отметим, что временной критерий носит максимально субъектный заректер и позволяет оптимальным образом учесть трудность задач как комплексный критерий, включающий в себя весь набор различных факторов: время на чтение и осмысление задачи, разные по затратам времени формы учебной работы – устную или письменную, коллективное решение задачи, с активным првлечением эвристической беседы или без привления её и т.д. Рассмотрим два непересекающихся события так же, как и в предыдущем способе: A = {з1а, з1б, з1г, з1в}, B = {з2, з3, з4}, объединение которых равно Ω = {з1а, з1б, з1г, з1в, з2, з3, з4}. Число событий N множества F = {Ω, ∅, A и B} равно 4. Как и выше показывается, что в этом случае всегда P(A) + P(B) = 1. Зададим вероятности событий A и B следующим образом. Пусть по наблюдениям в разных классах средние затраты времени на первую и вторую части группы задач, рассмотренной в предыдущем способе, составили соответственно 10 мин и 35 мин. Положим, что: P(A) =10/45, P(B) = 35/45, P(A) + P(B) = 1. В данном случае вероятности затрат времени (P(B) >P(A) означает, что **вероятность затрат времени на вторую, более трудную часть задач больше, чем вероятность затрат времени на более легкую часть задач**). Находим:

$$H \approx \frac{2}{9}\log_2\frac{9}{2}+\frac{7}{9}\log_2\frac{9}{7} \approx \frac{2}{9}\frac{\lg\frac{9}{2}}{\lg 2}+\frac{7}{9}\frac{\lg\frac{9}{7}}{\lg 2} \approx 0,4822+0,2820 \approx 0,7642,$$

Так как N = 4, то

$$H_{\max} = \log_2 4 = 2, \quad I \approx 2-0,7642 \approx 1,2358, \quad I > H.$$

Теоретический анализ и выводы. Как видно, значения энтропии и информации в прикладной теории, находимые разными способами, отличаются друг от друга. Эти значения определяется самой практической ситуацией. Для оценки вероятности событий дидактического характера достаточна точность, которая позволяет уточнить соотношение энтропии и информации (что из них больше, что меньше). Находимые значения энтропии в прикладной теории отражают энтропию в данный момент времени для данных учащихся. На наш взгляд, они достаточно точно отражают текущую оценку трудности системы задач, соответствующую конкретной практической ситуации. Регулирование энтропии осуществляется с помощью подбора малых групп задач. Этим определяется полезность предлагаемых в данной работе конкретных способов определения вероятности и на её основе энтропии системы задач. Если результат выбора не полностью соответствует дидактической цели, то система задач перестраивается в сторону увеличения информации. Существенно, что в попытках учесть трудность задач прослеживается снижение влияния количественной энтропии, обеспечение превышения информации над энтропией, устойчивая поддержка этого соотношения между ними.

Выводы и рекомендации.

Проведенное исследование приводит к следующим **выводам и рекомендациям** относительно формирования малых групп задач на основе учета их энтропии:

1. Достаточно простой и надежный способ определения энтропии и информации системы задач из числа рассмотренных основан на аксиоматическом определении вероятности по А. Н. Колмогорову. Этот способ обосновывает возможность различных способов задания вероятности событий; снижает жесткие ограничения на определение вероятности событий, находимыми другими способами; учитывает количество задач, их сложность, трудность и другие субъектные факторы. **Это дает возможность построения прикладной теории вероятностей и энтропии, учитывающей субъектные факторы**. В частности, учитывающей вре-

менной фактор, который является существенным при оценке трудности малой группы задач.

2. <u>Первый шаг к унификации</u>: целесообразно ограничивать примерное количество задач в одной малой группе (5–6-ю задачами). Общее количество задач в малой группе может быть несколько больше, если часть задач решается устно. Если на уроке не все задачи из одной группы удается прорешать (например, по причине того, что кроме этих задач на уроке выполнялись другие работы), то часть задач может быть отнесена к домашнему заданию.

3. <u>Второй шаг к унификации</u>: при определении вероятностей целесообразно выделение в малой группе двух частей: первую часть, состоящую из небольшой группы задач одинаковой трудности, и меньшую в количественном отношении вторую часть – задачи труднее. Для организации этих частей наилучшим образом подходит дискретное равномерное распределение вероятностей событий. Это распределение является одним из простейших, обладающих большой общностью и широтой приложений. Предложены способы задания вероятностей в рамках аксиоматики А. Н. Колмогорова, обеспечивающие соответствие: **вероятность решения более легкой части задач больше вероятности решения трудной части задач**.

4. <u>Третий шаг к унификации</u>: внутри каждой части уровень трудности необходимо выдерживать одинаковым, так как на этом признаке основывается применение теории дискретного равномерного распределения вероятностей событий. Во второй части трудность несколько повышается. Рекомендуется допускать не более одного скачка трудности («рубежный» скачок при переходе от первой части задач ко второй). Не всегда нужно стремиться полностью устранить скачок трудности (**не забываем тезис Д. Пойа «Без трудности нет задачи»**). Небольшое превышение энтропии необходимо использовать в развивающих целях. В случае затруднений учащихся необходимую помощь призван оказать учитель.

5. <u>Четвертый шаг к унификации</u>: не всегда малая группа должна быть «самодостаточной», т. е. в ней самой должно быть все необходимое для успешного решения задач (вначале подготовительные задачи, затем более сложные и трудные задачи). Для следующей малой группы роль подготовительных задач может выполнять предыдущая группа.

6. При построении малых групп в учебнике нет необходимости каждый раз подсчитывать энтропию. Так как нахождение энтропии носит

унифицированный характер (одно и тоже количество задач, одно и тоже количество вероятностных случаев, постоянное выдерживание одного и того же соотношения – первая часть задач легче, вторая часть задач труднее), то вполне достаточно пользоваться только сформулированными рекомендациями. Этими рекомендациями может руководствоваться и учитель при подборе задач для классной и домашней работы.

В заключение изучения данного вопроса (имея в виду, прежде всего, адресат этой работы – начинающих ученых) позволим себе такое сравнение: окружающий мир и наука, в том числе математика, – это высоко энтропийные миры, сравнимые (возможно не столь отдаленно) с крупными лесными массивами и встречающимися в них «непролазными буреломами». Попытка регулирования энтропии и информации математическими методами – это всего лишь попытка расчистить и сделать проходимыми эти «буреломы», оставляя, по возможности, сам лес в нетронутом состоянии, в его великолепном, естественном, энтропийном виде.

1.2.2. МЕТОДИЧЕСКИЕ ПРИЕМЫ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДОСТУПНОСТИ СОДЕРЖАНИЯ УЧЕБНИКА

Доступность системы определений. Доступность геометрического содержания обеспечивается, прежде всего, хорошим усвоением системы определений. Определения – самая многочисленная исходная база для построения теории и решения задач. В каждой учебной теме содержится достаточно большое количество определений, не говоря уже о годовом учебном курсе. Обеспечению доступности системы определений способствуют разбиение соответствующих задач на малые группы, применение математических методов, обеспечивающих в своей совокупности оптимизацию содержания учебника: оптимизации по Парето, энтропийного анализа К. Шеннона с применением аксиоматики вероятности А. Н. Колмогорова, фрактальной организации учебного материала на основе теории Б. Мандельброта – его неоднократной проработки с привлечением самоподобия. Практика обучения свидетельствует, что «охватить» систему определений одной механической памятью учащимся не под силу. В лучшем случае происходит узнавание понятий по внешним признакам (по изображению, по рисунку), а не по свойствам, указанным в определении. Важно также не просто заучивать определения, но и понимать каким образом они используются в геометрии. Необходимо разъяснять учащимся, что определения выражают необходимые и достаточные условия того или иного понятия. Например, если четырехугольник – параллелограмм, то по определению его противоположные стороны попарно параллельны. Справедливо и обратное: если в четырехугольнике противоположные стороны попарно параллельны, то четырехугольник является параллелограммом (опять же по определению параллелограмма). Этим объясняется тот факт, что определения служат не только средством введения терминологии и развития математической речи, но и средством проведения доказательств теорем и решения задач.

Первый пример. Традиционное определение равенства треугольников, как фигур, совмещающихся при наложении, указанную функцию в построении геометрии фактически не выполняет и его применение ограничивается признаками равенства треугольников. В дальнейшем это определение становится бесполезным и нигде не используется. Такая ситуация объяснима: никто (за редким исключением) не станет ограниченную, локальную нестрогость распространять на другие части геометрии.

Второй пример. Другое определение равных треугольников, получающее определенное распространение в школьных учебниках, как треугольников, у которых соответственные стороны и углы равны, таким дефектом не обладает. В задачах широко используется как необходимое условие понятия, так и достаточное условие. Необходимое условие выражается в том, что если даны равные треугольники, то по определению для них выполняется шесть равенств (!): три для соответственных сторон и три для соответственных углов. «Обилие» необходимых условий говорит о том, что определение может использоваться при решении самых разнообразных задач, связанных с медианами, биссектрисами и высотами треугольников.

Задачи (рис. 1.16)**.** а) Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, AB=3, B_1C_1=4, A_1C_1=6, периметр треугольника ABC равен 13. Найдите неизвестные стороны треугольников.

б) Найдите угол α*,* используя данные на готовых чертежах:

в) Найдите перпендикулярные и параллельные прямые на рисунке.

г) Докажите, что если треугольники равны, то медианы одного треугольника соответственно равны медианам другого треугольника.

Обеспечение доступности обучения с помощью задач для устного решения.

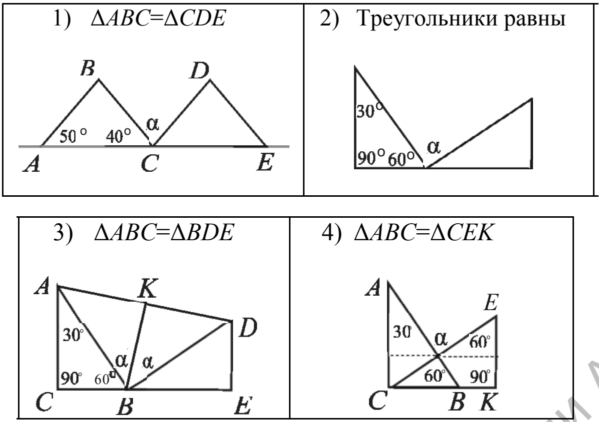


Рис. 1.16

Задача (рис. 1.17): а) найдите угол между биссектрисами углов *AOB* и *AOC*, *AOB* и *BOF*; б) назовите наибольший из изображенных углов.

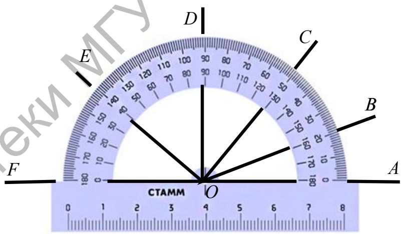


Рис. 1.17

Задачи для устного решения оказываются незаменимыми при введении нового учебного материала. С их помощью формируется осознанное его восприятие и понимание. Они более доступны и способствуют организации коллективной интерактивной работы учащихся.

Обеспечение доступности задач с помощью задач на готовых чертежах. Задачи на готовых чертежах выполняют обучающую функцию, показывая образцы выполнения чертежей. С их помощью повышается оперативность предъявления задачи, сокращаются затраты времени на решение. Важно, что они служат средством наглядности. Тем не менее, необходим определенный баланс, способствующий выработке навыка самостоятельного выполнения чертежа по условию задачи. Этот баланс не всегда поддерживается в специальных учебных пособиях, в которых все задачи приводятся на готовых чертежах. Таких задач нужно «столько, сколько нужно» и эту неопределенность легче разрешить в самом учебнике. Лишних задач на готовых чертежах не должно быть. Учащиеся должны учиться выполнить чертежи к задачам в классе (с той или иной помощью учителя), или дома при самостоятельной работе. Примеры задач на готовых чертежах.

Задачи. На рисунке 1.18 прямые *a* и *b* параллельны. Найдите угол α.

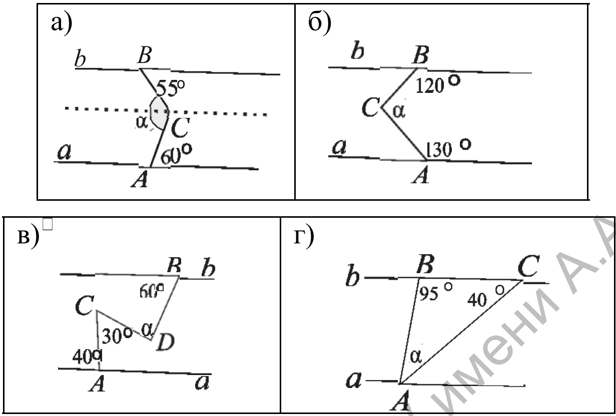


Рис. 1.18

О разграничении задач, общих для любого уровня обучения и дополнительных для повышенного уровня

(профилактика перегрузки учащихся базового уровня)

Учитывая, что учащиеся даже в одном классе имеют различную подготовку и различный темп в усвоении учебного материала, целесообразна определенная **избыточность системы задач**. Избыточность необходима, но наряду с этим необходимо учитывать, что она источник перегрузки учащихся. **Перегрузка учащихся в данном исследовании предупреждается отнесением части задач в раздел «Дополнительные задачи».** Обязательные задачи (в работе соответствующий раздел называется «Основные задачи») предназначены для базового и повышенного уровня в одинаковой мере. К обязательным задачам относятся задачи, приводимые с решениями в теоретической части, а также интерактивные задания для коллективного решения. Дополнительные задачи в основном предназначены для повышенного уровня и совсем необязательно в каждом классе стремится перерешать их все. Часть этих задач может рекомендоваться также и на базовом уровне в индивидуальном порядке. Соотношение количества задач обязательного отдела и дополнительных задач не является абсолютным, находится примерно в отношении 2:1.

К дополнительным задачам рекомендуется отнести не только задачи повышенной сложности, но и часть задач обычной, средней сложности. Не следует стремиться в любом классе перерешать со всеми учащимися все задачи. Часть задач может остаться не решенными, к ним можно обратиться позже, например, при повторении учебного материала. Объем домашнего задания не должен превышать объема заданий, выполненных на уроке. Для активизации учащихся на уроке полезны задачи для устного решения, которые выполняются с помощью рисунка, приводимого на классной доске, либо рисунка из учебника (если он имеется в нем).

Задачи для письменного решения выполняются по полной схеме: в тетрадях приводится рисунок, краткая запись задачи и её решения. Не следует изобретать особую, универсальную форму записи решения, необходимо пользоваться образцами записи решений в учебнике.

1.2.3. СПЕЦИАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ СИСТЕМЫ ЗАДАЧ: МЕТОДЫ ПОДЗАДАЧ И ПРЕДЗАДАЧ

Понятие ЛМС задач аналогично ЛМС теоретического материала (см. п. 2.1). Понятие ЛМС задач подразумевает в системе задач два вида логических связей: связи с теорией (ведущие связи) и связи задач друг с другом, включая ссылки при решении одних задач на ранее решенные задачи (что делается гораздо реже).

Одним из методов построения ЛМС задач служат **методы подзадач и предзадач**. Эти методы предназначены для облегчения решения некоторой более сложной задачи путем разбиения её на несколько частных задач, являющихся частью решения исходной сложной задачи. Сложная задача служит целевой задачей, ради которой осуществляется её разбиение на группу задач. Если группа таких задач приводится после целевой задачи и сообщается, что предварительно надо решить эти вспомогательные задачи, то такой способ организации задач называется **методом подзадач**. Подзадачами служит приводимая группа вспомогательных задач (Д. Пойа подчеркивал, что **вспомогательная задача** – это задача, которую мы рассматриваем не ради нее самой, а лишь потому, что надеемся, рассматривая ее, приблизиться к решению исходной задачи). Если же эта группа вспомогательных задач приводится до целевой задачи (и сообщается, а иногда и не сообщаться, что она поможет потом решить более сложную задачу), то такой способ организации задач называется **методом предзадач**.

Первый вид подзадач: к нему относятся вспомогательные задачи, решение которых является частью решения целевой задачи. Допустим, что решение целевой задачи состоит из 6 элементарных шагов, которые нельзя разбить на более мелкие шаги. Для каждого шага может быть сформулирована *элементарная подзадача* целевой задачи. Предъявление ученику подзадач естественно рассматривать как помощь в решении целевой задачи. Чаще всего сведение целевой задачи к полному набору элементарных подзадач методически нецелесообразно. В этом случае некоторые элементарные подзадачи объединяют, и образуют меньшее число подзадач. Формальным признаком подзадач является то, что их решение составляет часть решения целевой задачи. В таком смысле понятие подзадача используется в теории искусственного интеллекта.

Второй вид подзадач: к нему относятся вспомогательные задачи, решение которых не является частью решения целевой задачи, но которые подсказывают идею, способ, метод решения целевой задачи. Вспомогательная задача в этом случае косвенно связана с целевой и формально не представляет собой подзадачу первого вида. Связь носит исключительно эвристический характер.

Пример метода подзадач. При изучении комбинаций треугольника и окружности (9 кл.) может быть рассмотрена классическая задача о прямой Симсона). Задачи 1–5 – подзадачи, заключительная задача 6 – дает решение целевой задачи (рис. 1.19).

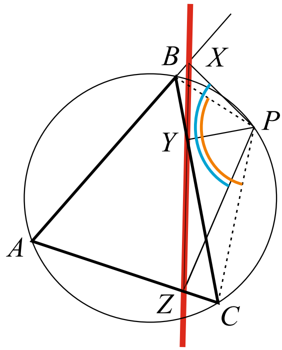


Рис. 1.19

Целевая задача. Пусть P – некоторая точка окружности, описанной около треугольника ABC. Точки X, Y и Z – основания перпендикуляров, проведенных из точки P соответственно на прямые AB, BC, CA. Докажите, что точки X, Y и Z лежат на одной прямой.

Для этого решим следующие **подзадачи**:

1) $\angle BYX = \angle BPX$ (рассмотрите окружность с диаметром BP); $\angle ZYC = \angle ZPC$ (аналогично предыдущему шагу);

2) $\angle XPZ = 180^\circ - \angle A$ (воспользуйтесь свойством углов с взаимно перпендикулярными сторонами);

3) $\angle BPC = 180° - \angle A$ (примените свойство углов вписанного четырехугольника $ABPC$);

4) $\angle XPZ = \angle BPC$ (см. пп.3,4);

5) $XPZ = BPC$ (так как углы XPZ и BPC имеют общий угол BPZ; если к этому общему углу один раз прибавить угол BPX, а другой раз угол

ZPC, при этом получим соответственно равные углы *XPZ* и *BPC*, то прибавляемые углы также равны);

6) <u>целевая задача</u>: докажите, что точки *X*, *Y* и *Z* лежат на одной прямой – **прямой Симсона**.

1.2.4 ПОНЯТИЕ ФРАКТАЛА В ТЕОРИИ Б. МАНДЕЛЬБРОТА И ВОПРОСЫ ОПТИМИЗАЦИИ. ФРАКТАЛЬНАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ СИСТЕМЫ ЗАДАЧ. ДИДАКТИЧЕСКИЙ ФРАКТАЛ

Бенуа Мандельброт (1924–2010)
основоположник теории фракталов

Общее понятие фрактальной организации учебного материала (дидактического фрактала). Приведем вначале сведения, общие для фрактального подхода к организации теоретического и задачного материала. Основоположником фрактальной геометрии является Б. Мандельброт, который совершил революционный переворот в науке, раскрыв закономерности структуры объектов, которые раньше считались бесформенными, хаотичными и неподдающимися какому-либо изучению [180]. Б. Мандельброт установил, что существует огромное количество объектов (облака, береговая линия, хаотичное броуновское движение частиц, звездные скопления), которые вовсе не бесформенные. На самом деле они состоят из большого числа самоподобных, порой трудно различимых частей и самое главное – структура этих частей предельно проста. Отмечается, что фракталы часто используются для моделирования сложных явлений и процессов, уменьшая их сложность, а дробная размерность фрактала служит характеристикой неустойчивого поведения систем (Е.Н. Князева и С. П. Курдюмов). Действительно, облака, береговая линия, броуновское движение частиц, биржевые цены, имеющие дробные размерности, – крайне неустойчивы, подвижны и стохастичны. Существуют фракталы без самоподобия. Кроме того, часто самоподобные фракталы при большом дроблении на мелкие части утрачивают самоподобие. Для более глубокого ознакомления с фрактальными процессами рекомендуем работу основоположника теории фракталов Б. Мандельброта [20], работы [18–21], а так же методические работы [69]–[75]. В работе [79] отмечена возможность использования дробной размерности для характеристики сложности системы. Стохастические фракталы заслуживают особого внимание, если делаются попытки использования фрактального моделирования образовательного процесса. По нашему мнению, **именно здесь находится центр применений фракталов в дидактике.** Обсуждаются вопросы фрактальности математического знания в глобально-историческом плане, их роль в формировании культурологического поля каждой области знаний (В. Г. Ермаков [58]). Сформулированные положения обосновывают возможность использования фракталов при моделировании процесса обучения решению задач ([71]–[75]).

Неформальное обучение, как правило, не ограничивается разовым сообщением учебной информации и характеризуется неоднократным вариативным его повторением: повторяются цели обучения, предметное содержание, средства, методы и формы обучения (тем самым, привлекаются два главных признака фракталов: вариативность, благодаря которой он приобретает стохастичность, и самоподобие с сокращением количественных характеристик (сокращение объема учебного материала и затрат времени).

В традиционном обучении повторение часто проводится «на глазок», не всегда организуется оптимальным образом. Фрактальная организация процесса решения задач позволяет избавиться от этого недостатка, или снизить его негативное влияние. Аксиома «Повторение – мать учения» с помощью фракталов получает строгое математическое выражение. Этому способствуют следующие закономерности фрактальной организации процесса решения задач. При фрактальной организации варьируется количество повторений, вариативно повторяющимся является подбор задач и методика объяснения, все это придает обучению динамичный характер и позволяет четче прояснить структуру вариативного объяснения, повторения и закрепления, используя общую идею фрактальной геометрии – **самоподобие**. Фрактальное самоподобие, без преувеличения, открывает новые возможности построения эффективного обучения.

Образовательный процесс, организуемый при изучении различных учебных тем, во многом характеризуется повторением одних и тех же своих компонентов: повторяются цели обучения, структура предметного содержания, средства, методы и формы обучения. Фрактальное моделирование, в основе которого лежит повторяющиеся «витки» и самоподобие в организации учебного материала, объективно позволяет сделать процесс формирования навыков более результативным. Самоподобие с повторяющимися его витками может применяться к построению образовательного процесса в целом, к построению отдельных его этапов, при построении образовательной технологии, организации учебного материала в учебнике (в частности, организации небольших групп задач), построению отдельного урока, введении и закреплении фрагмента нового учебного материала. Самоподобие в данной работе моделируется с помощью различных видов соответствий: а) **предметно-содержательного соответствия** – рассматривается один и тот же учебный геометрический материал; б) **структурного соответствия** – сохраняется последовательность изучения элементов учебного материала и связи между ними; в) **технологического соответствия** – применяется один и тот же набор образовательных технологий. Существенная особенность соответствий состоит в том, что элементы, между которыми устанавливаются соответствия, находятся в непосредственной близости друг от друга, неоднократно повторяются на одном и том же уроке и на соседних уроках. Такие соответствия мы называем **соответствиями «на коротких связях».**

Основная цель использования фрактальной организации учебного материала – обеспечить более комфортные условия для понимания и усвоения нового материала в момент его введения. За основу фрактальной организации образовательного процесса в приводимой модели принимается семикомпонентная структура образовательного процесса (рис. 1.20). Каждый компонент образовательного процесса представляется триадами:

1) планируемые цели (A_1 – дидактические, A_2 – воспитательные, A_3 – развивающие),

2) содержание (B_1 – определения, B_2 – теоремы, B_3 – доказательства, решения задач),

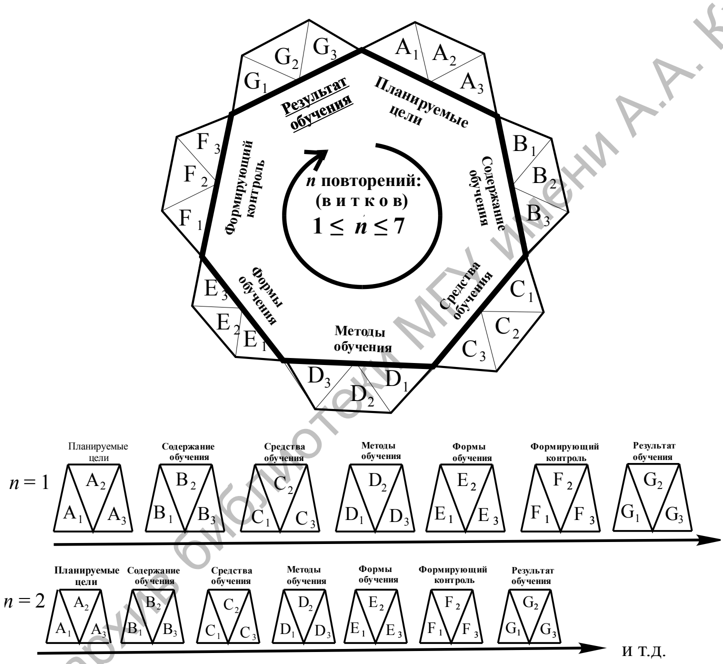
3) средства обучения, источники информации (C_1 – учитель, C_2 – традиционный учебник, C_3 – электронное средство),

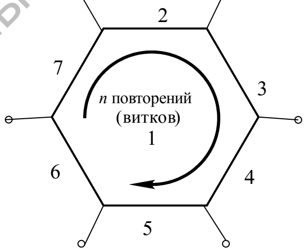
4) методы обучения (D_1 – объяснительно-рецептивный, D_2 – репродуктивный, D_3 – проблемные),

5) формы обучения (E_1 – фронтальные, E_2 – групповые, E_3 – индивидуальные),

6) формирующий контроль (F_1 – воспроизведение информации с приведением примеров и контрпримеров, F_2 – воспроизведение информации на основе элементов её анализа, F_3 – воспроизведение информации в процессе её применения);

7) достигнутые результаты обучения (G_1 – знания, умения, навыки, G_2 – качества личности, G_3 – интеллектуальное развитие).





1 – геометрическое содержание,
2 – опредмеченные цели обучения,
3 – средства обучения,
4 – методы обучения,
5 – формы обучения,
6 – формирующий контроль,
7 – результат обучения

Рис. 1.20

Выделенные триады моделируем с помощью треугольников, прилегающих к сторонам семиугольника. В итоге структура образовательного процесса на уроке моделируется треугольниками A_1–G_3. Они имеют одинаковую цикличность, одну и ту же семикомпонентную структуру. Изучение фрагмента учебного материала предполагает неоднократное вариативное его повторение. Сколько необходимо таких повторений подсказывает формирующий контроль, выполняющий рефлексивную функцию. Каждое новое повторение избирательно подходит к отбору учебного материала, опуская тот материал, который уже усвоен. Сокращается действие и других компонент. Налицо все признаки самоподобия, имеющего место во фракталах. Действует общая, объективная закономерность: **понимание и прочность усвоения при введении нового материала – результат вариативного повторения на основе самоподобия**.

Все вариативные повторения могут осуществляться на одном уроке.

Отличие от фрактала в математике состоит в том, что в математике фрактальный процесс является бесконечным, а в обучении он конечный.

Современные технические материалы и конструкции, имеющие фрактальную структуру, отличаются высокой надежностью и прочностью. Примером может служить **графен** (рис.1.21) – один из самых перспективных материалов в нанотехнологиях, открытых в последние десятилетия. Он представляет собой одноатомный слой углерода, который обладает невероятными свойствами, высокой прочностью, уникальной проводимостью тепла и электричества. Трудно представить, но такая сеть, невидимая для глаза, способна удерживать груз, массой 5–6 кг (более подробно см. Интернет-источники). Из традиционных примеров можно привести конструкции опор для высоковольтных линий электропередач, состоящие из подобных, уменьшающихся тетраэдров. Позволим себе такое сравнение: моделирование на основе самоподобия гарантирует понимание и прочное усвоение знаний – своего рода «**образовательный графен**».

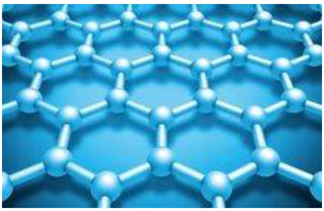


Рис. 1.21

Фрактальная модель процесса обучения математике
(модель на рисунке 1.20б)

В этой модели все компоненты дидактической фрактальной модели конкретизируются с учетом **специфики изучаемого геометрического содержания.** Геометрическое содержание является не просто одним из семи компонентов дидактической модели, а **доминирующим (центральным) компонентом** (на рисунке 1.20б он идет под номером 1), от которого зависят все остальные, приобретая конкретную специфическую форму. Взаимодействие всех компонент становится более организованным и ориентированным на достижение оптимального выбора варианта повторения. Фрактальная организация, таким образом, смыкается с оптимизацией.

3. Конкретизации фрактальной организации теоретического материала

(тема «Различные виды четырехугольников» – (8 класс, рис. 1.22))

Дидактическая цель (A_1): научиться распознавать на рисунке различные виды четырехугольников, усвоить систему определений.

Воспитательная цель (A_2): урок важен тем, что на нем познакомимся с понятиями, которые лежат в основе достаточно крупной темы «Четырехугольники».

Развивающие цели (A_3): предстоит освоить группу определений, связи между ними, научиться уверенно их формулировать, что важно для развития памяти, математической речи и логического мышления.

Содержанием урока является группа определений ($\mathbf{B_1}$).

Источники информации: объяснения учителя, слайды, рисунки, схемы, учебник (C_1–C_2).

Методы обучения: объяснительно-иллюстративный, репродуктивный, элементы проблемного изложения (D_1–D_3).

Формы обучения: фронтальная, коллективная работа (E_1).

Формирующий контроль: закрепление навыков распознавания различных четырехугольников, умения формулировать группу определений, решать первые задачи на применение определений (F_1–F_3).

По учебнику проводится краткий обзор темы. Изучается слайды с рисунками 1.22–1.24 (готовятся заранее, без помощи учащихся не обойтись). Ставится цель: научиться с помощью рисунков формулировать **группу определений**. Для этого предлагаются следующие задания:

Первый виток

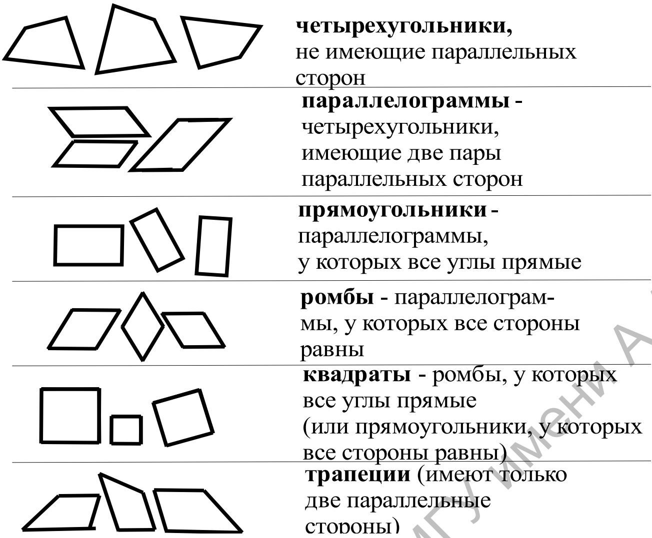


Рис. 1.22

Задание 1. Покажите и назовите на рисунках 1.22 различные четырехугольники.

Задание 2. Пользуясь этими рисунками, сформулируйте определения различных четырехугольников.

Задание 3. Нарисуйте каждый четырёхугольник отдельно. Обозначьте их. С помощью обозначений назовите, какие четырехугольники вы изобразили.

Задание 4. Сформулируйте ещё раз определения с помощью рисунка 1.22.

Задание 5. Приведите рисунки параллелограмма, очень вытянутого вдоль одной его стороны, вдоль другой стороны.

Задание 6. Нарисуйте параллелограмм с прямыми углами. Как он называется?

Задание 7. Нарисуйте параллелограмм с равными сторонами. Как он называется?

Задание 8. Нарисуйте параллелограмм с прямыми углами и равными сторонами. Как он называется?

Задание 9. Являются ли прямоугольник, ромб и квадрат параллелограммами?

Второй виток

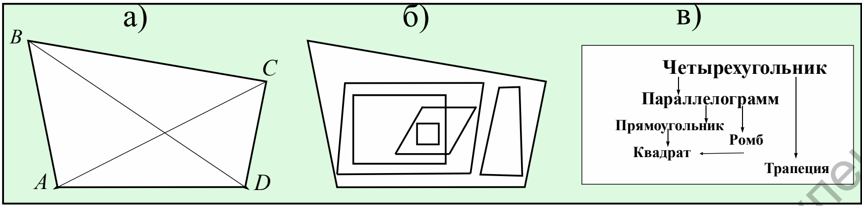


Рис. 1.23

Навык формулирования группы определений закрепляется с помощью рисунка 1.23 и более краткой схемы, проводится закрепление определений с помощью устного, фронтального выполнения следующих заданий:

Задание 10. Проведите диагональ параллелограмма, образовались ли при этом равные углы (докажите свои утверждения)? Каким свойством обладают два получившихся треугольника (докажите свое утверждение)? Справедливы ли эти свойства для прямоугольника, ромба, квадрата, трапеции (докажите свое утверждение)?

Задание 11. Укажите некоторое общее свойство, справедливое для параллелограмма, прямоугольника, ромба и квадрата.

Третий виток (для повышенного уровня обучения).

Проводится устное закрепление рассмотренного материала с помощью кругов Эйлера (рис. 1.24а). При отсутствии предварительного ознакомления учащихся с кругами Эйлера предлагаемые задания содержат скачок трудности. Этот скачок сглаживается соответствующими пояснениями учителя.

Задание 12. «За несколько уроков учащиеся решили 18 задач на параллелограммы (рис. 1.24б). Из них 14 задач на прямоугольники и 16 задач на ромбы. Сколько было решено задач на квадраты?».

Для энтропийной оценки урока проводится фиксирование временных затрат на обеспечение каждого состояния урока, находятся вероятности этих состояний, их энтропия и информация. Повторение урока в параллельных классах даст дополнительный материал для обработки его с точки зрения оптимальности по Парето.

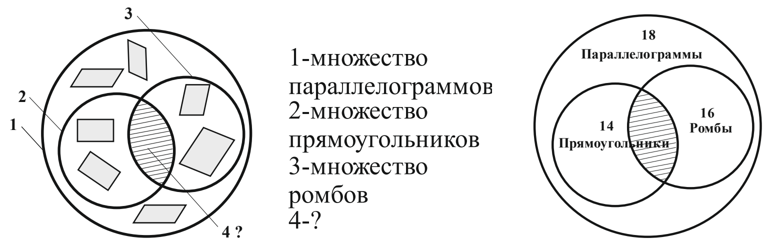


Рис. 1.24

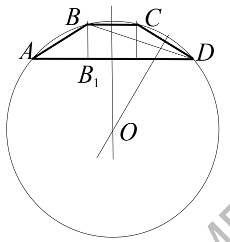


Рис. 1.25

4. Конкретизация фрактальной организации групп аналогичных задач и их энтропийный анализ

Фрактальная организация строится в виде четверок повторяющихся аналогичных задач повышенной трудности, образующих фрактальные витки. Такие задачи целесообразнее начинать решать в классе, под руководством учителя, в заданной последовательности, разделяя работу на два-три урока. На первые задания планируется выделение большего количества времени, последующие решаются по аналогии с меньшими затратами времени. Правильное выполнение рисунка, по существу, является отдельной задачей, требующей значительных затрат времени на первом витке.

Фрактал 1.

Фрактальная организация первой группы задач.

Задачи располагаем в порядке понижения трудности. Всего задач 8

Первый виток (работа в классе): 4 задачи, $t^{(1)}_{сред.} \approx 25$ мин.

Задача 1. В окружность вписана трапеция $ABCD$, у которой основания равны 8 и 2, а угол A равен 45°. Выполните рисунок 1.25. Найдите:

а) боковую сторону AB (рассмотрите ΔABB_1);

б) диагональ BD (примените теорему косинусов к треугольнику ABD),

в) радиус окружности, описанной около треугольника ABD (примените дополнение к теореме синусов),

г) радиус окружности, описанной около трапеции (воспользуйтесь результатом задачи в).

Ответы: а) $3\sqrt{2}$; б) $3\sqrt{5}$; в) $\frac{3\sqrt{10}}{2}$; г) $\frac{3\sqrt{10}}{2}$.

Второй виток (продолжение работы в классе: 4 задачи, $t^{(2)}_{сред.} \approx 20$ мин.)

Задача 2 (см. рис. 1.25). В окружность вписана трапеция $ABCD$, у которой основания равны 8 и 2, а угол A равен 30°. Найдите:

а) боковую сторону AB (рассмотрите ΔABB_1),

б) диагональ BD (примените теорему косинусов к треугольнику ABD),

в) радиус окружности, описанной около треугольника ABD (примените дополнение к теореме синусов),

г) радиус окружности, описанной около трапеции (воспользуйтесь результатом предыдущей задачи).

Ответы: а) $2\sqrt{3}$; б) $2\sqrt{7}$; в) $2\sqrt{7}$; г) $2\sqrt{7}$.

Фрактал 2.

Первый виток: 4 задачи, $t^{(4)}_{сред.} \approx 25$ мин.

Задача 3. В окружность вписана трапеция $ABCD$, у которой основания равны 8 и 2, а угол A равен α. Найдите:

а) боковую сторону AB,

б) диагональ BD,

в) радиус окружности, описанной около треугольника ABD,

г) радиус окружности, описанной около трапеции.

Ответы: а) $3/\cos\alpha$; в) $\frac{\sqrt{25+9\,\mathrm{tg}^2\alpha}}{2\sin\alpha}$; б) $\sqrt{25+9\,\mathrm{tg}^2\alpha}$; г) $\frac{\sqrt{25+9\,\mathrm{tg}^2\alpha}}{2\sin\alpha}$.

Второй виток: 3 задачи, $t^{(5)}_{сред.} \approx 20$ мин.

Задания 4. С помощью ответов к задаче 4 проверить правильность ответов к задачам 1–3.

Энтропийный анализ фрактальной организации обеих групп задач

В данном случае задачи, входящие в витки, не обладают одинаковой трудностью. Поэтому к ним не применима теория дискретного равномерного распределения вероятностей исходов. Рассмотрим иной способ определения вероятностей витков.

1) Средние значения затрат времени на решение задач каждой группы: 25 мин, 20 мин;

2) Вероятности временных затрат (меньшая вероятность – признак большей трудности задач): 25/45, 20/45;

3) Энтропия системы задач первой и второй групп одинакова и равна:

$$H \approx \frac{25}{45}\log_2\frac{45}{25} + \frac{20}{45}\log_2\frac{45}{20} \approx \frac{25}{45}\frac{\lg\frac{45}{25}}{\lg 2} + \frac{20}{45}\frac{\lg\frac{45}{20}}{\lg 2} \approx$$

$$\approx \frac{25}{45}\frac{\lg 1,8}{\lg 2} + \frac{20}{45}\frac{\lg 2,25}{\lg 2} \approx 0,1624 + 0,2192 \approx 0,3816\,;$$

4) Максимальное значение энтропии и информация задач каждой группы:

$$H_{\max} = \log_2 4 = 2; \qquad I \approx 2 - 0,3816 \approx 1,6184,\ I > H.$$

Положительное влияние повторения и самоподобия сказалось на качестве учебной работы по решению задач в обеих группах.

Фрактальная размерность как признак принадлежности витков одному или разным фракталам

Фрактальная размерность учебного материала, соответствующим образом организованного, – вопрос, заслуживающий отдельного исследования. В данной работе отметим только, что в этих целях мы используем фактор, который положен в основу фрактальной организации. В приведенном выше примере таким фактором является время, его распределение между соседними витками, точнее – отношение затрат времени на соседние витки.

Тогда размерность приводимой выше фрактальной организации в первой и второй группах задач равна 20/25 = 0,8.

Фракталы обеих групп задач имеют одинаковую размерность, тем не менее, это отдельные (различные) фракталы.

Понятно, что в едином фрактале не должно быть изменения размерности.

Данные фракталы можно было бы объединить в один фрактал, если бы затраты времени на витки были такими: 25; 20; 16; 13 мин, а общее время на решение задач обеих групп равно 74 мин.

Отметим еще, что сравнивая размерности фрактальных организаций учебного материала, можно сравнивать их сложность и трудность. Чем ближе размерность фрактала к 1, тем сложность и трудность системы меньше.

5. Совмещение фрактальной организации решения задач и метода подзадач

Первый пример.

Задача 1. Около четырехугольника *ABCD* описана окружность (рис. 1.26а). $AB = 1$, $AD = 2$, $\angle A = 60°$, $\angle CBD = 45°$. Найдите радиус описанной окружности, углы, стороны и диагонали четырехугольника. Выясните, можно ли в этот четырехугольник вписать окружность.

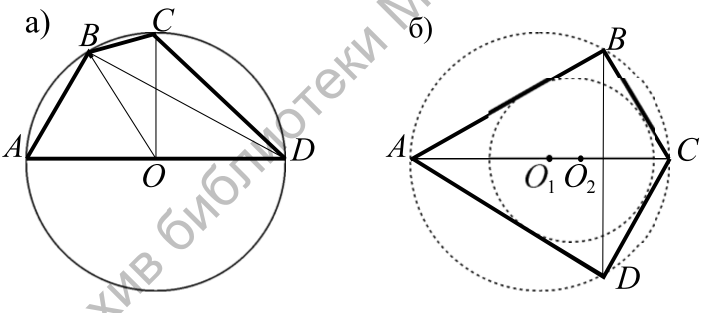


Рис. 1.26

Виток 1. Выполните схематичный рисунок. По ходу решения уточните его.

Виток 2. Больше всего данных в треугольнике *ABD*. По теореме косинусов найдите *BD*.

Виток 3. Убедитесь, что выполняется равенство $AB^2 + BD^2 = AD^2$. Поэтому $\angle ABD = 90°$, *AD* – диаметр окружности. После этого сразу находится радиус описанной окружности.

Виток 4. Найдите углы *B*, *C* и *D* четырехугольника. Все углы будут найдены.

Виток 5. Найдите $\angle BOC$, затем по теореме косинусов *BC*.

Виток 6. Докажите, что ΔCOD – прямоугольный и по теореме Пифагора найдите сторону CD. Сравните сторону CD с диагональю AC.

Виток 7. Для выяснения последнего требования задачи воспользуйтесь соответствующим признаком. Это нетрудно проверить, так как все стороны четырехугольника уже известны.

В итоге задача будет решена полностью.

Второй пример.

Задача 2. В четырехугольнике $ABCD$ (рис. 1.26б) $\angle ABD = \angle ACD = 60°$. $\angle BAD = 60°$, $\angle CBD = 30°$, $AD = 2$. Докажите, что около этого четырехугольника можно описать окружность, найдите её радиус. Найдите углы, стороны и диагонали четырехугольника. Докажите, что в данный четырехугольник так же можно вписать окружность, найдите её радиус.

Виток 1. Выполните схематичный рисунок. По ходу решения уточните его.

Виток 2. Используя условие $\angle ABD = \angle ACD$, докажите методом от противного, что окружность, описанная около треугольника ABD, пройдет через вершину C. Тем самым будет доказано, что эта окружность является описанной около четырехугольника $ABCD$.

Виток 3. После этого найдите радиус описанной окружности (например, пользуясь формулой $AD/\sin \angle ABD = 2R$).

Виток 4. Учтя, что $\angle ABC = 60° + 30° = 90°$, докажите, что AC – диаметр описанной окружности.

Виток 5. Найдите углы C и D четырехугольника. В итоге все углы четырехугольника будут найдены.

Виток 6. Равенство сторон BC и CD следует из равенства прямоугольных треугольников ABC и ADC. Эти стороны найдите по теореме Пифагора. В результате все стороны будут найдены.

Виток 7. Убедитесь, что в четырехугольник можно вписать окружность. Для этого проверьте выполнимость соответствующего признака.

Виток 8. Радиус вписанной окружности удобно найти с помощью формулы $S = pr$. Площадь четырехугольника нетрудно выразить через площадь треугольника ABC. Зная стороны, найдем полупериметр четырехугольника. После этого будет найден r. В итоге задача будет решена полностью.

1.2.5. КАКАЯ ПРОПЕДЕВТИКА СТЕРЕОМЕТРИИ НЕОБХОДИМА

«Выход в пространство». Цель пропедевтики заключается в углублении планиметрических знаний и подготовке к последующему изучению стереометрии. В практике создания отечественного учебника геометрии апробированы **два подхода**: включение элементов стереометрии в виде отдельной темы, заключающей курс планиметрии, либо распределенное включение некоторых стереометрических задач при изучении планиметрических тем. В настоящее время применяется второй подход. Иногда за рубежом встречается и **третий подход**, в котором планиметрия и стереометрия излагаются одновременно, чередуясь друг с другом в одном учебнике.

Первый пример (к аксиомам принадлежности. 7 класс). Объясним построения на рисунке 1.27а. На этом рисунке вначале построен куб. Дальнейшие построения выполняются в плоскости α задней грани куба.

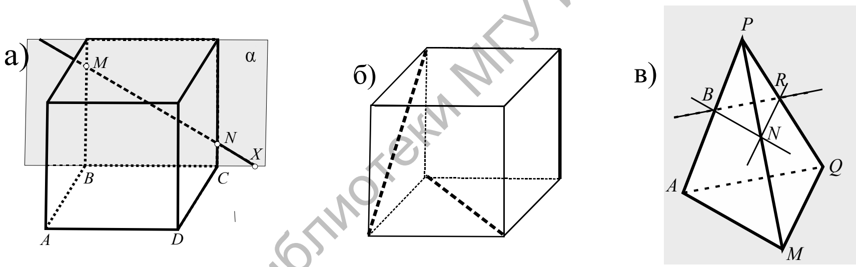


Рис. 1.27

Задняя грань куба принадлежит плоскости α. Поэтому точки *B, C* и *M, N* принадлежат плоскости α. Тогда прямые *BC* и *MN* принадлежат плоскости α. Так как в данном случае прямые *BC* и *MN* принадлежат плоскости α и не параллельны, то они пересекаются. На рисунке 1.27а построена точка *X* пересечения прямых *BC* и *MN.*

Объясните, почему: а) прямые *BC* и *MN* принадлежат плоскости α; б) точка *X* принадлежит плоскости α; в) точка *X* принадлежит плоскости нижнего основания куба (более трудный вопрос).

Второй пример (на сравнение отрезков). Сравните выделенные отрезки куба (рис. 1.27б). Учтите, что гранями куба являются квадраты. В случае затруднений обратитесь к модели куба.

Третий пример (к применению обобщенной теоремы Фалеса и обратной теоремы на стереометрическом материале). Дана треугольная пирамида *PAQM* (рис. 1.27в). Построена прямая *BN* || *AM* и прямая BR || AQ (прямые проводятся в плоскостях граней пирамиды). Доказать, что:

$$а)\ \frac{PM}{PN} = \frac{PQ}{PR};\ б)\ NR \parallel MQ.$$

1.2.6. ДОСТУПНОСТЬ ЗАДАЧ НЕТРАДИЦИОННОГО ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО СОДЕРЖАНИЯ

Доступность нетрадиционного содержания во многом обеспечивается приведением образцов решения задач различной сложности, начиная от самых первых, простых задач.

Примеры первых задач на нахождение координат точек. Координатный метод начинается с формирования навыка нахождения координат точек геометрических фигур.

1. На рисунке 1.28а изображена лестница, ступеньки которой поднимаются на 1 вверх и сдвигаются на 1 вправо. Представим, что эта лестница бесконечная («уходит в заоблачную высь»). Найдите координаты начала и конца горизонтально расположенных отрезков этой лестницы и заполните прилагаемую таблицу.

	1-я ступенька	2-я ступенька	3-я ступенька	…	10-я ступенька	…	*n*-я ступенька	…
Координаты начала отрезка	(0; 1)							
Координаты конца отрезка	(1; 1)							

2. На рисунке 1.28б-д изображены прямоугольные треугольники, у которых меньший катет равен 7, а больший катет равен 8. Запишите координаты вершин этих треугольников.

Примеры первых задач на нахождение расстояний.

1. Точка с абсциссой, равной 1, удалена от начала координат на расстояние, равное 3. Найдите ординату этой точки.

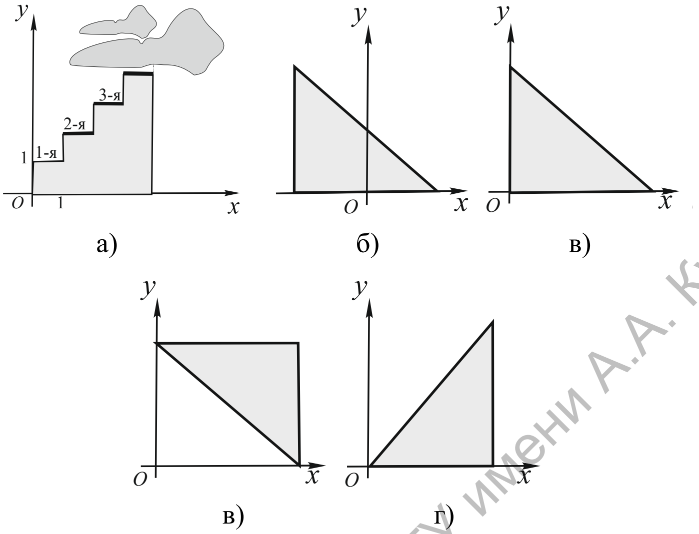


Рис. 1.28

2. Найдите координаты точки B, если известно, что она лежит на оси абсцисс и равноудалена от точек $A(1; 5)$ и $C(6; 1)$.

Примеры первых задач на составление уравнения прямой.

1. При каком значении k прямые $y = (k - 1)x + 3$ и $y = -2kx + 4$ будут параллельны? Постройте эти прямые.

2. При каком значении k прямые $y = (k - 1)x + 3$ и $y = -2kx + 4$ будут перпендикулярными? Постройте эти прямые.

Примеры первых задач с использованием координат вектора.

1. а) Найдите координаты и длину вектора AB, если $A(4; 6)$ и $B(7; 8)$.

б) Найдите координаты конца B вектора AB, если известны координаты начала вектора и координаты вектора: $A(4; 7)$, $\overrightarrow{AB}(5; 9)$. Постройте точки и вектор в системе координат.

в) Найдите координаты начала A вектора AB, если известны координаты конца вектора и координаты вектора: $B(1; 6)$, $\overrightarrow{AB}(3; 7)$. Постройте точки и вектор в системе координат.

Примеры более сложных задач.

1. Найдите биссектрису, проведенную к гипотенузе прямоугольного треугольника со сторонами 3, 4 и 5.

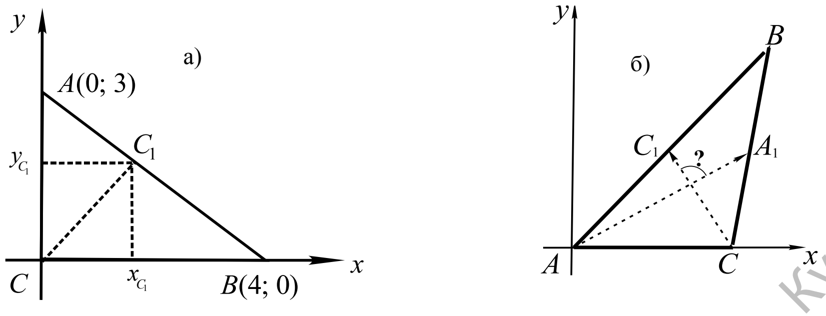


Рис. 1.29

Решение. Пусть CC_1 – биссектриса, проведенная к гипотенузе (рис. 1.29а). Найдем абсциссу x_{C_1} точки C_1, зная, в каком отношении биссектриса делит сторону, к которой она проведена. Воспользуемся координатной формулой, причем нетрудно заметить, что $x_{C_1} = y_{C_1}$.

$$x_M = \frac{x_A + kx_B}{1+k}, \quad \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AC}{BC} \quad \Rightarrow \quad \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{3}{4} \Rightarrow y_{C_1} = x_{C_1} = \frac{0 + \frac{3}{4}\cdot 4}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{12}{7}.$$

Тогда по координатной формуле расстояния (или по теореме Пифагора).

$$CC_1^2 = \left(\frac{12}{7}\right)^2 + \left(\frac{12}{7}\right)^2 = 2\cdot\left(\frac{12}{7}\right)^2, \quad CC_1 = \frac{12}{7}\sqrt{2}.$$

2. Докажите, что в треугольнике ABC, со сторонами AB=4, BC=3 и $AC = \sqrt{5}$, медианы AA_1 и CC_1, перпендикулярны.

Доказательство. Расположим оси системы координат так, как показано на рисунке 1.29б: A(0; 0), C($\sqrt{5}$; 0). Найдем координаты вершины $B(x; y)$. Их можно найти с помощью формулы расстояния:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ (x-\sqrt{5})^2 + y^2 = 9 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \left(x = \frac{6}{\sqrt{5}};\ y = 2\sqrt{\frac{11}{5}} \right).$$

После этого находим координаты точек A_1, C_1 и векторов $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$:

$$A_1\left(\frac{11}{2\sqrt{5}};\ \sqrt{\frac{11}{5}}\right),\ C_1\left(\frac{3}{\sqrt{5}};\ \sqrt{\frac{11}{5}}\right);\ \overrightarrow{AA_1}\left(\frac{11}{2\sqrt{5}};\ \sqrt{\frac{11}{5}}\right),\ \overrightarrow{CC_1}\left(-\frac{3}{\sqrt{5}};\ \sqrt{\frac{11}{5}}\right).$$

Так как скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$ равно 0:

$$\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{CC_1} = \frac{11}{2\sqrt{5}} \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + \frac{11}{5} = 0, \text{ то } AA_1 \perp CC_1.$$

1.2.7. ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ СТУДЕНТОВ, МАГИСТРАНТОВ И АСПИРАНТОВ

Исследовательская тема 1. ПАРЕТО-АНАЛИЗ ДОСТУПНОСТИ СОДЕРЖАНИЯ ШКОЛЬНОГО КУРСА ГЕОМЕТРИИ

I. Пример Парето-анализа фрагмента «Аксиомы принадлежности»

1. Парето-анализ учебника с точки зрения наличия пояснительных текстов. Выбор критериев и предпочтений.

Критерий p_1: Количество определений и аксиом в данной теме (в том числе и аксиоматических). Направление предпочтений: так как это количество довольно большое, то требуется их сокращение.

Критерий p_2: Количество пояснений к ним. Направление предпочтения: так как пояснений в учебниках недостаточно и часто они носят редкий, случайный характер, то требуется их увеличение, более системное применение и согласование с количеством и трудностью понятий.

Пояснение приводится в форме текста к другому тексту или к рисунку. Пояснение отвечает на вопросы: «Что это означает?», «Как вводимое математическое понятие связано с материальным миром, окружающей средой?» и т.д.

Выбор учебников (расположены в алфавитном порядке фамилий авторов):

1. Бутузов, В. Ф. Геометрия, 7 класс: учеб. / В. Ф. Бутузов, В. В. Прасолов; под ред. В. А. Садовничего. – М.: Просвещение, 2019. – 128 с.
2. Казаков, В. В. Геометрия. Учеб. пособие для 7 класса / В. В. Казаков. – Минск: Народная асвета. 2-е изд., 2022. – 183 с.
3. Киселёв, А. П. Элементарная геометрия (с предисловием акад. А.Н. Тихонова) / А. П. Киселёв. – М.: Просвещение, 1980. – 287 с.
4. Никитин, Н. Н. Геометрия: учеб. для 6-9 кл. С дополнениями и уточнениями А. Н. Колмогорова / Никитин Н. Н. – М.: Просвещение, 1970. – 208 с.
5. Погорелов, А. В. Геометрия: Учебник для 7–11 кл. средней школы. – 3-е изд. / А. В. Погорелов. – М.: Просвещение, 1992. – 383 с.
6. Рогановский Н. М., Рогановская Е. Н. (см. гл. 2 данной работы).
7. Шарыгин, И. Ф. Геометрия: учебник для 7–9 классов / И. Ф. Шарыгин. – М.: Дрофа, 2002. – 368 с.

8. Шлыков, В. В. Геометрия. 7 класс / В. В. Шлыков. – Минск: Народная асвета, 2011. – 197 с.

Построение множества Парето-оптимальных учебников, удовлетворяющих выделенным критериям. Выводы и методические рекомендации.

По аналогичной схеме проводится Парето-анализ данной темы по другим критериям. Первый критерий оставляется без изменения, второй критерий отражает новое направление анализа.

2. Парето-анализ учебника с точки зрения наличия практических примеров.

Критерий p_1: Количество определений в данной теме (в том числе и аксиоматических). Направление предпочтений: так как это количество довольно большое, то требуется их сокращение.

Критерий p_2: Количество примеров из окружающей среды. Направление предпочтения: так как таких примеров в учебниках недостаточно или они часто отсутствуют, то требуется более системное их применение с учетом трудности понятий.

3. Парето-анализ учебника с точки зрения количества рисунков.

Критерий p_1: Количество определений в данной теме (в том числе и аксиоматических). Направление предпочтений: так как это количество довольно большое, то требуется их сокращение.

Критерий p_2: Количество рисунков. Направление предпочтения: так как часто ограничиваются минимумом рисунков и его для понимания не всегда оказывается достаточно, то требуется их увеличение, более системное применение и согласование с количеством и трудностью понятий.

4. Парето-анализ учебника с точки зрения количества задач с решениями, приводимым в теоретической части учебника.

Критерий p_1: Количество определений в данной теме (в том числе и аксиоматических). Направление предпочтений: так как это количество довольно большое, то требуется их сокращение.

Критерий p_2: Количество примеров решения задач, приводимых в теоретической части учебника. Направление предпочтения: так как таких примеров в учебниках недостаточно и часто они носят эпизодический характер, то требуется увеличение образцов решения задач, особенно задач, выполняющих ключевую роль.

В завершение Парето-анализа данной учебной темы приводятся итоговые выводы и методические рекомендации.

Приведем пример Парето-анализа на небольшом фрагменте данной учебной темы – на примере п. **«Аксиомы принадлежности»**. Критерии и предпочтения сформулированы выше.

Отметим, что во многих учебниках аксиомы принадлежности приводятся в неполном объеме, вперемежку с другими аксиомами. В этих случаях из этого «смешанного» текста выбирается то, что относится к аксиомам принадлежности. Встречаются устаревшие и некорректные в математическом отношении трактовки (пояснения) понятия прямой (А. П. Киселев: прямая конечная и бесконечная, прямая, ограниченная только с одной стороны, прямая исходит из точки, такую прямую называют полупрямой или лучом). Если часть пояснений некорректна, а часть корректна, то они перечеркиваются крестиком. Такие кружочки к множеству Парето не относятся. Если они формально попали бы в это множество, то все равно исключаются.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
$\mathbf{p_1}$	8	8	10	6	7	7	6	6
$\mathbf{p_2}$	3	1	3	2	4	8	1	7
$\mathbf{p_3}$	2	0	0	5	1	2	0	0
$\mathbf{p_4}$	3	2	1	2	2	3	1	6
$\mathbf{p_5}$	0	0	0	0	0	0	0	0

5. Выводы и рекомендации (рис. 1.30). **1-й срез** показал существование множества Парето в виде двух компромиссных альтернатив 6 и 8. В целом он свидетельствует о наличии определенного формализма в изложении учебного материала. По-видимому, это объясняется тем, что первые геометрические понятия вводятся в предыдущих классах и на этом материале авторы стараются сэкономить время и объем учебника. Однако надо иметь в виду, что в 5–6-х классах нередко поступают столь же формально. Поэтому в 7 классе пояснения необходимы. К тому же учащиеся 7-го класса к ним более готовы.

2-й срез показал недостаточность в учебниках примеров, взятых из окружающей среды. Причем в четырех альтернативах критерий p_3 оказался не реализованным. Найденное множество Парето, состоящее из одной альтернативы 4, показывает ближайшую возможность исправления этого положения.

3-й срез показал возможность более равномерного распределения количества рисунков в учебниках.

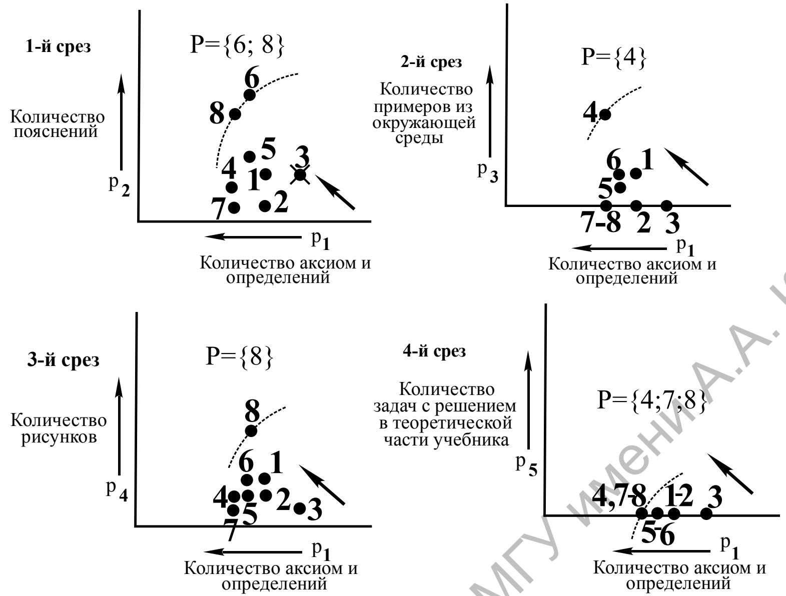


Рис. 1.30

4-й срез показал, что по существу критерий p_5 во всех альтернативах остался нереализованным. Несмотря на такое корпоративное проявление, одну-две задачи с решением необходимо все-таки включить. В альтернативе 6 это сделано после проведения изложенного выше Парето-анализа. Включена следующая задача:

Задача. Пусть $AB\subset\alpha$. Верны ли утверждения: а) $A\in\alpha$ и $B\in\alpha$; б) $A\in\alpha$ и $B\notin\alpha$?

Решение. Если $AB\subset\alpha$ то все точки прямой AB принадлежат плоскости α (в том числе точки A и B тоже). Поэтому утверждение а) верно, а утверждение б) неверно.

II. Парето-анализ доступности темы «Основные понятия и аксиомы геометрии» в 7 классе (продолжение):

а) Парето-анализ доступности темы «Аксиомы порядка точек на прямой и на плоскости. Отрезок»;

б) Парето-анализ доступности темы «Аксиомы измерения и откладывания отрезков»;

в) Парето-анализ доступности темы «Треугольник. Медиана, биссектриса, высота треугольника. Первый признак равенства треугольников»;

г) Парето-анализ темы «Аксиома параллельных прямых»;

д) Сформулируйте общие выводы о доступности данной учебной темы и рекомендации о повышении её доступности.

III. Парето-анализ доступности темы «Внешний угол треугольника. Перпендикулярные и параллельные прямые. Сумма углов треугольника»

IV. Парето-анализ доступности темы «Признаки равенства треугольников. Теорема Фалеса»

Литература

Основная литература: [1]–[8].

Вузовские и школьные учебники: 22–57.

Дополнительные источники

1. Катаргин, Н. В. Экономико-математическое моделирование: учебное пособие / Н. В. Катаргин. – Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2018. – 256 с.

2. Мастяева, И. Н. Методы оптимальных решений [Электронный ресурс]: учебник / И. Н. Мастяева, Г. И. Горемыкина, О. Н. Семенихина. – Москва: КУРС, ИНФРА-М, 2016. – 384 с. – Режим доступа: http://znanium.com/. – Дата доступа: 22.03.2020.

3. Модели и методы поддержки принятия решений. Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов. Составители:. И. В. Акиншева; Д. А. Денисевич. – Могилев: «Белорусско-российский университет», 2020 – 36 с.

4. Орлова, И. В. Экономико-математическое моделирование: практическое пособие по решению задач / И. В. Орлова. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва: Вузовский учебник; ИНФРА-М, 2013. – 140 с.

5. Тихомирова, А. Н. Теория принятия решений [Электронный ресурс] / А. Н. Тихомирова, Е. В. Матросова. – Москва: КУРС, ИНФРА-М, 2017. – 68 с. – Режим доступа: http://znanium.com/. – Дата доступа: 22.03.2020.

6. https://studopedia.ru/3_197817_graficheskiy-sposob-postroeniya-mnozhestva-pareto.html.

7. https://www.semestr.ru/methods/pareto.php8. https://vk.com/video.

8. https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=pmf&paperid=330&option_lang=rus#forwardlinks

9. https://vuzdoc.ru/204496/ekonomika/mnozhestvo_pareto.

Исследовательская тема 2.
ЭНТРОПИЙНЫЙ АНАЛИЗ СОДЕРЖАНИЯ ШКОЛЬНОГО УЧЕБНИКА ГЕОМЕТРИИ

I. Пример энтропийного анализа фрагмента «Аксиомы принадлежности»

Воспользуемся предыдущей таблицей, дополнив её следующим образом.

Учебники	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Кол-во аксиом и определений по критерию p_1	8	8	10	6	7	7	6	6
Кол-во элементов по критерию p_2	3	1	3	2	4	8	1	7
Кол-во элементов по критерию p_3	2	0	0	5	1	2	0	0
Кол-во элементов по критерию p_4	3	2	1	2	2	3	1	6
Кол-во элементов по критерию p_5	0	0	0	0	0	0	0	0
Общее кол-во элементов методического аппарата	8	3	4	9	6	13	2	13
Всего элементов	16	11	14	15	13	20	8	19
Энтропия	2	0,8455						
Информация	0	1,1545						

Применим первый способ подсчета энтропии и информации. Покажем его на примере первых двух альтернатив. Выделим в каждой теме две части. Первая часть – содержание, которое относится к формальному содержанию (формулировки определений и аксиом). Вторая часть – содержание, которое относится к методическому аппарату, повышающему доступность формального содержания (текстовые пояснения, примеры из окружающей среды, рисунки, задачи с решением).

<u>Первая альтернатива</u>. Вероятности выбора этих частей для первой альтернативы: $p_1 = 8/16$, $p_2 = 1 - 1/2 = 1/2$. Так как альтернативы равновероятны, то энтропия максимальна и равна $H = \log_2 N = \log_2 4 = 2$. Информация в этом случае $I = 0$.

Для второй альтернативы:

$$p_1 = \frac{8}{11}, \quad p_2 = 1 - \frac{8}{11} = \frac{3}{11}, \quad H = \frac{8}{11}\log_2\frac{11}{8} + \frac{3}{11}\log_2\frac{11}{3} \approx$$

$$\approx \frac{8}{11}\frac{\lg 1,375}{0,301} + \frac{3}{11}\frac{\lg 3,6667}{0,301} \approx 0,8455,$$

$$H_{\max} = \log_2 N = \log_2 4 = 2, \quad I = H_{\max} - H \approx 1,1545.$$

Задание. Аналогично проводятся вычисления для других альтернатив. Заполните приводимую выше таблицу и постройте множество Парето методом паруса (рис. 1.31). Найдите альтернативу, оптимальную по Парето.

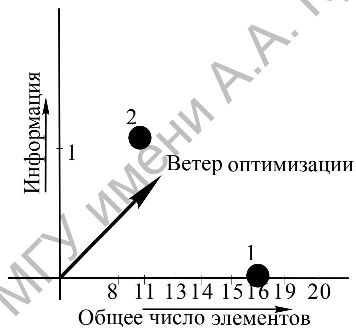


Рис. 1.31

Выводы и рекомендации. Методический аппарат в виде текстовых пояснений, примеров связи с окружающей средой, рисунков, задач с решением во всех альтернативах положительно влияет на увеличение информации, на превышение информации над энтропией, в конечном итоге – на снижение сложности учебного материала, на увеличение его доступности. Низкий уровень информации отмечен в альтернативе 1. Он вызван отсутствием в этой альтернативе методического аппарата (в данном фрагменте учебного материала). Проведенный сравнительный энтропийный анализ показывает не только оптимальный вариант из совокупности альтернатив 1–8, но и подсказывает возможные ограничения объема методического аппарата.

II. Энтропийный анализ доступности темы «Основные понятия и аксиомы геометрии» в 7 классе:

а) Энтропийный анализ доступности п. «Аксиомы порядка точек на прямой и на плоскости. Отрезок»;

б) Энтропийный анализ доступности п. «Аксиомы измерения и откладывания отрезков»;

в) Энтропийный анализ доступности п. «Треугольник. Медиана, биссектриса, высота треугольника. Первый признак равенства треугольников»;

г) Энтропийный анализ п. «Аксиома параллельных прямых»;

д) Сформулируйте общие выводы о доступности данной учебной темы и рекомендации о повышении её доступности.

III. Энтропийный анализ доступности темы «Внешний угол треугольника. Перпендикулярные и параллельные прямые. Сумма углов треугольника». Сформулируйте общие выводы о доступности данной учебной темы и рекомендации о повышении её доступности.

IV. Энтропийный анализ доступности темы «Признаки равенства треугольников. Теорема Фалеса». Сформулируйте общие выводы о доступности данной учебной темы и рекомендации о повышении её доступности.

Литература

Основная литература: [9]–[17].

Вузовские и школьные учебники: 22–57.

Дополнительные источники: [61], [62], [67], [77], [78].

Исследовательская тема 3
ФРАКТАЛЬНАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

I. Иллюстративный пример

Приведем пример фрактальной организации учебного материала на примере п. **«Аксиомы принадлежности» (2 урока)**. В данном случае осуществляется единая фрактальная организация теоретического и приводимого к нему задачного материала (взятыми из глав 2 и 3). Всего 8 витков.

1-й виток (1-й урок, см. с. 142-143).
Точка. Прямая. Плоскость. Геометрическая фигура.

2-й виток (продолжение 1-го урока).
Аксиомы принадлежности I.1–I.2 (с. 143-145).

3-й виток (завершение 1-го урока).

Повторяем формулировки определений и аксиом принадлежности, вырабатываем навыки математической речи. Ориентируем учащихся на запоминание этих формулировок.

Решаем следующую задачу.

Задача. Пусть $AB \subset \alpha$. Верны ли утверждения: а) $A \in \alpha$ и $B \in \alpha$; б) $A \in \alpha$ и $B \notin \alpha$.

Решение. Если $AB\subset\alpha$, то значит все точки прямой AB принадлежат плоскости α (в том числе точки A и B тоже). Поэтому утверждение а) верно, а утверждение б) неверно.

Основные задачи

4-й виток (1-е домашнее задание).

Геометрическая фигура. Аксиомы принадлежности

1 (устно). Напомним, что **геометрической фигурой** называется любое множество точек. Это множество чаще состоит из бесконечного множества точек (например, плоскость, прямая, отрезок и т.д.), но может состоять из конечного множества точек (например, множество начал у луча, множество концов отрезка, множество вершин треугольника). Приведите примеры геометрических фигур, состоящих из бесконечного и конечного числа точек.

2 (устно). Иногда в геометрии говорят о геометрических фигурах, которые не содержат ни одной точки (например, множество начал у прямой, множество концов у прямой, множество точек пересечения двух окружностей с общим центром и т.д.). Приведите пример геометрической фигуры, не содержащей ни одной точки.

3 а) (устно). Обратимся к аксиомам:

I.1. Сколько угодно точек принадлежит прямой, сколько угодно точек не принадлежит прямой. Если две точки прямой принадлежат плоскости, то все точки прямой принадлежат плоскости.

I.2. Через две точки плоскости можно провести прямую и притом только одну.

В данных аксиомах характеризуются следующие понятия: *точка, прямая, плоскость* … и еще два понятия. Какие? Назовите их. (Это понятия «точка принадлежит…» и «точка …». Обратите внимание на название этих аксиом.)

5-й виток (2-й урок).

Проводится закрепление теоретического материала. Выполняются следующие задания.

б) Прочитайте записи и выполните соответствующие рисунки. Справедливы ли записанные утверждения:

1) ($A\in\alpha$ и $B\in\alpha$)$\Rightarrow AB\subset\alpha$;
2) ($A\in\alpha$ и $C\in\alpha$)$\Rightarrow AC\subset\alpha$;
3) ($B\in\alpha$ и $C\in\alpha$)$\Rightarrow BC\subset\alpha$;

4) ($A\notin\alpha$ и $B\in\alpha$)$\Rightarrow AB\not\subset\alpha$;
5) ($A\in\alpha$ и $B\notin\alpha$)$\Rightarrow AB\not\subset\alpha$;
6) ($A\notin\alpha$ и $B\notin\alpha$)$\Rightarrow AB\not\subset\alpha$;
7) $AB\not\subset\alpha\Rightarrow$ ($A\notin\alpha$ и $B\notin\alpha$).

6-й виток (продолжение 2-го урока).

4 (устно). а) Объясните, почему кривые линии (рис. 1.32) не удовлетворяют аксиомам принадлежности и **по свойствам** (а не только внешне) отличается от прямой.

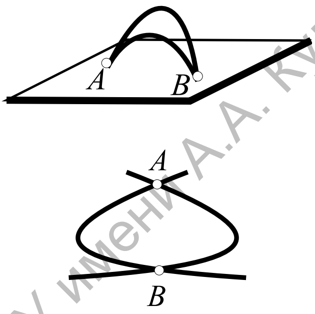


Рис. 1.32

б) Пусть точка A лежит на поверхности Земли, а точка B – на поверхности Луны. Можно ли с помощью инструментов через эти точки провести прямую: на схематичном рисунке, непосредственно в космосе? Можно ли такую прямую провести мысленно (в воображении)? А с точки зрения математики такая прямая существует?

в) Прямая a принадлежит плоскости α. Точка A не принадлежит прямой a. Означает ли это, что точка A не принадлежит плоскости α?

7-й виток (завершение 2-го урока).

Интерактивные задания для коллективного выполнения

1. **Землянин.** Сформулируйте и поясните на рисунке аксиомы принадлежности. Какие слова и предложения были вам не понятными? Повторите аксиомы несколько раз, пока не запомните их.

2. С помощью обозначений запишите предложения:

а) «Точка M принадлежит прямой AB»; б) «Прямая AB проходит через точку C».

3. Какими буквами обозначаются плоскости? Как они читаются?

8-й виток (2-е домашнее задание).

4. Повторите формулировки определений и аксиом. Выполнить последнее интерактивное задание.

5. Нарисуйте прямые AB и CD, которые имеют: а) только одну общую точку A; б) только одну общую точку B; в) общими обе точки A и B.

Выводы и методические рекомендации к п. I. Приведенный в п. I иллюстративный пример показывает большие возможности организации содержания учебного материала на основе фрактальной концепции – повторения и самоподобия. Такая организация учебного материала рассматривается как дополнение к традиционной организации. Повторением завершался каждый фрактальный виток. Содержание всех витков подчинено самоподобию – все они связаны с одними и теми же понятиями и аксиомами принадлежности. В основном преобладала устная работа, которая необходима для развития понимания и математической речи. Экономно использовалось учебное время: было затрачено всего 2 урока и 2 домашних задания.

Центр тяжести в обеспечении понимания и усвоения учебного материала находился на приведенных двух уроках. Вполне достижима цель создания ситуации успеха и положительного отношения учащихся к учебному предмету. Но для этого требуется активная совместная работа учителя и учащихся: многократные объяснения учителя, многократные объяснения, выполняемые учащимися, постановка вопросов, беседа, эвристическая беседа. Необходимо помнить, что если урок проводится в активной форме и интересен учащимся, они и устают меньше. Усталость появляется на скучных и неинтересных уроках.

II. Фрактальная организация темы «Основные понятия и аксиомы геометрии» (7 кл.):

а) п. «Аксиомы порядка точек на прямой и на плоскости. Отрезок»;

б) п. «Аксиомы измерения и откладывания отрезков»;

в) п. «Треугольник. Медиана, биссектриса, высота треугольника. Первый признак равенства треугольников»;

г) п. «Аксиома параллельных прямых»;

д) Сформулируйте общие выводы о доступности данной учебной темы и рекомендации о повышении её доступности.

III. Фрактальная организация темы «Внешний угол треугольника. Перпендикулярные и параллельные прямые. Сумма углов треугольника». Сформулируйте общие выводы о доступности данной учебной темы и рекомендации о повышении её доступности.

IV. Фрактальная организация темы «Признаки равенства треугольников. Теорема Фалеса». Сформулируйте общие выводы о доступности данной учебной темы и рекомендации о повышении её доступности.

Литература

Основная научная литература: [18]–[21], [58], [69], [79].

Вузовские и школьные учебники: [22]–[57].

Дополнительные источники: [70]–[75].

Глава 2

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАЗРАБОТКА ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА УЧЕБНИКА ГЕОМЕТРИИ 7 КЛАССА НА ОСНОВЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

Оптимизация содержания позволяет изложить его на 60 страницах рукописи электронного набора. В теоретической части учебника приводятся примеры задач с решениями. Наличие их в теоретической части означает первоочередность обращения к ним.

Завершается каждый параграф заданиями для коллективного выполнения, выделяемые значком  .

Применяется тройная нумерация учебных тем: первая цифра 2 обозначает принадлежность темы 2-й главе данной монографии, следующая цифра указывает номер учебной темы (всего их 4), 3-я цифра указывает номер параграфа в учебной теме. Как и для задач, теоретический материал разбивается на маленькие порции заголовками внутри параграфа.

Для заголовков применяется сквозная нумерация на протяжении всего учебника. Если таких порций в параграфе более двух, то это не сопровождается повышением их энтропии. Общая энтропия параграфа в этом случае регулируется дозировкой количества уроков, расстановкой различных акцентов на основные и сопутствующие понятия (например, отрезок – основное понятие, концы отрезка – сопутствующее понятие, в учебнике применяются для них различные шрифтовые выделения).

Пункты с тройной нумерацией (т.е. параграфы) начинаются с текста, набранного мелким шрифтом. В нем приводятся методические особенности содержания, характеризуются результаты его организации на основе математических методов, изложенных в первой главе. Далее крупным шрифтом идет текст учебника, в форме, непосредственно предназначенной для учащихся.

Таблица. Данные о количестве различных элементов содержания теоретического материала в абс. ед. (7 класс)

Темы	Кол-во нумерованных пунктов в теории	Кол-во уроков по теории, задачам с решениями, интеракт. заданиям	Кол-во аксиом	Кол-во определений	Кол-во теорем	Кол-во следствий	Кол-во док-в теорем	Дополнит. теоретич. материал	Подводящие задачи к док-вам	Пояснит. тексты	Примеры из окруж. среды	Образцы решения задач	Интеракт. задания для коллект. выполнения
Введение	4	1	–	3	–	–	–	–	–	–	–	–	–
1	28	12	11	32	2	3	2	3	–	8	13	21	27
2	15	8	1	5	6	4	10	–	2	6	4	15	17
3	12	8		2	10	2	14	–	1	2	–	17	19
4	11	4		1	2	3	4	–	–	–	6	8	–
Всего	70	32	12	40	20	12	30	3	3	16	23	61	63

Примерное распределение учебного времени на годовой учебный курс:

30% – на изучение и закрепление теоретического материала на уроке (22 урока),

15% – на разбор готовых решений задач и выполнение интерактивных заданий для коллективного выполнения, приводимых в теоретической части учебника (10 уроков),

40% – на решение задач из Практикума по решению задач (28 уроков),

15% – на контрольные мероприятия (10 уроков).

Предусмотрено, что домашнее задание регулярно включает в себя самостоятельное закрепление учащимися теоретического материала, изученного на уроке.

В целом содержание геометрии в 7 классе является довольно насыщенным. Ощущается дефицит учебного времени. В связи с этим, заметим, что геометрия всегда тесно связана с инженерными профессиями и заслуживает выделения учебного времени не меньше, чем на алгебру.

Обращает внимание на себя большое количество определений, особенно в начале учебного курса. Тем не менее, необходимо придерживаться установки – приучать учащихся различать геометрические фигуры не по внешнему виду (как это делалось в 5–6-х классах), а по их свойствам и не надеяться, что многие понятия знакомы учащимся из предыдущих классов. Для этого рекомендуется вести систематическое повторение ранее пройденных определений, уделяя этому несколько минут урока.

Что касается сокращения заучиваемых доказательств, то некоторые из них (доказательства следствий, некоторых обратных теорем) можно отнести в разряд «для желающих». Все доказательства теорем рекомендуется подробно разбирать в классе, отобрав 2/3 из них для обязательного заучивания с целью выработки навыка осознанного их воспроизведения.

Помимо традиционных самостоятельных и контрольных работ по решению задач, рекомендуются письменные зачеты по теории, не забывая слова классика «Без теории практика мертва». А можно и добавить: «Теория и практика друг без друга обе мертвы». Школа должна быть самодостаточной, не надеется на репетиторство. Ученик вправе получить как можно больше помощи в самой школе.

Теоретический материал
2.1. ВВЕДЕНИЕ В ГЕОМЕТРИЮ

1 урок

Особенности содержания Введения в геометрию: Формирование представления о геометрии начинается с Введения и, что важно подчеркнуть – заинтересованного отношения к геометрии каждого кто изучает её. Поэтому краткого, часто формального введения не достаточно. Важно понимать, что Введение к учебнику является Введением в геометрию. Основная цель Введения дать в деловой форме, возможно с некоторыми примерами, краткую, не формальную информацию о геометрии, её возникновении и развитии. Эта информация по содержанию и форме является конкретной, интересной, поучительной. Она содержит важные исторические сведения, выразительный иллюстративный и небольшой занимательный материал. Принята следующая структура содержания Введения: о возникновении и развитии геометрии, что такое планиметрия и стереометрия.

2.1.1. О ВОЗНИКНОВЕНИИ И РАЗВИТИИ ГЕОМЕТРИИ

►В построении планиметрии особую роль играет изложение геометрии в 7 классе, так как в этом классе закладываются основы изложения не только учебного материала, изучаемого в 7 классе, но и всего школьного курса геометрии. В 1–6-х классах вы знакомились с некоторыми геометрическими понятиями. С 7-го класса геометрия изучается как отдельный предмет.

Слово **ГЕОМЕТРИЯ** – греческое. В переводе на русский язык оно означает «землемерие». Такое название больше подчеркивает её исторические истоки, нежели современное состояние геометрической науки. Приводимые ниже слова академика А.Д. Александрова лучше всего передают суть геометрии – «Окружающий нас мир – это мир геометрии». Мир геометрии в большом и малом, начиная от огромных космических галактик и заканчивая мельчайшими элементарными частицами в атомной физике. А начинала развиваться геометрия еще в глубокой древности.

Несколько тысяч лет до нашей эры в Древнем Египте были установлены (иногда приближенно) различные способы измерения расстояний, вычисления площадей участков разнообразной формы и размеров, нахождения объемов различных сосудов, вместимости сооружений. Ежегодные разливы Нила смывали границы между земельными участками. Для их восстановления египтяне научились составлять планы этих

* Здесь и далее используются некоторые рисунки и фотографии из Яндекса.

участков, определять по планам их настоящие размеры, заново размечать земельные участки. Строительство грандиозных пирамид, изумляющих современных исследователей, требовало новых знаний (рис. 2.1).

Развитию математики способствовало возникновение в Древнем Египте астрономических знаний (рис. 2.2). Наблюдения за звездами предполагало использование специальных инструментов.

Это позволило ещё в древние времена создать астрономический календарь, остающийся основой современных календарей. Год насчитывал 365 дней, их делили на 12 месяцев, год делился на 3 сезона по 4 месяца каждый, каждый месяц имел 30 дней, оставшиеся 5 дней не входили в календарь и добавлялись к последнему месяцу, сутки состояли из 24 часов, на день и ночь отводилось по 12 часов. Все это стимулировало возникновение и развитие геометрических сведений.

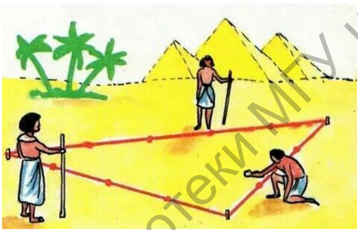
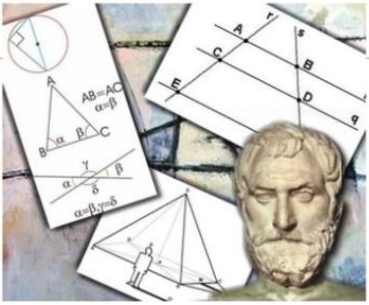


Рис. 2.1

Рис. 2.2

Торговые связи между Египтом и Грецией способствовали распространению геометрических знаний в Греции. Греки не только позаимствовали эти знания, но и много сделали для их расширения, углубления и уточнения. Развитию геометрии в Древней Греции способствовал необычайный рост знаний о мироздании, об атоме, космосе, философии, логики и математики.

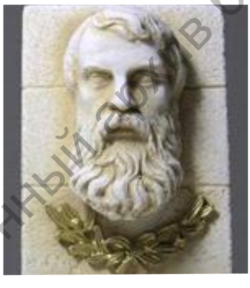
► С именем **Фалеса** связаны доказательства многих теорем: о делении пополам круга диаметром; о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника; о равенстве вертикальных углов; один из признаков равенства прямоугольных треугольников, широко известны теоремы, которые называются его именем, – теорема Фалеса и обобщенная теорема Фалеса (о пропорциональных отрезках) и другие. Фалес открыл способ определения расстояния от берега до видимого корабля. Для этого им был использован признак подобия треугольников. **Главное, Фалес впервые ввел в математику доказательства.**



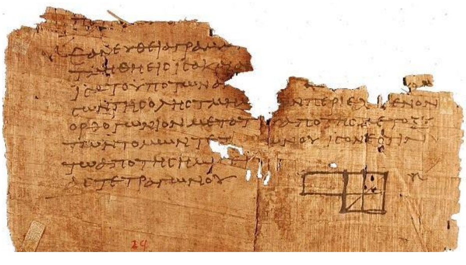
Фалес
(625–548 до н. э.)

Многие математические правила были открыты опытным способом гораздо раньше, чем в Греции, без строгого логического доказательства. Фалес придал математике принципиально новую черту, которая заключается в обосновании математических утверждений при помощи доказательств. Даже сегодня, через 25 веков, приступая к доказательству какой-либо теоремы, математики рассуждают почти так, как рассуждал Фалес.

► Крупный вклад в развитие геометрии внес **Евклид**, который впервые геометрические сведения превратил в **стройную систему зна-**



Евклид
(325–265 годы до н. э.)



Фрагмент оригинала «Начал» Евклида

Рис. 2.3

ний. Эту систему он изложил в 13 книгах под общим названием «Начала» (считается, что еще 2 книги были написаны другими авторами).

Долгое время геометрия была единственной математикой, а «Начала» Евклида – единственным научным руководством, школьным и университетским учебником. Как видно, геометрия является прародительницей всей математики и эту благородную миссию она во многом продолжает до настоящего времени.

«Начала» Евклида вначале были распространены в арабских странах, позднее в европейских. Таким путем они дошли до наших времен. Оригиналы «Начал» не сохранились, предположительно из-за неоднократных разрушений, разграблений и сожжений Александрийской библиотеки, где они хранились. Первое появление «Начал» Евклида в печати произошло в 1482 г. в Венеции. Перевод «Начал» с греческого на русский произошел в 1784 г. При раскопках античных городов найдено несколько папирусов, содержащих небольшие фрагменты «Начал» Евклида. Самый известный был найден в «городе папирусов» Оксиринхе в 1896–1897, он содержит формулировку одного из утверждений второй книги (рис. 2.3). За более подробными сведениями отсылаем к Интернет-источникам.

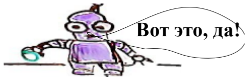
2.1.2. ЧТО ИЗУЧАЕТ ПЛАНИМЕТРИЯ И СТЕРЕОМЕТРИЯ

► Геометрия состоит из планиметрии и стереометрии. Все геометрические фигуры (прямые, отрезки, треугольники и др.) состоят из точек. **Точки** – самые простейшие фигуры, при помощи которых образуются все остальные фигуры. Фигуры, все точки которых принадлежат одной плоскости, называются *плоскими, или планиметрическими фигурами.* Фигуры, точки которых не принадлежат одной какой-либо плоскости, называются *пространственными или стереометрическими фигурами*. Запомним следующие определения.

ПЛАНИМЕТРИЯ – это раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур на плоскости. На рисунке 2.4 изображены некоторые фрактальные фигуры, которые привлекают внимание не только своей красотой, но и необычными свойствами.

СТЕРЕОМЕТРИЯ – это раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур в пространстве. Стереометрические фигуры, как правило, образуются при помощи планиметрических фигур. На рисунке 2.5 приведены некоторые стереометрические фигуры.

В 5–6-х классах вы знакомились с некоторыми геометрическими фигурами, учились различать их по внешнему виду. Начиная с 7 класса, будете учиться различать их не только по внешнему виду, но и по свойствам. Это необходимо для изучения теоретического материала и решения задач. Необходимо с полной серьезностью отнестись к самым



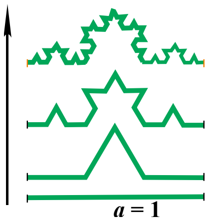


Рис. 2.4

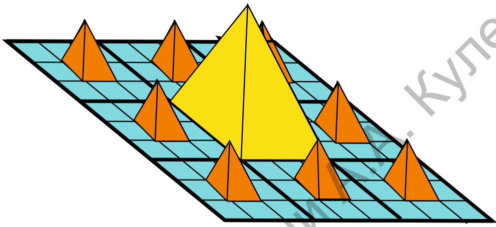


Рис. 2.5

простым понятиям. Поясним на примере отрезка. При всей его кажущейся простоте с его помощью строятся треугольники, четырехугольники и вообще любые многоугольники и ломаные линии. С помощью этих планиметрических фигур строятся многие стереометрические фигуры, как видно, и здесь роль отрезка продолжается. А на рисунке 2.4 приведена кривая Коха, она тоже состоит из отрезков, но эта кривая не так давно озадачила всех математиков в мире. Дело в том, что в каждой своей точке она имеет излом. Правда, при этом считается, что процесс её построения является бесконечным. Подробнее её свойства будут рассмотрены в задаче 45.

Землянин. Разбираться в теоретическом материале (аксиомах, определениях, теоремах, доказательствах), понимать его – это крайне необходимо в будущем для учебы в гимназии, лицеи, высшем учебном заведении. Это необходимо и для рабочих специальностей в связи с освоением новой техники и наступлением новой технологической эры – эры искусственного интеллекта и роботизации.

УСПЕШНОГО ВАМ ПУТИ В ГЕОМЕТРИЮ!

Окружающий нас мир – это мир геометрии.
Академик А.Д. Александров

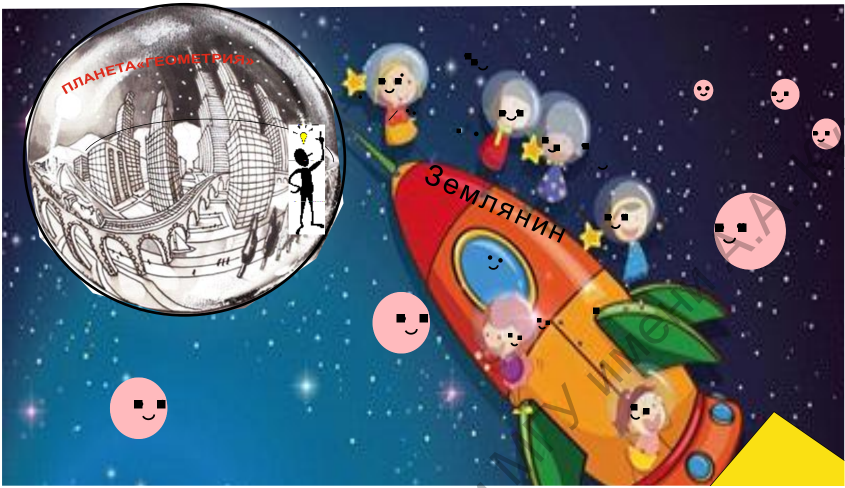


Рис. 2.6

Диалог при встрече.

Дети. Вот мы и достигли планету под названием «Геометрия». О, чудо! Нас даже встречают! Этот Геометр что-то говорит нам! Чудо из чудес: все понятно, говорит на нашем языке, не нужно даже переводчика! Давайте приглушим двигатель и послушаем.

Главный Геометр планеты. Я, Главный Геометр планеты. Я и все жители планеты рады приветствовать Вас, детей планеты «Земля». На нашей планете выращивают всех знаменитых геометров для всего космического пространства. В том числе и для планеты Земля. Наши Ученые точно научат Вас Геометрии и сделают Вас умнейшими людьми на всех просторах Вселенной! Причаливайте, мы Вас давно ждали!

Дети. Как нам повезло! О таких учителях мы и не мечтали! Будем стараться, чтобы не подвести Вас! А можно посмотреть на Учителя Евклида?

Главный Геометр планеты. Вот он.

Дети. О! ...Да он еще молодой!

Главный Геометр планеты. Да, Учитель Евклида и Учение Евклида не стареют!

Дети. А если мы не справимся?

Главный Геометр планеты. Помощником Вам будет Землянин. Скоро Вы с ним познакомитесь.

2.2. ПОСТРОЕНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА ТЕМЫ 1 «ПЕРВЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ И АКСИОМЫ»

Ключевые понятия, аксиомы и теоремы геометрии

Точка. прямая. плоскость. Аксиомы принадлежности
Аксиомы порядка. Отрезок
Аксиомы измерения и откладывания отрезков
Дополнительный материал об измерении отрезков
Угол. Аксиомы измерения и откладывания углов
Виды углов. Смежные и вертикальные углы
Треугольник. Медиана, биссектриса, высота треугольника
Первый признак равенства треугольников как аксиома

2.2.1. ТОЧКА. ПРЯМАЯ. ПЛОСКОСТЬ. АКСИОМЫ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

1 урок

Методические особенности содержания параграфа. Как уже отмечалось в Предисловии, геометрия 7 класса – основа всего школьного курса геометрии, а первая тема, можно сказать, является основой основ. В этом параграфе говорится об исходных понятиях геометрии и об аксиомах, которые описывают эти понятия. Эта информация точнее для понимания сути и назначения аксиом, чем просто сказать: аксиомы – предложения, которые не доказываются. Аксиомы описывают самые простые геометрические понятия, с помощью которых вводятся более сложные понятия, обеспечивая изложение от простого к более сложному, от наглядного к менее наглядному и т. д. Сам термин «аксиома» часто оказывается знакомым учащимся, причем не всегда из учебников. Приводятся две первые аксиомы – аксиомы принадлежности. Кратко систематизируются геометрические сведения из предыдущих классов. Ведется формирование правильных представлений об основных геометрических понятиях. Вводится символика для обозначения точек, прямых и плоскостей, для записи предложений о принадлежности и не принадлежности одних геометрических объектов другими объектам. В качестве примера расположения объектов на прямой приводится фотография с изображением парада планет. Приведена задача с примером «выхода в пространство». Все это делает содержание параграфа насыщенным и неформальным. Принята следующая структура параграфа: точка, прямая, плоскость; аксиомы принадлежности, задания для коллективного выполнения. Параграф разбит на пункты. Каждый пункт, как правило, содержит две части. Одна часть – теоретический материал, вторая часть дополнения в виде графических иллюстраций, примеров из окружающей среды и других пояснений к теоретическому материалу, сообщаемые **Землянином**. Сопровождение теории пояснениями, как правило, сохраняет преобладание информации по сравнению с энтропией. Например, в первом пункте наряду с теорией приводятся два пояснения от Землянина. Нетрудно подсчитать энтропию и информацию этого пункта, положив время на изложение теории, равным 5 мин, а на пояснения 1 мин и приняв 6 мин за 100%. Математические расчеты показывают, что энтропия намного меньше информации: $H = 0{,}6501$, $I = 1{,}3499$.

1. ТОЧКА. ПРЯМАЯ. ПЛОСКОСТЬ. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФИГУРА. Слова «аксиома», «геометрия», «математика» пришли из Античной Греции[1]. Свойства исходных, простейших понятий в геометрии описываются **аксиомами**. На их основе определяются более сложные понятия. В итоге осуществляется построение геометрии от простого к менее простому, а от него к более сложному. Первые две аксиомы называется **аксиомами принадлежности**. В них говорится о **точках, принадлежащих прямой или плоскости, и о прямых, принадлежащих плоскости**.

Землянин. Слово «принадлежать» означает являться частью чего-либо. Оно часто используется в разговорной и литературной речи. Говорят: «голос принадлежал...», «дом принадлежит...». «идея принадлежала...», «он принадлежит к числу оптимистов», «он принадлежит к молодому поколению» и т.д. В геометрии иногда вместо «точка принадлежит прямой» говорят «точка лежит на прямой», или «прямая проходит через точку».

Точки обозначаются большими латинскими буквами: *A, B, C*, … . Прямые обозначаются одной малой латинской буквой: *a, b, c*, …, или двумя большими латинскими буквами: *AB, BC, OA*, …. Плоскости обычно обозначаются малыми греческими буквами α, β, γ, ..., или тремя заглавными латинскими буквами, например, плоскость *ABC*. Утверждения «точка *A* принадлежит прямой *a*», «точка *A* принадлежит плоскости α», «прямая *a* принадлежит плоскости α» записываются так: $A \in a$, $A \in \alpha$, $a \subset \alpha$. Утверждения «точка *A* не принадлежит прямой *a*», «точка *A*

[1]Аксиома. Греч. *αξιωμα* – положение, не нуждающееся в доказательстве, бесспорное.
Геометрия. Греч. *γεωμετρια* – землемерие.
Математика. Греч. *μαθημα* – знание, учение, наука.

не принадлежит плоскости α», «прямая *a* не принадлежит плоскости α» записываются так: $A \notin a$, $A \notin \alpha$, $a \not\subset \alpha$.

Определение 1. **Геометрической фигурой** называется любое множество точек.

Землянин. Отдельная точка, прямая, плоскость – геометрические фигуры. В предшествующих классах вы знакомились со многими геометрическими фигурами: отрезком, лучом, углом, треугольником и др. Все они состоят из точек. Так какая самая главная и одновременно простейшая фигура в геометрии? Правильно! Точка!

2. АКСИОМЫ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ I.1–I.2.

I.1. Сколько угодно точек принадлежит прямой, сколько угодно точек плоскости не принадлежит прямой. Если две точки прямой принадлежат плоскости, то все точки прямой принадлежат плоскости (рис. 2.7)[2].

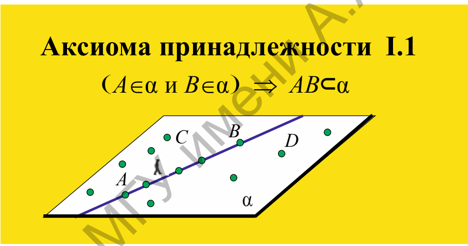


Рис 2.7

Землянин. Если на рисунке 2.7 нарисовать все точки прямой и все точки плоскости зелеными, то вся прямая и вся плоскость станут зелеными, без каких-либо «просветов» – столько много точек. И ещё: если на рисунках вам встретятся маленькие человечки, то они, скорее всего, жители с Нанопланеты. Они собирают геометрические знания со всей Вселенной, очень любят геометрию и особенно аксиомы.

Определение 2. Если все точки прямой *AB* принадлежат плоскости α, то говорят, что **прямая** *AB* **принадлежит плоскости** α.

I.2. Через две точки плоскости можно провести прямую и притом только одну (рис. 2.8).

Запись $(A \in \alpha$ и $B \in \alpha) \Rightarrow AB \subset \alpha$ читается: «если точки *A* и *B* принадлежат плоскости α , то прямая *AB* принадлежит плоскости α».

Задача. Пусть $AB \subset \alpha$. Верны ли утверждения: а) $A \in \alpha$ и $B \in \alpha$; б) $A \in \alpha$ и $B \notin \alpha$;

Решение. Если $AB \subset \alpha$, то значит все точки прямой *AB* принадлежат плоскости α (в том числе точки *A* и *B* тоже). Поэтому утверждение а) верно, а утверждение б) неверно.

Пример из окружающей среды. На рисунке 2.9 показано, что на одной прямой могут располагаться не только точки, но и такие космиче-

[2]Для рисунков, приводимых к аксиомам используется желтый фон, к определениям – синий фон, к теоремам – зеленый фон.

ские объекты как планеты солнечной системы, образуя время от времени, «парад» планет. Малый парад, когда в одну прямую линию выстраиваются не все планеты, бывает примерно каждые 20 лет, а большой случается гораздо реже. Точное положение планет на одной прямой, хотя возможно, но крайне редко – один раз в несколько миллионов лет.

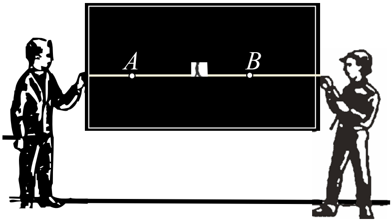


Рис. 2.8

Рис. 2.9

Интерактивные задания для коллективного выполнения

1. **Землянин.** Сформулируйте и поясните на рисунке аксиомы принадлежности. Какие слова и предложения были вам не понятными? Повторите аксиомы несколько раз, постарайтесь запомнить их.

2. С помощью обозначений запишите предложения:

а) «Точка *M* принадлежит прямой *AB*»; б) «Прямая *AB* проходит черед точку *C*».

3. Какими буквами обозначается плоскость? Как читаются эти буквы?

4. Нарисуйте прямые *AB* и *CD*, которые имеют: а) только одну общую точку *A*; б) только одну общую точку *B*; в) общими обе точки *A* и *B*.

2.2.2. АКСИОМЫ ПОРЯДКА. ОТРЕЗОК

1 урок

Методические особенности содержания параграфа. В этом параграфе вводятся три аксиомы порядка и на их основе определения отрезка, луча и полуплоскости. Частое употребление в школьных учебниках понятия полуплоскости стимулирует введение соответствующей аксиомы порядка. Кроме того, обеспечивается «профилактика» ошибок типа «Кругом называется часть плоскости, ограниченная окружностью» [41. с. 29]. Окружность является границей двух частей плоскости, но кругом является только одна из них! (Та же самая проблема, что и с определением угла.) Обращается внимание на формирование математических понятий и математической речи. На основе этих понятий рассматриваются первые геометрические задачи на вычисление. Показывается связь геометрических понятий с примерами из природы и науки. Уделяется внимание современным примерам из физики и техники. Приводится компьютерная иллюстрация плоскости и полуплоскости как множества точек. Принята следующая структура изложения: аксиомы порядка, отрезок, луч; полуплоскость; интерактивные задания для коллективного выполнения. Формулировки аксиом, определений и теорем рекомендуется заучивать.

3. АКСИОМЫ ПОРЯДКА. ОТРЕЗОК. Приведем три аксиомы порядка. На рисунке 2.10 из трех точек *A*, *B* и *C*, принадлежащих прямой *a*, точка *C* лежит между точками *A* и *B*. Между точками *A*, *B* и *C* существуют новые точки, которые лежат между ними. Продолжая выбор новых точек на отрезке *AB*, обнаружим, что этих точек существует, как и на прямой, сколько угодно.

Рис. 2.10

Рис. 2.11

II.1. Из трех точек, принадлежащих прямой, существует одна и только одна точка, которая лежит между двумя другими.

Пример. Выразительную иллюстрацию данной аксиомы дают птицы, сидящие на проводах линии электропередач (рис. 2.11). В разговорной речи часто используются такие выражения: «между двух огней», «между небом и землей», «между молотом и наковальней», «между строк» и т.д.

Определение. Множество точек прямой *a*, состоящее из двух точек *A* и *B* этой прямой и всех точек *X*, лежащих между ними, называется **отрезком**. Точки *A* и *B* – *концы* отрезка (рис. 2.12).

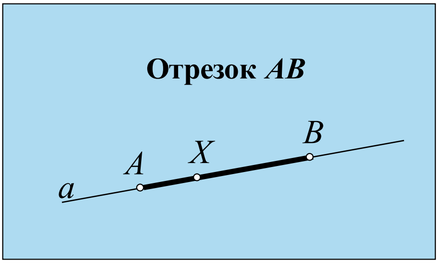


Рис. 2.12

Землянин. 1. Прямая *AB* и отрезок *AB* часто обозначаются одинаково: *AB*. Однако, путаницы от этого обычно не происходит. Из текста каждый раз ясно, когда речь идет о прямой *AB*, а когда об отрезке *AB*.

2. Отрезок содержит сколь угодно большое число точек (т.е. бесконечное множество точек). Геометрические точки не измеряются, они не имеют размеров (это отметил еще Евклид). Изображая точки, мы иногда делаем одни точки мельче, другие крупнее. Делается это ради наглядности, а не потому, что существуют «мелкие» и «крупные» точки. Для наглядности точки иногда изображаем цветными (белыми, зелеными и т.д.). Необходимо иметь в виду, что точки не имеют никаких свойств, кроме тех, которые указаны в аксиомах.

4. ЛУЧ. АКСИОМА О РАЗБИЕНИИ ПРЯМОЙ НА ДВА ЛУЧА.

II.2. Точка, принадлежащая прямой, разбивает все остальные точки прямой на две непересекающиеся части. Эти части прямой называются **лучами,** а точка осуществляющая разбиение, – *началом* лучей.

На рисунке 2.13 точка *C* разбивает прямую *a* на два луча *CA* и *CB*. Точка *C* является началом обоих этих лучей.

Аксиома утверждает, что точка, принадлежащая прямой, разбивает все остальные точки прямой на два луча. Эти два луча называются **дополнительными**, они дополняют друг друга (вместе с началом) до прямой.

Рис. 2.13

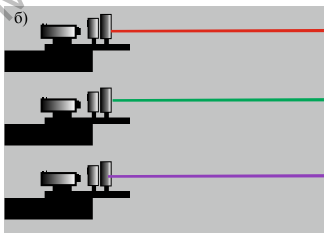


Рис. 2.14

Землянин. В жизни вы неоднократно встречались с такими выражениями как «солнечные лучи», «луч зрения», в художественной литературе – «яркие лучи», «луч света в темном царстве», в физике – «лазерный луч», «ренгеновские лучи», «отраженный луч», «преломленный луч», «пучок лучей» и др. На рисунке 2.14 в качестве примера приводится луч лазера, дающей хорошее представление о луче, как о математическом понятии.

5. АКСИОМА О РАЗБИЕНИИ ПЛОСКОСТИ НА ДВЕ ПОЛУПЛОСКОСТИ.

II.3. Прямая *a*, принадлежащая плоскости α (рис. 2.15), **разбивает все точки плоскости, не принадлежащие этой прямой, на две части.** Эти части плоскости называются **полуплоскостями.** Прямая *a* – *граница* полуплоскостей.

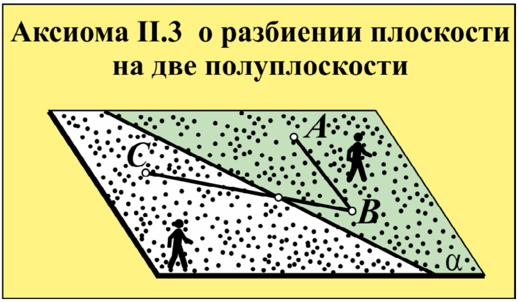


Рис. 2.15

Рис. 2.16

На рисунке 2.15 прямая *a* делит плоскость α на две полуплоскости, такие, что:

а) если точки *A* и *B* принадлежат одной полуплоскости с границей *a*, то отрезок *AB* не пересекает прямую *a*,

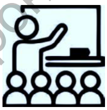
б) если точки *B* и *C* лежат в разных полуплоскостях с границей *a*, то отрезок *BC* пересекает прямую *a*.

Землянин. 1. Рисунок 2.15 подчеркивает, что плоскость состоит из бесконечного множества точек, плоскость не ограничена. Все точки плоскости равноправны, нет какой-либо особой, центральной точки.

2. Слово «разбить» означает произвести деление чего-либо на две, три и т.д. части, распределить по частям: разделить яблоко на части; разделить землю на несколько участков; разделить солдат на две колонны; говорят, что река делит территорию на две части – правобережную и левобережную, экватор делит Землю на две части – Северное и Южное полушарие и т.д. На рисунке 2.16 изображена противопожарная полоса, она делит территорию леса на две части и является границей этих частей.

Следствие (см. рис. 2.15). *Пусть точки A и B лежат по одну сторону от прямой a, а точка C – по другую. Тогда если прямая a не проходит ни через один из концов отрезков AB, BC и AC, <u>пересекает</u> отрезок BC <u>и не пересекает</u> отрезок AB, то эта прямая пересечет отрезок AC.*

Интерактивные задания для коллективного выполнения



1. Сформулируйте и поясните на рисунке аксиомы порядка точек на прямой и на плоскости. Повторите аксиомы несколько раз, постарайтесь запомнить их.

2. Что называется отрезком? Приведите рисунки, когда два отрезка: а) не имеют общих точек; б) имеют одну общую точку; в) общие их точки образуют отрезок.

3. Что называется лучом? Как обозначается луч? Приведите рисунки, когда два луча: а) не имеют общих точек; б) общие их точки образуют отрезок; в) общие их точки образуют луч.

4. Допустим, что прямая *a* принадлежит плоскости α и из прямой *a* (см. рис. 2.15) вырезали некоторый отрезок. Будет ли прямая *a* без этого отрезка разделять плоскость α на две части?

2.2.3. АКСИОМЫ ИЗМЕРЕНИЯ И ОТКЛАДЫВАНИЯ ОТРЕЗКОВ

2 урока

Методические особенности содержания параграфа. Аксиомы измерения величин играют существенную роль на протяжении изучения геометрии в 7–11-х классах. В данном параграфе определяется ряд важнейших понятий: измерение величины, числовое значение длины отрезка, сравнение отрезков (равенство, больше, меньше), сумма, разность отрезков, отношение и пропорциональность отрезков, а также окружность и её элементы. Все понятия для отрезков вводятся при помощи длин отрезков. Для этого приводятся три аксиомы измерения отрезков и одна аксиома откладывания отрезка. Приводятся два следствия об отношении отрезков. На этой основе решаются первые геометрические задачи на вычисление. Разъясняется важнейшее геометрическое положение о том, что длина отрезка зависит от выбора единицы измерения отрезков, а отношение отрезков, напротив, не зависит (что подготавливает учащихся к последующему изучению обобщенной теоремы Фалеса). Принята следующая структура изложения: аксиомы измерения и откладывания отрезков; сравнение отрезков; окружность; простейшие построения с помощью циркуля и линейки; измерение расстояний на карте с помощью масштаба; интерактивные задания для коллективного выполнения.

6. АКСИОМЫ ИЗМЕРЕНИЯ И ОТКЛАДЫВАНИЯ ОТРЕЗКОВ.

С измерением отрезков вы знакомились еще в начальных классах. Измерение любой величины заключается в сравнении данной величины с некоторой величиной такого же вида, принятой за единицу. Длины отрезков могут быть равны 2 см, 3,6 см, 1, 333... см и т.д. В таком случае числа 2; 3,6; 1,333... – числовые значения этих длин.

Определения. 1. **Длина отрезка** есть положительная величина, числовое значение которой показывает сколько раз единичный отрезок и его десятичные части (1/10, 1/100 и т.д.) содержатся в измеряемом отрезке.

III.1. Любой отрезок может быть выбран в качестве единичного отрезка, (отрезка, длина которого равна 1). **Каждый отрезок, при выбранной единице измерения, имеет единственную положительную**

длину. Если отрезок разбит точками на непересекающиеся части, то длина отрезка равна сумме длин его частей.

III.2. На данном луче от его начала можно отложить отрезок, равный по длине данному отрезку, и притом только один.

Длина отрезка *AB* называется также **расстоянием** между точками *A* и *B*.

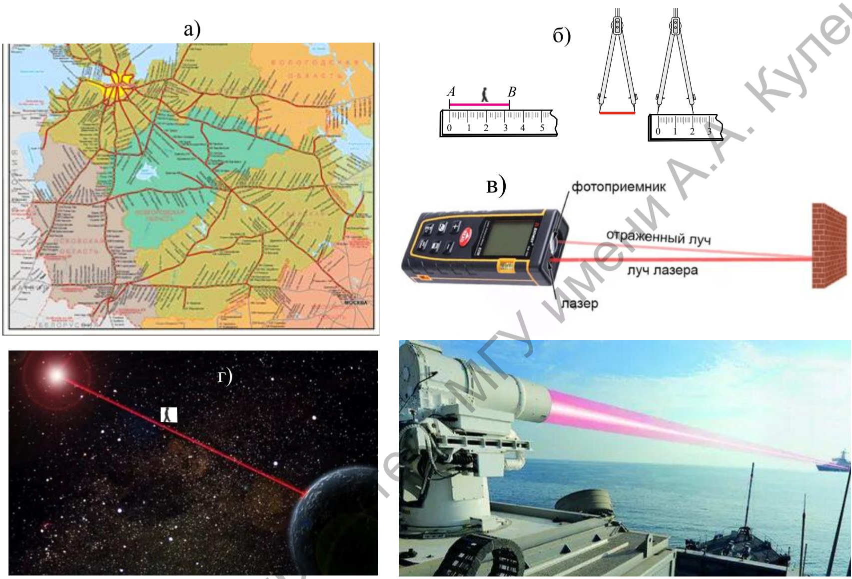


Рис. 2.17

Землянин. 1. Позже будет установлено, что расстояние между двумя точками является кратчайшим (наименьшим), и в геометрии оно является «родоначальником» других кратчайших расстояний. С полным правом можно считать, что понятие расстояния между двумя точками является одним из важнейших геометрических свойств, и этим свойством обладает казалось бы, такое простое понятие как отрезок. К кратчайшим расстояниям нередко прибегают и на практике. Примером может служить железная дорога Москва–Санкт-Петербург (рис. 2.17а). По легенде император Николай I приложил на карте линейку к этим пунктам и провел карандашом отрезок, соединяющий их. Но это лишь легенда. На самом деле железную дорогу так спроектировали инженеры.

2. Для измерения отрезков (расстояний) использовались различные инструменты, большинство из которых заменяются в настоящее время лазерными измерителями (рис. 2.17). **Ла́зер** – источник очень узкого и мощного пучка света. **Лазерный измеритель** – это прибор для измерения расстояний, углов и площадей при помощи лазера. Лазерный луч отражается от плоскости замера и возвращается к

дальномеру. Прибор обрабатывает отраженный лазерный пучок (время и скорость его движения) и на экране показывает расстояние. Лазеры применяются и в военных целях.

3. Пример нахождения расстояния при помощи звуковой волны. Геометрических формул для вычисления расстояний у нас пока нет. Но можно обратиться, как и выше, к физике. Известно, что звук в воздухе распространяется примерно со скоростью 331 м/с. Отсчитаем секунды от момента разряда молнии до момента, когда до нас дошел ее звук (гром). Допустим, что насчитали 10 с. Тогда можно найти расстояние от тучи, в которой произошел разряд, до наблюдателя (условно принимаемые за точки). Оно равно $331 \cdot 10 \approx 3310$ (м) $\approx 3{,}31$ км.

7. СРАВНЕНИЕ ОТРЕЗКОВ (ОПРЕДЕЛЕНИЯ). Запомним их.

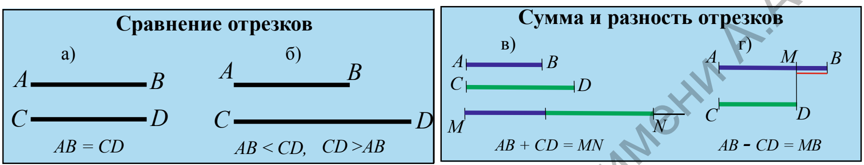


Рис. 2.18

2. Отрезки AB и CD, имеющие одинаковую длину, называются **равными** (рис. 2.18а). Записывают: $AB = CD$.

3. Отрезок AB **меньше** отрезка CD, если длина отрезка AB меньше длины отрезка CD. Тогда отрезок CD **больше** отрезка AB (рис. 2.18б): $AB < CD$ ($CD > AB$).

4. Если на луче от его вершины последовательно отложить (в одну сторону) два отрезка (AB и CD, рис. 2.18в), то получится отрезок (MN), называемый **суммой** отрезков AB и CD: $AB + CD = MN$.

5. Если на большем отрезке AB от его конца A отложить меньший отрезок CD (рис.2.18г), то оставшаяся часть MB отрезка AB называется **разностью** отрезков: $AB - CD = MB$.

6. **Окружностью** называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от одной некоторой точки этой плоскости, называемой *центром* окружности (рис. 2.19,а). Отрезок, соединяющий центр окружности с любой точкой окружности, – *радиус* окружности. Отрезок (BC), соединяющий две точки окружности, – *хорда* окружности. Хорда (DE), проходящая через центр окружности, – *диаметр* окружности.

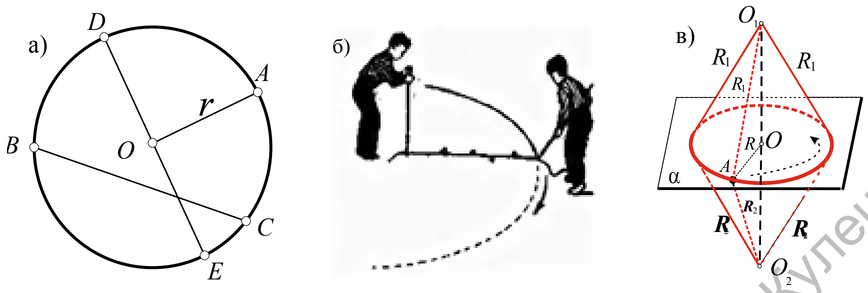


Рис. 2.19

Задание (устно). На рисунке 2.19а назовите центр, радиус, диаметр, хорду окружности. Являются ли хордой радиус и диаметр? Сколько радиусов имеет окружность? Сколько диаметров имеет окружность? Во сколько раз радиус окружности меньше диаметра?

Пример из окружающей среды. На рисунке 2.19б показано построение окружности на местности при разметке клумбы.

8. ИЗ ПЕСНИ СЛОВА НЕ ВЫКИНЕШЬ. А МОЖНО ЛИ ИХ ВЫКИНУТЬ ИЗ ОПРЕДЕЛЕНИЯ? Высказывание «Из песни слова не выкинешь» известно давно и пользуется немалой популярностью. Действительно, если выбросить из песни некоторые слова, то либо получится другая песня, либо вообще бессмысленный набор слов. Нечто аналогичное происходит с «выкидыванием» слов из математических определений. Вот две формулировки:

Окружностью называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от одной некоторой точки этой плоскости, называемой **центром** окружности.	**«Окружностью»** называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от одной некоторой точки, называемой **центром** окружности.

Не сразу заметишь, отличаются ли эти формулировки друг от друга. Действительно, на первый взгляд отличие совсем незначительное: в первой формулировке есть слова «этой плоскости», а во второй формулировке их нет.

Вопрос-задача: **«Приемлема или нет вторая формулировка?»** Ответ подсказывает рисунок 2.19в. Из него видно, что если за центр окружности принять вершину конуса O_1, а за радиус отрезок O_1A, то множество точек плоскости α, равноудаленных от точки O_1 на расстояние O_1A также будет окружностью (к примеру, если бы на рисунке

2.19б веревка была бы прикреплена не к нижнему концу колышка, а к верхнему, то окружность также бы описывалась). Нетрудно заметить, что за центр такой окружности можно принять и вершину второго конуса, расположенного по другую сторону от плоскости α. Так что одна и та же окружность имеет два центра? Или даже три центра? А присмотреться и вообще сколько угодно центров! Еще одна новость: окружности с центрами O_1 и O_2 не имеют ни одного диаметра! Вот такая получается история, которая наглядно показывает, что в математике надо всем ценить точность в формулируемых предложениях и не допускать «выкидывания слов из песни».

9. ОТНОШЕНИЕ ДЛИН ОТРЕЗКОВ. ПРОПОРЦИЯ.

Следствия. 1. *Длина отрезка показывает во сколько раз измеряемый отрезок больше (меньше) единичного отрезка.*

2. *При измерении отрезка новой единицей измерения отношения полученных длин остаются постоянными.*

Пример сохранения отношения двух отрезков. Два отрезка вначале измерили в дм, получили 2 дм и 3 дм. Затем измерили в сантиметрах, получили 20 см и 30 см. Отношение длин отрезков не изменилось. Схематично можно записать:

2 дм --------- 20 см
3 дм --------- 30 см

$$2 : 3 = 20 : 30, \text{ или } \frac{2}{3} = \frac{20}{30}.$$

Равенство двух отношений называют **пропорцией** (см. учебник для 6 кл.).

Задачи. 1. Постройте отрезок AB = 8 см и точку M, которая делит этот отрезок в отношении 1 : 3, считая от конца B.

2. Даны две точки: конец A отрезка AB и точка M, такая, что $AB : AM = 4 : 1$. Постройте конец B отрезка.

10. ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ. ИЗМЕРЕНИЕ РАССТОЯНИЙ ПО КАРТЕ.

1. Построение окружности данного радиуса с помощью циркуля: вначале циркулем измеряется отрезок, которым задается радиус, затем с центром в некоторой точке строится окружность этим радиусом.

2 . На рисунке 2.20 показано построение на луче MN отрезка MX = = $3AB$. Отрезок AB и луч MN считаются данными, или они строятся с самого начала. Затем циркулем измеряется отрезок AB (см. рис. 2.20а), он последовательно откладывается на луче MN три раза (рис. 2.20б). Отрезок MX – искомый.

3. (**Измерение расстояний по карте**). По карте (рис. 2.21) с помощью линейки измеряем расстояние между вышкой и мостом. Пусть оно

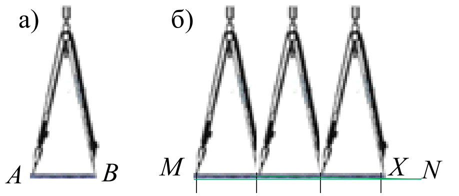


Рис. 2.20

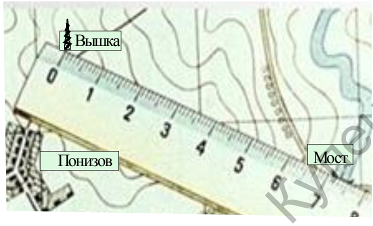


Рис.2.21

равно 7 см. Если на карте указан масштаб, например, в 1 см 500 м, то расстояние на местности будет в 500 раз больше: 7·500= 3500 (м) = 3,5 км. С помощью пропорции решение можно записать следующим образом:

1 см --------- 0,5 км
7 см --------- x км

$$\frac{1}{7} = \frac{0,5}{x}, \; x = \frac{0,5 \cdot 7}{1} = 3,5 \text{ (км)}.$$

Интерактивные задания для коллективного выполнения

1. Дан отрезок AB = 10 см. Постройте точку M, которая бы делила отрезок AB в отношении $AM : MB$ = 3 : 2.

2.2.4. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ МАТЕРИАЛ: ОБ ИЗМЕРЕНИИ ОТРЕЗКОВ, ПЕРВОЕ ЗНАКОМСТВО С ТЕОРЕМОЙ ПИФАГОРА

1 урок

Методические особенности содержания параграфа. В этом параграфе приводятся дополнительные сведения об измерении длин отрезков (в основном для желающих). Развитие этой теории увязано с античными временами (Эратосфеном) и современностью (созданием новой единицы измерения длин отрезков – **нанометром**). Показано, что измерение отрезков связано с созданием новых чисел, которые называются иррациональными. Наиболее простой способ для первоначального знакомства с новыми числами возможен в школьном курсе геометрии на примере теоремы Пифагора. Приводятся интерактивные задания для коллективного выполнения.

11. НЕВОЗМОЖНОСТЬ ОДНОЗНАЧНОГО ВЫБОРА ЕДИНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЯ ОТРЕЗКОВ привела к возникновению большого разнообразия единиц измерения у различных народов. Это породило проблему, которая возрастала по мере усиления их связей друг с другом.

Её помог решить греческий ученый Эратосфен, который с помощью геометрических рассуждений измерил один из меридианов Земли. **Со временем 1 м определили как одну десятимиллионную часть четверти меридиана Земли**. Понятно, что Земля не имеет точной геометрической формы и измерение меридиана является приближенным. Теоретически же определить единицу измерения оказалось не возможно. Традиционные практические способы измерения являются приближенными и слишком неточными. Например, с помощью миллиметровой линейки можно подсчитать миллиметры, но уже 1/10 миллиметра увидеть не возможно, так как штрихи на шкале начинают сливаться.

12. С ПОМОЩЬЮ СОВРЕМЕННОЙ ФИЗИКИ УЧЕНЫЕ НАУЧИЛИСЬ ИЗМЕРЯТЬ ОЧЕНЬ МЕЛКИЕ ОБЪЕКТЫ. Появилась новая единица измерения длины **нанометр**. В переводе с греческого слово «нано» обозначает **карлик**. Нанометр очень мал: **1 нанометр – это одна миллиардная часть метра**. Нанометр используется, например, при изучении строения молекул и атомов (размеры атома колеблются от 0,1 до 0,2 нанометра, в частности, размер атома золота равен 0,15 нанометра). В разработке технических устройств появилось новое направление – нанотехнологии (наиболее тонкий на данный момент с особыми физическими свойствами графен (одноатомный слой углерода) имеет толщину в 0,345 нанометра). В биологии и медицине нанотехнологии позволяют перевести исследования с клеточного уровня на уровень наноорганизмов (размер клетки 10^4–10^5 нанометров, бактерий 500–5000 нанометров, вирусов 20–300 нанометров). Могут ли помочь нанометры в измерении геометрических отрезков? Можно ли с их помощью точно измерить любой отрезок? Обратимся к простейшей задаче, которая в истории математики сыграла колоссальную роль. Оказывается, что **процесс измерения отрезков может быть конечным, или бесконечным.** В последнем случае особое значение имеет случай, когда он является не только бесконечным, но приводит к образованию числа, в котором в его дробной части отсутствует группа повторяющихся цифр. В этом случае длина отрезка не является рациональным числом, имеющий вид $\frac{a}{b}$. Таких случаев не просто «достаточно много», их количество больше, чем всех рациональных чисел вместе взятых. Простейшим случаем является **измерение диагонали квадрата, сторона которого равна 1.** Нетрудно определить целую часть длины диагонали и первый десятичный знак (рис. 2.22): 1,4... . Остается неизмеренным совсем малый отрезок, который, как оказывается, не может быть измерен в какое-либо конечное число шагов. Приведем несколько первых цифр числового значения длины диагонали: **1,41 42 13 56 23 73 09 50 48…** . Означает ли приведенный пример, что в теории измерения математики пришли к неразрешимому тупику (даже диагональ квадрата с помощью единицы измерения измерить невозможно!)? Как оказалось, тупика нет, проблема была, и она (начиная с античности) решилась только во второй половине XIX века, когда завершилось построение новых **иррациональных чисел**. Помогла знаменитая **теорема Пифагора**, утверждающая, что в прямоугольном треугольнике **квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.**

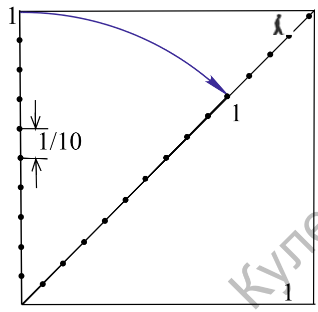


Рис. 2.22

Доказательство теоремы из-за нехватки учебного времени будет приведено позже, в 8 классе, на основе понятия подобия. Ранее, в классах с углубленным изучением математики, при наличии большего количества часов на геометрию, эта теорема доказывалась в 7 классе на основе аксиом измерения площади. Такая передвижка не требует изменения логической системы изложения остального материала. В данной системе можно считать площади и теорему Пифагора материалом 7 класса, отнесенным из-за дефицита времени к более поздним срокам, не лишая при этом данную теорему возможности её практического использования, начиная с 7 класса. Заинтересованный читатель может убедиться в этом непосредственно.

По этой теореме квадрат диагонали единичного квадрата равен $d^2 = 1^2 + 1^2 = 2,\ \ d^2 = 2$. Число d обозначили символом $\sqrt{2}$ (корень квадратный из 2), **понимая под ним число $\sqrt{2}$, квадрат которого равен 2**, т.е. $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$. Аналогично понимаются числа $\sqrt{3},\ \sqrt{4},\ \sqrt{5}$ и т.д. Эти числа читаются: корень квадратный из 2, корень квадратный из 3 и т.д.

Фрагмент таблицы квадратов чисел и квадратных корней

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
10	100	121	144	169	196	225	256	289	324	381
20	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
30	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
40	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401

Для квадратных корней существуют специальные таблицы. Не всегда в задачах для длин отрезков приводится наименование единицы измерения. В этих случаях имеется в виду, что отрезки измерены одной и той же единицей. Вот некоторые задачи на применение данной таблицы.

Задача 1. Найдите квадрат длины диагонали квадрата, если его сторона равна: а) 17; б) 43, в) 36.

Решение. По таблице находим квадрат длины диагонали: а) 289; б) 1849; в) 1296.

Задача 2 (устно). Найдите сторону квадрата, если квадрат длины его диагонали равен: а) 2401; б) 1369, в) 1024.

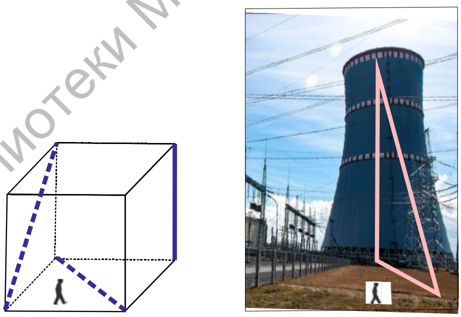
Ответ: а) $\sqrt{2401} = 49$; б) $\sqrt{1369} = 37$; в) $\sqrt{1024} = 32$.

Интерактивные задания для коллективного выполнения

13. ВЫХОД В ПРОСТРАНСТВО.

1. На рисунке 2.23а изображен куб. Сравните выделенные на нем три отрезка. Назовите: а) равные отрезки; б) наименьший отрезок.

2. **Землянин.** Для измерения высоты сооружений нередко используются лазеры (рис. 2.23б). Вначале наводят луч лазера на нижнюю точку измеряемого сооружения, затем на верхнюю его точку. Далее с помощью теоремы Пифагора программа по катету и гипотенузе подсчитает и покажет искомое расстояние. Какую высоту башни Островецкой АЭС покажет лазер, если катет равен 25 м, а гипотенуза равна 74,52 м?



а) б)

Рис. 2.23

2.2.5. АКСИОМЫ ИЗМЕРЕНИЯ И ОТКЛАДЫВАНИЯ УГЛОВ

Методические особенности содержания параграфа. В этом параграфе вводится понятие угла. Угол определяется однозначно как фигура, образованная двумя лучами, имеющими общее начало. Такой угол не больше 180°. Это позволяет, например, избежать «откладывания угла в 270° в полуплоскость». Позже будет введено понятие центрального угла окружности. «Угол» и «Центральный угол окружности» – различные геометрические понятия, которые отличаются друг от друга по смыслу и терминологически. Во избежание существующей путаницы в некоторых учебниках в принятой нами ЛМС они отделены друг от друга значительной дистанцией. Приводятся две аксиомы измерения углов и одна аксиома откладывания углов. Основной единицей измерения углов служит угол, равный 1°. В отличие от единицы измерения длин отрезков единица измерения углов определяется однозначно. Аксиомы иллюстрируются с помощью измерения углов транспортиром. После чего вводятся понятия: о сравнении углов (равенство, больше, меньше), биссектриса угла, числовое значение меры угла. С помощью меры угла достаточно просто излагаются все вопросы, связанные с понятием угла, без привлечения архаического понятия «наложения». Понятие луча, проходящего между сторонами угла, вводится традиционным для математики путем. Принята следующая структура параграфа: угол; измерение и откладывание углов; сравнение углов, биссектриса угла; измерение углов на местности; интерактивные задания для коллективного выполнения.

1 урок

14. УГОЛ (ОПРЕДЕЛЕНИЯ). 1. Геометрическая фигура, образованная двумя лучами, имеющими одно и то же начало, называется **углом**, лучи называются *сторонами* угла, общее начало – *вершиной* угла.

2. Если стороны угла принадлежат одной прямой, то угол называется **развернутым**, а стороны угла – *дополнительными лучами*.

3. Если луч, выходящий из вершины угла, пересекает отрезок, концы которого лежат на сторонах угла, то говорят, что этот **луч проходит между сторонами угла** и разбивает угол на две части. Множество точек всех лучей, проходящих между сторонами угла, образует *внутреннюю область* угла.

15. АКСИОМЫ ИЗМЕРЕНИЯ И ОТКЛАДЫВАНИЕ УГЛОВ IV.1–IV.4.

Пример. На рисунке 2.24 $\angle AOB$=20°, $\angle AOC$=50°, $\angle AOF$=180° и т.д.

Можно сказать также, что угол *AOB*, равный 20°, отложен от луча *OA* в верхнюю полуплоскость, и угол *AOC*, равный 40°, отложен от луча *OA* тоже в верхнюю полуплоскость и т. д.

IV.1. Каждый угол имеет единственную положительную градусную меру. Развернутый угол равен 180°.

IV.2. Мера угла равна сумме мер углов, на которые угол разбивается лучом, проходящим между его сторонами.

IV.3. На данном луче от его начала в заданную полуплоскость от луча можно отложить угол, имеющий заданную градусную меру, и притом только один.

16. ОПРЕДЕЛЕНИЯ. 3. Угол, равный 1° (т.е. 1/180 части развернутого угла), называется **градусной единицей измерения углов**.

4. Существуют и более мелкие единицы измерения углов (предложенные ещё в Древнем Вавилоне): по определению один градус равен 60 *минутам*, одна минута равна 60 *секундам*: $1° = 60'$, $1' = 60''$.

Примеры. а) $9° = 540' = 32400''$; б) $7200'' = 120' = 2°$; в) $1{,}2° = 72'$.

Благодаря аксиоме IV.2 выбор единицы измерения углов осуществляется единственным образом.

17. РАВНЫЕ УГЛЫ. БИССЕКТРИСА УГЛА (ПРОДОЛЖЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЙ).

4. Углы, имеющие одинаковую градусную меру, называются **равными**.

5. Из двух углов **меньше (больше) угол** с меньшей (большей) градусной мерой.

Примеры. На рисунке 2.24 $\angle AOB < \angle AOC$, $\angle AOB < \angle AOF$, $\angle AOB <$ $< \angle BOC$. На рисунке 2.25 $\angle AOC = \angle AOB$.

Рис. 2.24

Рис. 2.25

Следствия об измерении углов.

1. *Для трех лучей OA, OB и OC возможны следующие случаи:*

а) *ни один из этих лучей не проходит между двумя другими* (рис. 2.26а). **И значит, к ним аксиома IV.2 не применима;**

б) *если луч OC проходит между лучами OA и OB, то луч OA не проходит между лучами OB и OC, и луч OB не проходит между лучами OA и OC* (рис. 2.26б). **И значит, по аксиоме IV.2** $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$.

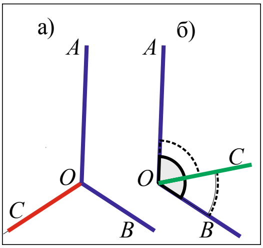


Рис. 2.26

2. *Угол не может быть равен своей части.*

3. *Градусная мера любого угла не больше* 180°.

Интерактивные задания для коллективного выполнения

1. Сформулируйте определение угла.

2. **Землянин.** Сформулируйте и поясните на рисунке аксиомы измерения и откладывания углов.

3. Какие углы называются равными? Что называется биссектрисой угла?

2.2.6. ВИДЫ УГЛОВ. СМЕЖНЫЕ И ВЕРТИКАЛЬНЫЕ УГЛЫ

Методические особенности содержания параграфа. В этом параграфе определяется четыре вида углов (острый, прямой, тупой, развернутый). Приводятся определения перпендикулярных прямых; упрощено определение перпендикуляра, проведенного из данной точки к данной прямой; смежных и вертикальных углов; угла между пересекающимися прямыми. Особенность данного параграфа состоит в том, что в нем вводятся первые две теоремы (о сумме смежных углов и равенстве вертикальных углов). Считается, что доказательства теорем были предложены античным ученым Фалесом. Главная его заслуга выходит далеко за рамки этих двух теорем. Гораздо важнее было осознание того, что большую часть геометрических предложений необходимо доказывать. Благодаря этому геометрия, а позже и вся математика, включая и современную математику, превратились в четкую теоретическую систему. Важно также, что эти первые две теоремы позволяют решать многие содержательные геометрические задачи. Принята следующая структура параграфа: виды углов, перпендикулярные прямые; смежные и вертикальные углы, угол между двумя пересекающимися прямыми; теоремы о смежных и вертикальных углах, чем теорема отличается от аксиомы; задачи на смежные и вертикальные углы; интерактивные задания для коллективного выполнения.

2 урока

18. ВИДЫ УГЛОВ. Насколько важно понятие угла можно судить уже по названиям многих фигур: многоугольник, шестиугольник, четырехугольник, треугольник, прямоугольный треугольник, прямоугольник и др. В свою очередь углы также могут быть различных видов.

Определения.

1. Угол называется **острым**, если он меньше 90°; **прямым**, если он равен 90°; **тупым**, если он больше 90° и меньше 180°. **Развернутым**, если он равен 180° (рис. 2.27).

Пример. Определенные виды углов используются в целях обеспечения устойчивости перемещения предметов по воздуху, например, в их подвесках (рис. 2.28).

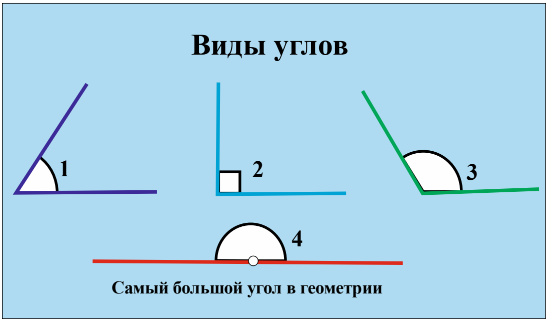


Рис. 2.27

Рис. 2.28

2. Две прямые называются **пересекающимися**, если они имеют единственную общую точку.

19. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПРЯМЫЕ. При помощи прямого угла определяются перпендикулярные прямые, а также перпендикуляр, проведенный из данной точки к данной прямой.

3. Если при пересечении двух прямых образуются прямые углы, то прямые называются **перпендикулярными** (рис. 2.29а).

Записывают: $a \perp b$, – прямая a перпендикулярна прямой b.

4. Пусть даны точка A и прямая b ($A \notin b$) и через точку A проведена прямая a, перпендикулярная b и пересекающая её в точке B. Отрезок AB называется **перпендикуляром**, проведенным из точки A к прямой b (рис. 2.29б).

Не путать определения 3 и 4!

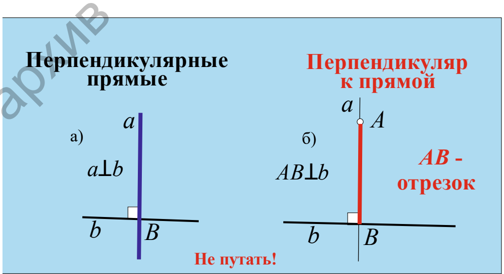


Рис. 2.29

20. СМЕЖНЫЕ И ВЕРТИКАЛЬНЫЕ УГЛЫ.

5. Два угла называются **смежными** (рис.2.30а), если у них одна сторона общая, а две другие являются дополнительными лучами.

6. Два угла называются **вертикальными** (рис. 2.30б), если стороны одного из них являются дополнительными лучами к сторонам другого.

7. **Углом между двумя пересекающимися прямыми** называется наименьший угол, который получается при пересечении этих прямых. На рисунке 2.30б углом между прямыми AB и CD является угол AOC (или равный ему угол BOD).

21. ТЕОРЕМЫ О СМЕЖНЫХ И ВЕРТИКАЛЬНЫХ УГЛАХ.

Теоремы: 1. **Если углы смежные, то их сумма равна 180°.**

2. **Если углы вертикальные, то они равны.**

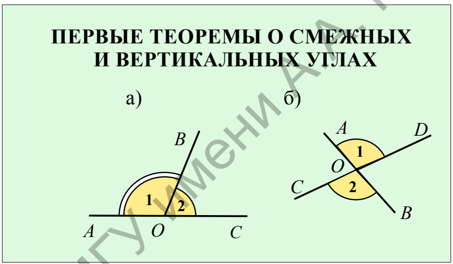


Рис. 2.30

Доказательства. **1**. Пусть $\angle 1$ и $\angle 2$ – смежные (см. рис. 2.30а). Эти два угла образуют развернутый $\angle AOC$. Поэтому $\angle 1 + \angle 2 = \angle AOC = 180°$.

2. Доказательство теоремы состоит из следующих шагов. Вертикальные углы 1 и 2 (см. рис. 2.30б) являются смежными к одному и тому же углу AOC, а значит, дополняют его до 180°: $\angle 1 + \underline{\angle AOC = 180°}$ и $\angle 2 + \underline{\angle AOC = 180°}$. Отсюда $\angle 1 = \angle 2$.

Землянин. Как наглядные факты, эти теоремы были известны давно. Считается, что доказательства этих и многих других теорем предложил Фалес. В этом его несомненная заслуга. Доказательства послужили основой построения геометрии как теоретической дисциплины. Это был исключительно важный шаг в становлении и развитии современной математики в целом.

22. ЧЕМ ТЕОРЕМА ОТЛИЧАЕТСЯ ОТ АКСИОМЫ? Аксиомы и теоремы – математические предложения, с помощью которых строится геометрическая теория.

АКСИОМЫ – самые первые, исходные предложения. **ТЕОРЕМЫ**, в отличие от аксиом, уже исходными не являются. Они доказываются с помощью логических рассуждений – **ДОКАЗАТЕЛЬСТВ**, проводимых на основании аксиом. В теореме выделяют **условие** теоремы – то, что дано и **заключение** теоремы – то, что нужно доказать.

Например, в теореме 1 даны смежные углы (это условие теоремы), требуется доказать, что они равны (это заключение теоремы). Научиться проводить доказательства – одна из основных целей изучения математики и важнейшее средство развития мышления человека. Аксиомы, теоремы и определения – все они описывают некоторые свойства геометрических фигур.

Задачи. 1. Докажите, что угол между биссектрисами смежных углов – прямой.

Доказательство. Пусть $\angle AOC = \angle COB$ – смежные (рис. 2.31), OM – биссектриса $\angle AOC$, ON – биссектриса $\angle BOC$. Докажем, что $\angle MON =$ $= 90°$.

Запишем цепочку равенств:

$$\angle MON = \frac{1}{2}\angle AOC + \frac{1}{2}\angle BOC = \frac{1}{2}(\angle AOC + \angle BOC) = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{180°}{2} = 90°.$$

2. На рисунке 2.31 $\angle AOM = 60°$. Найдите $\angle BON - \angle AOM - \angle MON =$ $= 180° - 60° - 90° = 30°$.

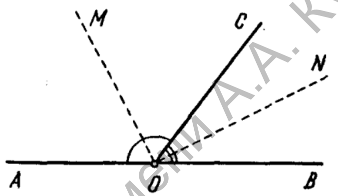


Рис. 2.31

3. На рисунке 2.31 $\angle CON = 30°$. Найдите $\angle AOM$.

Решение. Запишем цепочку равенств:

$\angle AOM = \angle AOB - \angle MON - \angle MOB =$ $= \angle AOB - \angle MON - \angle CON = 180° - 90° -$ $- 30° = 60°$.

Ответ: $\angle AOM = 60°$.

4. Смежные углы относятся как 1:5. Найдите эти углы.

Решение. Градусную меру меньшего угла обозначим за x. Тогда больший угол равен $5x$. Сумма углов равна $x + 5x = 6x$. На основании теоремы о сумме смежных углов запишем равенство $6x = 180°$. Отсюда $x = 30°$ (нашли меньший угол), $5x = 150°$ (нашли больший угол).

Ответ: 30°, 150°.

Интерактивные задания для коллективного выполнения

1. Какие виды углов существуют? Сформулируйте определения острого, прямого и тупого углов. Может ли тупой угол равняться 180°, 160°, 37°? Сколько градусов содержит прямой угол, развернутый угол?

2. Какие две прямые называются перпендикулярными? **Землянин.** Как определяется угол между двумя прямыми? Может ли угол между двумя прямыми быть равным 90°, 45°, 120°?

3. Один смежный угол больше другого на 20°. Найдите эти углы. (Ответ: 80°, 100°).

4. На рисунке 2.30б $\angle AOD = 92°$. Чему равен угол между прямыми AB и CD? (Ответ: 88°).

2.2.7. ТРЕУГОЛЬНИК. МЕДИАНА, БИССЕКТРИСА, ВЫСОТА ТРЕУГОЛЬНИКА. НОВАЯ АКСИОМА: ПЕРВЫЙ ПРИЗНАК РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Методические особенности содержания параграфа. В этом параграфе вводятся важнейшие для всего курса геометрии 7–11-х классов понятия треугольника, равенства двух треугольников и равенства произвольных фигур. С самого начала вводятся не только понятия стороны и угла треугольника, но и медиана, биссектриса и высота треугольника, что позволило увеличить разнообразие содержательных геометрических задач, что особенно важно для начала курса. Существенно отметить, что первый признак равенства треугольников принят в качестве аксиомы, как, например, в источнике [11]. В математическом и методическом плане такой подход является вполне оправданным. В фундаментальном труде Д. Гильберта «Основания геометрии» [4] первому признаку равенства треугольников предпосылается специальная аксиома III_5, близкая по содержанию к первому признаку равенства (утверждается равенство ещё одной пары углов). В школьном курсе принятие первого признака равенства в качестве аксиомы в логическом плане целесообразно, особенно если учесть, что он служит не только признаком, но и доказательством существования равных треугольников. Трудность первых доказательств иногда порождает предложения о принятии всех трех признаков без доказательства. На этом фоне принятие одного из признаков в качестве аксиомы выглядит своего рода оптимизирующим компромиссом. Необходимо также учесть, что традиционный подход к обоснованию трех признаков равенства треугольников не является безупречным, единого подхода нет: первые два признака «доказываются» с помощью «наложения» (что не является ни строгим, ни научным), третий иначе – с помощью «приложения». Без преобразований движения наложения представляют собой всего лишь физический опыт, а не доказательство. К тому же доказательство третьего признака «приложением» также обычно не строгое, так не все возможные случаи рассматривает. Существенно, что определение и признак равенства треугольников позволяют решать многие содержательные геометрические задачи. Отметим также, что равенство и подобие треугольников – две наиболее крупные и наиболее значимые содержательные линии школьного курса геометрии, образовательный эффект которых может быть повышен сближением соответствующих тем в структуре учебного курса и более раннем введении подобия треугольников. Принята следующая структура параграфа: треугольник, виды треугольников; практические применения свойства жесткости треугольника; медианы, биссектрисы и высоты треугольника; определение равных треугольников; первый признак равенства треугольников; примеры решения задач; интерактивные задания для коллективного выполнения.

3 урока

23. ТРЕУГОЛЬНИК. ВИДЫ ТРЕУГОЛЬНИКОВ (ОПРЕДЕЛЕНИЯ). Треугольник относится к числу наиболее важных геометрических фигур. Изучение многих более сложных фигур сводится к разбиению их на треугольники.

1. **Треугольником** называется фигура (рис. 2.30, состоящая из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех отрезков, соединяющих их. Данные точки называются *вершинами* треугольника, отрезки – *сторонами* треугольника.

Обозначение: ΔABC – треугольник ABC.

Точки A, B и C – вершины треугольника, отрезки AB, BC и CA – стороны треугольника, углы A, B и C – углы треугольника.

Иногда будем говорить о треугольнике ABC, как о треугольнике, *соединяющим* точки A, B и C.

2. На рисунке 2.32а в треугольнике ABC все углы острые, такой треугольник называется **остроугольным**; на рисунке 2.32б в треугольнике имеется прямой угол, такой треугольник называется **прямоугольным**; на рисунке 2.32в в треугольнике имеется тупой угол, треугольник называется **тупоугольным**.

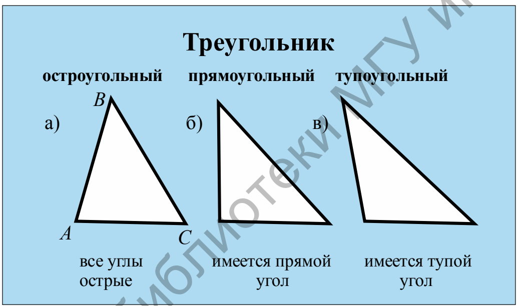


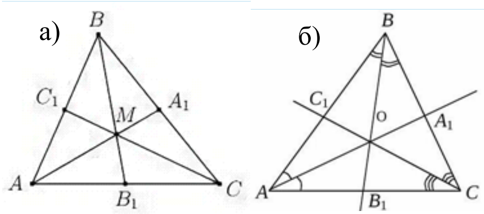
Рис. 2.32

24. МЕДИАНЫ, БИССЕКТРИСЫ И ВЫСОТЫ ТРЕУГОЛЬНИКА (ОПРЕДЕЛЕНИЯ).

С треугольником связаны многие другие геометрические понятия: медиана треугольника, биссектриса треугольника, высота треугольника и др.

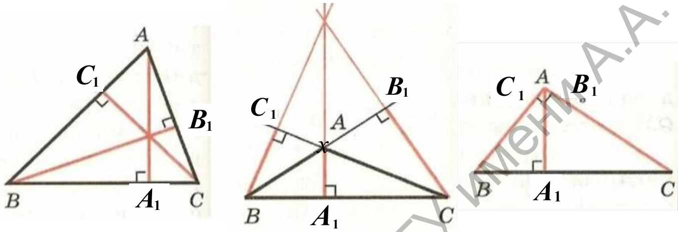
3. **Медианой** (AA_1, BB_1, CC_1, рис. 2.33а) треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

4. **Биссектрисой** (AA_1, BB_1, CC_1, рис. 2.33б) треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой пересечения биссектрисы угла треугольника с противоположной стороной.



Медианы **Биссектрисы**

Рис. 2.33



Высоты

Рис. 2.34

5. **Высотой треугольника** (AA_1, BB_1, CC_1, рис. 2.34), проведенной из вершины треугольника, называется перпендикуляр, проведенный из этой вершины к прямой, содержащей противоположную сторону.

25. ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИМЕНЕНИЯ СВОЙСТВА ЖЕСТКОСТИ ТРЕУГОЛЬНИКА.

а) б) в)

Рис. 2.35

Землянин. Треугольник – *жесткая* фигура. Если возьмем три деревянные или металлические планки и скрепим их концы (рис. 2.35а), то обнаружим, что изменить форму и размеры треугольника уже нельзя. Этим пользуются в технических конструкциях (рис. 2.35б-в).

26. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И АКСИОМА РАВНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ.

6. **Треугольники называются равными**, если их соответственные стороны и углы равны (рис. 2.36).

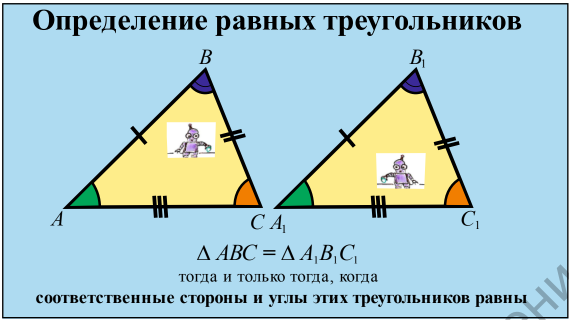


Рис. 2.36

Обозначение: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ – треугольник ABC равен треугольнику $A_1B_1C_1$

Кратко определение равенства треугольников можно записать таким образом:

$$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} AB = A_1B_1,\ BC = B_1C_1,\ AC = A_1C_1, \\ \angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1,\ \angle C = \angle C_1. \end{cases}$$

Читается эта запись так: «Треугольник ABC равен треугольнику $A_1B_1C_1$ тогда и только тогда, когда $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$, $AC=A_1C_1$, $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, $\angle C=\angle C_1$».

АКСИОМА V О РАВЕНСТВЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ. Признаки равенства треугольников особенно часто используются при доказательстве теорем и решении задач. Оказывается для того, чтобы треугольники были равны не требуется выполнения всех шести равенств (трех для сторон и трех для углов), или «накладывание» одного треугольника на другой. Убедимся в этом на примере 1-го признака равенства треугольников, который примем в качестве **аксиомы**.

V (аксиома: первый признак равенства треугольников). **Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого, то такие треугольники равны** (рис. 2.37).

С помощью обозначений аксиому о равенстве треугольников можно записать таким образом: $(AB = A_1B_1,\ AC = A_1C_1,\ \angle A = \angle A_1) \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

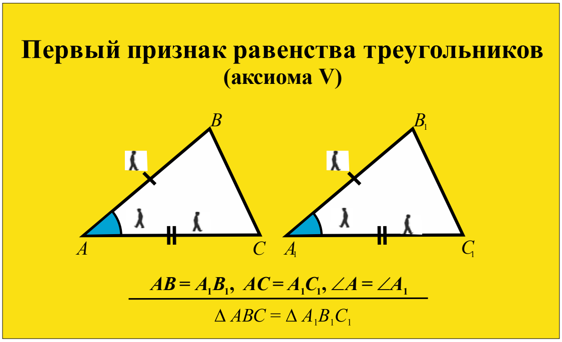


Рис. 2.37

Следствие. *В равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы, против равных углов лежат равные стороны*.

27. ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ НА ПРИМЕНЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАВНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ.

Задачи. 1. С помощью линейки, транспортира и циркуля постройте треугольник по двум сторонам b и c (рис. 2.38) и углу A между ними, равному 65°.

Решение. С помощью транспортира строим $\angle A = 65°$. Циркулем на одной стороне угла откладываем отрезок $AC = b$. На другой стороне угла откладываем отрезок $AB = c$. Строим отрезок BC. ΔABC – искомый.

Землянин. Первая сторона угла может выбираться как угодно (не обязательно горизонтально). Могут получаться треугольники по-разному расположенные на плоскости. Аксиома 5 гарантирует, что все такие треугольники будут равны между собой. В задачах на построение равные фигуры считаются как одно решение и говорят, что задача на построение имеет единственное решение.

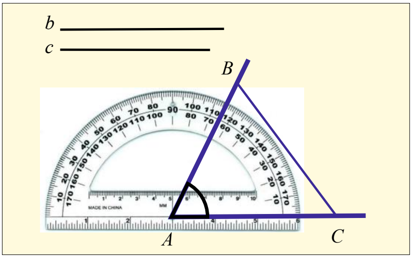
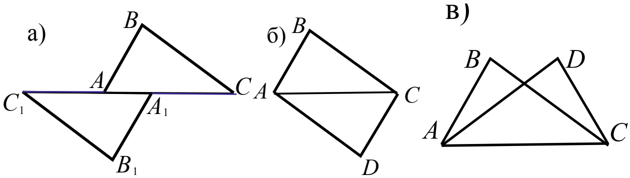


Рис. 2.38

2. а) Дано: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ (рис. 2.39а). Докажите, что $C_1A = A_1C$.

б) Дано: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ (см. рис. 2.39а). Докажите, что $\angle C_1AB = \angle CA_1B$.



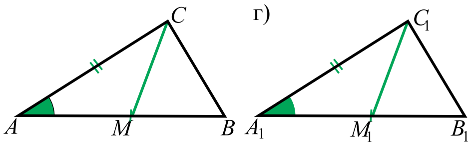


Рис. 2.39

3. Дано: $\Delta ABC = \Delta CDA$ (рис. 2.39б). Найдите равные стороны и углы.

4. Дано: $\Delta ABC = \Delta CDA$ (рис. 2.39в). Докажите, что $\angle BAD = \angle DCB$.

28. ПРИМЕНЕНИЕ 1-ГО ПРИЗНАКА РАВНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ.

5. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, проведены медианы CM и C_1M_1 (рис. 2.39г). Докажите, что: а) $\Delta ACM = \Delta A_1C_1M_1$; б) $CM = C_1M_1$.

Доказательство. а) Так как $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, то по 1-му признаку равенства треугольников (аксиоме V) $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$. Так как CM и C_1M_1 – соответственные медианы этих треугольников (M и M_1 – середины сторон AB и A_1B_1) и $AB = A_1B_1$, то $AM = A_1M_1$. Так как в треугольниках ACM и $A_1C_1M_1$ $AC = A_1C_1$, $AM = A_1M_1$ и $\angle A = \angle A_1$, то эти треугольники равны (первое требование задачи доказано).

б) Из равенства $\Delta ACM = \Delta A_1C_1M_1$ следует, что $CM=C_1M_1$ (второе требование задачи доказано).

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ МАТЕРИАЛ О РАВЕНСТВЕ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ФИГУР. С помощью равенства треугольников можно ввести равенство произвольных фигур.

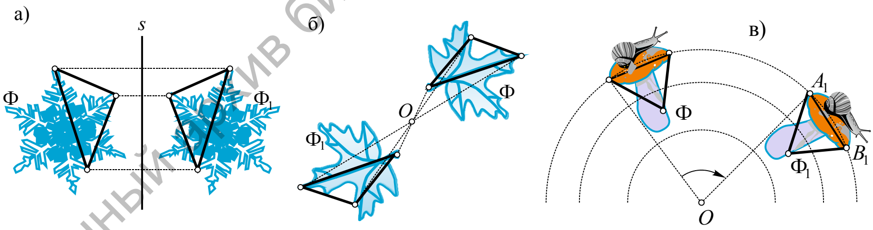


Рис. 2.40

Определение. Любые две фигуры называются **равными**, если между их точками можно установить взаимное и однозначное соответствие, при котором треугольники, соединяющие соответственные точки этих фигур, равны между собой.

Различные примеры равных фигур Ф и $Ф_1$ (на примере окружающей среды) приведены на рисунке 2.40. Равны две окружности с равными радиусами, два квадрата с равной стороной, знакомые вам из начальных классов два прямоугольника с равными сторонами и т.д. Но треугольник не может быть равным квадрату или окружности, квадрат не может быть равным окружности, не могут быть равными и две окружности с разными по длине радиусами, любая плоская фигура не может быть равна пространственной и т.д.

Интерактивные задания для коллективного выполнения

Задания 1а–д для устного выполнения. В задаче 2 – разберите приведенное доказательство.

1. а) Сформулируйте определения, приводимые в данном параграфе.

б) Что означает свойство треугольника быть жесткой фигурой?

в) Треугольники ABC и NMR равны. Назовите соответственные равные стороны и углы этих треугольников (пользуйтесь приведенными обозначениями треугольников).

г) Сформулируйте и поясните на рисунке 1-й признак равенства треугольников.

д) Может ли остроугольный треугольник быть равным тупоугольному треугольнику?

2. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, проведены медианы CM и C_1M_1 (см. рис. 2.37г). Докажите, что: $\angle ACM = \angle A_1C_1M_1$.

Доказательство. В задаче 5а (в теоретической части) доказано, что $\Delta ACM = \Delta A_1C_1M_1$. Из равенства этих треугольников следует, что $\angle ACB = \angle A_1C_1B_1$ (первое требование задачи доказано).

2.3. ПОСТРОЕНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА ТЕМЫ 2 «ВНЕШНИЙ УГОЛ ТРЕУГОЛЬНИКА. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ И ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ. СУММА УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА»

Внешний угол треугольника. Неравенство внешнего угла треугольника

Накрест лежащие и односторонние углы

Единственность перпендикулярной прямой

Признаки параллельности прямых

Аксиома, признаки и свойства параллельных прямых

Сумма углов треугольника. Равенство для внешнего угла треугольника

2.3.1. ВНЕШНИЙ УГОЛ ТРЕУГОЛЬНИКА. НЕРАВЕНСТВО ВНЕШНЕГО УГЛА ТРЕУГОЛЬНИКА. НАКРЕСТ ЛЕЖАЩИЕ И ОДНОСТОРОННИЕ УГЛЫ

Методические особенности содержания параграфа. Данный параграф посвящен одной из ключевых теорем, играющей особую роль в рационализации ЛМС геометрии – **теореме о внешнем угле треугольника**. Раннее введение теоремы о внешнем угле треугольника осуществлено еще в «Началах» Евклида. Однако школьные учебники, к сожалению, не всегда используют преимущества раннего введения этой теоремы. В дальнейшем покажем, как это положение можно исправить. Доказательство этой теоремы проводится с помощью первого признака равенства треугольников. Принята следующая структура параграфа: определения внешних и внутренних углов треугольника; накрест лежащие и односторонние углы (экономное изложение обеспечено тем, что обошлись только внутренними накрест лежащими и односторонними углами, остальные углы при решении задач самостоятельного значения не имеют и легко сводимы к этим двум видам углов); практические применения накрест лежащих углов; теорема о внешнем угле треугольника; интерактивные задания для коллективного выполнения.

2 урока

29. ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВНЕШНЕГО УГЛА ТРЕУГОЛЬНИКА, НАКРЕСТ ЛЕЖАЩИХ И ОДНОСТОРОННИХ УГЛОВ. НЕРАВЕНСТВО ВНЕШНЕГО УГЛА ТРЕУГОЛЬНИКА.

Определения. **1. Внешним углом** треугольника ABC при вершине A (рис. 2.41) называется угол, смежный углу A треугольника.

Углы A, B и C треугольника называются **внутренними его углами**.

Землянин. На рисунках 2.41 показано, что при каждой вершине треугольника можно построить два внешних угла и всего у треугольника шесть внешних углов. Обычно внешние углы берутся по одному при каждой вершине, так как попарно они оказываются равным:

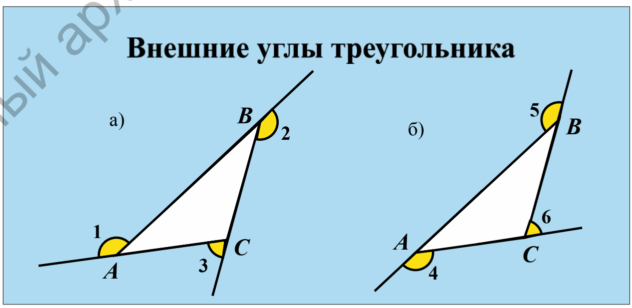


Рис. 2.41

2. Углы CAB и DBA называются:

а) **накрест лежащими углами** (рис. 2.42а), если лучи BC и AD лежат по разные стороны от прямой AB;

б) **односторонними углами** (рис. 2.42б), если лучи BC и AD лежат по одну сторону от прямой AB.

Следствие. *Если накрест лежащие углы равны, то сумма односторонних углов равна* 180°. *И обратно: если сумма односторонних углов равна* 180°, *то накрест лежащие углы равны*.

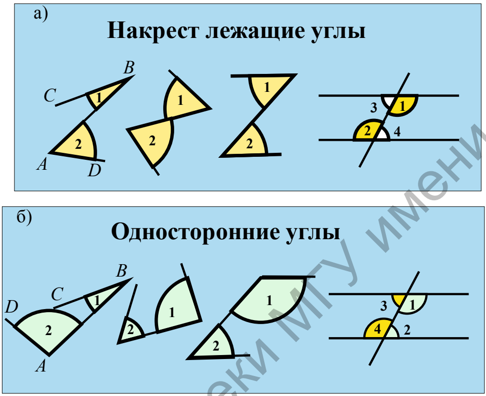
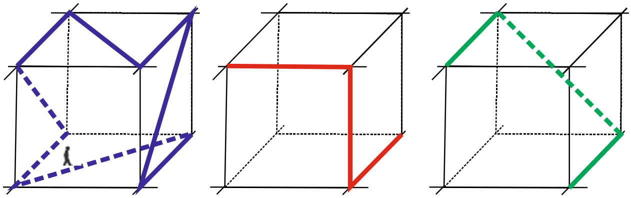
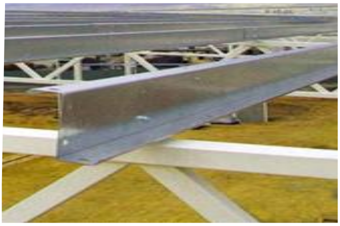


Рис. 2.42

30. ВЫХОД В ПРОСТРАНСТВО. Землянин. Накрест лежащие углы имеют форму буквы Z. С помощью куба можно построить накрест лежащие углы в виде буквы «Z» (рис. 2.43а). Сколько их изображено на этом рисунке? Накрест лежащие углы лежат в одной плоскости. Поэтому углы, показанные на рисунке 2.43б, не являются накрест лежащими (они и на букву «Z» не похожи). Углы, показанные на рисунке 2.43в, являются односторонними. Они тоже, как и накрест лежащие углы, лежат в одной плоскости. В современном строительстве используют металлические Z-образные профили для крепления конструкций, содержащих параллельные плоские поверхности (рис. 2.43г).



а) б) в)



г)

Рис. 2.43

31. НЕРАВЕНСТВО ВНЕШНЕГО УГЛА ТРЕУГОЛЬНИКА – ОДНО ИЗ ВАЖНЕЙШИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ.

Теорема о внешнем угле треугольника способна упростить доказательства ряда крупных теорем.

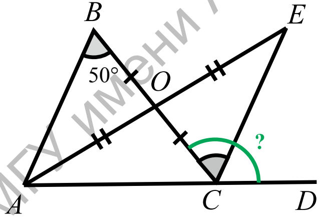


Рис. 2.44

Познакомимся с этой теоремой вначале на вспомогательной задаче.

Вспомогательная задача. Точка O середина отрезков BC и AE, $\angle B = 50°$. Докажите, что $\angle BCD > 50°$ (рис. 2.44).

Доказательство. $\Delta ABO = \Delta ECO$ (по 1-му признаку). Из равенства этих треугольников следует, что $\angle B = \angle ECO$. Так как угол B равен части угла BCD, то $\angle BCD > 50°$.

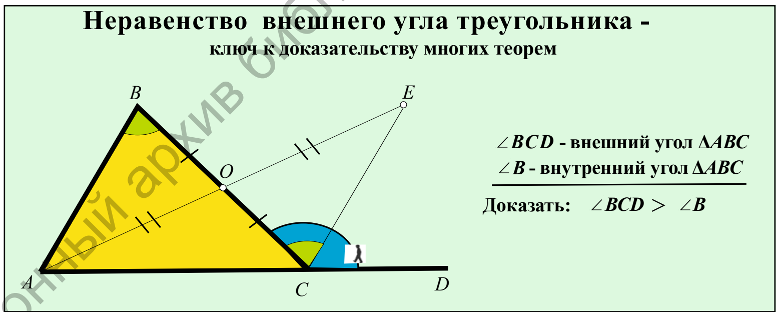


Рис. 2.45

Теорема 3 (*неравенство внешнего угла треугольника*). **Внешний угол треугольника больше каждого внутреннего угла, не смежного с ним** (рис. 2.45)**.**

Доказательство. Докажем (как и в предыдущей задаче), что внешний угол BCD больше угла B. Для этого возьмем точку O – середину стороны

BC, проведем отрезок *AO*, продолжим его и на продолжении отложим отрезок *OE*, равный отрезку *AO*, затем проведем отрезок *CE*.

По 1-му признаку равенства треугольников $\Delta OBA = \Delta OCE$ (так как $OB = OC$, $OA = OE$ и $\angle BOA = \angle COE$). Из равенства треугольников следует, что $\angle B = \angle OCE$.

Так как часть внешнего угла *BCD* равна углу *B*, то $\angle BCD > \angle B$.

Аналогично доказывается, что $\angle BCD > \angle A$.

Задачи.

1. Внешний угол в 3 раза больше угла треугольника, смежного с ним. Найдите эти углы.

Ответ. 45°, 135°.

2. Внешний угол треугольника больше одного из внутренних углов на 50° и в 3 раза больше этого же угла. Найдите внутренний угол треугольника, смежный с данным внешним углом.

Ответ. 105°.

3. Внутренние углы треугольника сложили с внешними его углами, взятыми по одному при каждой вершине. Чему равна эта сумма?

Ответ. 540°.

Интерактивные задания для коллективного выполнения

1. а) Нарисуйте накрест лежащие и односторонние углы;

б) Нарисуйте внешние углы треугольника. Сколько внешних углов в треугольнике?

в) **Землянин.** Сформулируйте и поясните на рисунке теорему о неравенстве внешнего угла треугольника.

2. Внутренние углы треугольника относятся как 1:2:3, а внешние углы относятся как 5:4:3. Найдите эти углы.

Решение. Обозначим величины внутренних углов как α, 2α, 3α. Соответствующие им внешние углы будут равны 180°–α (наибольший угол), 180°–2α, 180°–3α (наименьший угол). Отношение наибольшего внешнего угла к наименьшему равно 5:3. Поэтому

$$\frac{180° - \alpha}{180° - 3\alpha} = \frac{5}{3}, \quad \alpha = 30°.$$

Тогда внутренние углы треугольника равны 30°, 60°, 90°, а внешние углы равны 150°, 120°, 90°.

Ответ. 30°, 60°, 90°; 150°, 120°, 90°.

3. Найдите сумму внутренних углов треугольника из предыдущей задачи и сумму внешних его углов.

Ответ. 180°, 360°.

2.3.2. ЕДИНСТВЕННОСТЬ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОЙ ПРЯМОЙ. ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПРЯМЫХ

Методические особенности содержания параграфа. Этот параграф показывает, что в принятой ЛМС теорема о внешнем угле треугольника является ключевой теоремой, позволяющей максимально упростить доказательства других ключевых теорем, рассмотреть их в непосредственной близости друг от друга, организовать своего рода «парад» важнейших теорем. Сказанное относится, в частности, к доказательству теоремы о единственности прямой, проходящей через данную точку к данной прямой, которое, как известно, вызывает традиционные затруднения. Приводятся краткие сведения о теореме, обратной теореме, методе от противного. Принята следующая структура параграфа: определение параллельных прямых, сведения о теореме, обратной теореме, методе от противного; теоремы: через данную точку A можно провести единственную прямую, перпендикулярную данной прямой a, две прямые, перпендикулярные к одной прямой, параллельны, если при пересечении двух прямых секущей: а) накрест лежащие углы равны, или б) сумма односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны; примеры решения задач; интерактивные задания для коллективного выполнения. Параграф разбит на пункты 32–35.

2 урока

32. СВЕДЕНИЯ, НЕОБХОДИМЫЕ ВСЕГДА! О ТЕОРЕМЕ, ОБРАТНОЙ ТЕОРЕМЕ И МЕТОДЕ ОТ ПРОТИВНОГО. Мы уже знаем, что математическая теория состоит из определений, аксиом и теорем и их доказательств. Определения не доказываются, потому что в них дается **название** тому или иному математическому понятию и первые свойства этого понятия (в этом смысле определения схожи с аксиомами и теоремами). Аксиомы не доказываются, потому что они служат **самыми первыми математическими предложениями**, для них нет каких-либо предшествующих им математических предложений, с помощью которых аксиомы могли бы быть доказаны. Аксиомы необходимы как основа для доказательства других предложений – теорем. Теоремы, напротив, к исходным предложениям не относятся, так как их **можно доказать** при помощи ранее введенных аксиом и определений. В данной работе отобраны только самые основные теоремы. Теорему символически можно записать следующим образом: $A \Rightarrow B$. (1) Эта запись читается: «**Если *A*, то *B***». A является **условием** теоремы (то, что дано в теореме), B – **заключением** теоремы (то, что нужно доказать в данных условиях). Если условие и заключение теоремы поменять местами, то получим новое предложение. Если оно окажется истинным, то оно является теоремой, которая называется **обратной теоремой** (по отношению к первоначальной, **прямой теореме**).

Понятие о методе от противного. При доказательстве теоремы $A \Rightarrow B$ часто используется **МЕТОД ОТ ПРОТИВНОГО**. Суть его такова.

1. Делают допущение, что **из *A* не следует *B***: $A \nRightarrow B$.

2. Допущение $A \nRightarrow B$ заменяют равносильным предложением **«*A* и не *B*»,** где *A* – условие данной, доказываемой теоремы, а «не *B*» – отрицание заключения данной теоремы. Равносильность такой замены доказывается в логике. Отрицание заключения теоремы обычно строится следующим образом: «Нам надо доказать то-то, допустим, что оно **не является справедливым (не имеет места) …**».

3. Из ***A* и «не *B*»** делаются правильные логические выводы до тех пор пока не получим **противоречие** с некоторым ранее известным предложением (иногда с условием *A*).

4. Поскольку рассуждения логически были правильными, то противоречие получилось из-за сделанного допущения. Значит, допущение $A \nRightarrow B$ **является неверным**, поэтому **истинной является теорема $A \Rightarrow B$.**

Метод от противного применяется в тех случаях, когда без него невозможно обойтись, или когда он дает более простое доказательство. Иногда одна и та же теорема может быть доказана прямым доказательством и методом от противного.

Неоднократные примеры применения метода от противного встретятся нам уже в следующем пункте.

33. «БОЛЬШОЙ ПАРАД» ЗНАМЕНИТЫХ ТЕОРЕМ. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ОТ ПРОТИВНОГО.

Землянин. Следующие теоремы играют исключительно большую роль в построении геометрии. Построения, которые делаются, следуя методу от противного, на рисунке и в тексте доказательства для наглядности выделяются красным, «предупреждающим» цветом.

Вспомогательная задача (учимся видеть противоречие). Два ученика измеряли углы и получили такие результаты: $\angle DAB = 46°$, $\angle DCB = 46°$ (рис. 2.46а). Нет ли противоречия в результатах измерений?

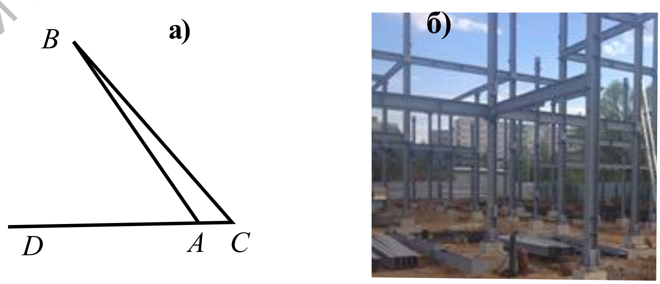


Рис. 2.46

Решение. **Противоречие есть.** Один из углов внешний угол треугольника, другой – внутренний угол. Они не могут быть равными, так как внешний угол всегда больше внутреннего угла, не смежного с ним.

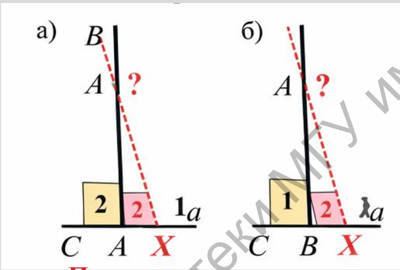
Определения. 1. Две прямые называются **параллельными**, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются. Иногда две совпавшие прямые также считаются параллельными.

2. Две прямые называются **перпендикулярными**, если они пересекаются под прямым углом.

Землянин. Примеры параллельных и перпендикулярных прямых в строительной практике приведены на рисунке 2.46б.

«Большой парад» знаменитых теорем

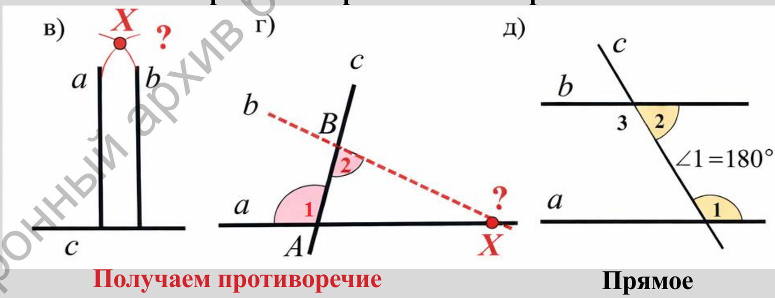
Единственность перпендикулярной прямой



Получаем противоречие

с аксиомой откладывания угла	со свойством внешнего угла треугольника

Признаки параллельности прямых



Получаем противоречие

с единственностью перпендикулярной прямой	с неравенством внешнего угла треугольника

Прямое доказательство
(без метода от противного)

Рис. 2.47

Теоремы: 4. **Через данную точку** A **можно провести единственную прямую, перпендикулярную данной прямой** a.

5 (*первый признак параллельности*). **Две прямые, перпендикулярные к одной прямой, параллельны.**

6 (*второй и третий признаки параллельности*). **Если при пересечении двух прямых секущей: а) накрест лежащие углы равны,** или **б) сумма односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны.**

Доказательства. **4.** 1-*й случай:* $A \in a$ (рис. 2.46а). Доказательство сводится **к противоречию с аксиомой откладывания угла.**

2-*й случай:* $A \notin a$ (рис.2.6б). Допустим, что существуют две прямые AB и AX, перпендикулярные к прямой a. Тогда получим, что внешний угол ($\angle 1$) треугольника ABX равен внутреннему углу 2 этого треугольника, что **противоречит теореме о внешнем угле треугольника.** Значит, и в этом случае прямая, перпендикулярная к данной прямой и проходящая через данную точку, может быть только одна.

5. Если допустить, что прямые a и b пересекутся в некоторой точке X (рис. 2.46в), то придем к **противоречию с предыдущей теоремой**. Поэтому прямые a и b не пересекаются, а значит, они параллельны.

6. **а)** Пусть накрест лежащие углы 1 и 2 равны (рис. 2.46г). Докажем, что $a \parallel b$. Если допустить, что прямые a и b пересекаются, то получим ΔABX, для которого $\angle 2$ является внешним, а $\angle 1$ – внутренним, не смежным с внешним. По теореме 2 $\angle 2 > \angle 1$ и, значит, $\angle 2 \neq \angle 1$. Получили **противоречие с условием теоремы**. Следовательно, допущение неверно и $a \parallel b$.

б) Пусть теперь сумма односторонних углов 1 и 2 равна 180° (рис. 2.46д). Докажем, что $a \parallel b$. В этом случае

$\angle 1 + \angle 2 = 180°$ (по условию),

$\angle 3 + \angle 2 = 180°$ (по теореме о сумме смежных углов).

Отсюда следует, что накрест лежащие углы 1 и 3 равны. Тогда по теореме 3а $a \parallel b$.

34. ВЫХОД В ПРОСТРАНСТВО. Теорема 4 о единственности прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно к данной прямой, является исключительно планиметрической теоремой. В стереометрии она не имеет места. В стереометрии, например, через точку $A \in a$ можно провести столько перпендикулярных прямых к прямой a, сколько через данную прямую можно провести плоскостей. Таких плоскостей можно провести сколько угодно. Поэтому и прямых, проходящих через точку $A \in a$ перпендикулярно прямой a, можно провести также сколько угодно. На рисунке 2.48а (представьте его как развернутую книгу) даны прямая a и точка $A \in a$. Через прямую a проведены плоскости $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. В каждой плоскости через точку A проведены прямые b_1, b_2, b_3, b_4, перпендикулярные к прямой a.

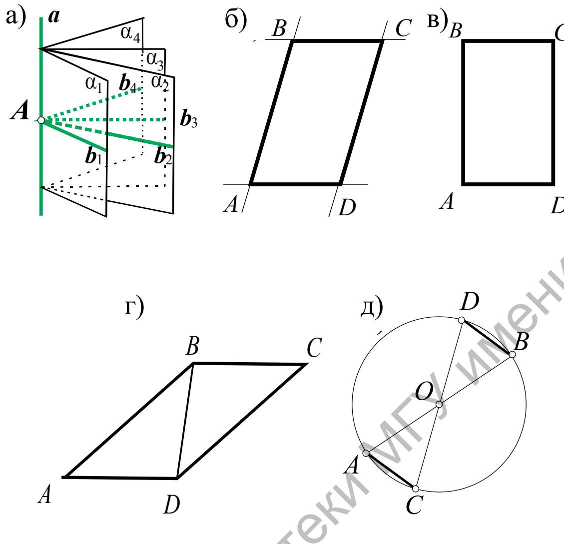


Рис. 2.48

35. ЗАДАЧИ. Если одну пару параллельных прямых пересечем другой парой параллельных прямых, то при пересечении их образуется четырехугольник, который называется **параллелограммом** (рис. 2.48б). Многие другие четырехугольники являются частными случаями параллелограмма (прямоугольник, квадрат, ромб). В частности, **прямоугольник** (рис. 2.48в) это параллелограмм, у которого углы прямые.

1. Треугольники ABD и BCD приложены друг к другу так, как показано на рисунке 2.48г. В этих треугольниках $\angle ABD = \angle BDC$, $\angle ADB = \angle CBD$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом.

Доказательство. Так как $\angle ABD = \angle BDC$ и эти углы являются накрест лежащими при прямых AB и DC и секущей BD, то $AB \parallel CD$ (1).Так как $\angle ADB = \angle CBD$ и эти углы являются накрест лежащими при прямых AD и BC и секущей BD, то $AD \parallel BC$ (2). Из (1) и (2);следует, что четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм.

2. Докажите, что прямоугольник (рис. 2.48в) является параллелограммом.

Доказательство. Так как в четырехугольнике AB и CD перпендикулярны к AD, то по теореме 5 $AB \parallel DC$. Аналогично доказывается, что $AD \parallel BC$. Значит, прямоугольник $ABCD$ – параллелограмм.

3. В окружности с центром O проведены диаметры AB и CD (рис. 2.48д). Докажите, что хорды AC и BD параллельны (т.е. эти хорды лежат на параллельных прямых).

Доказательство. $\Delta AOC = \Delta BOD$ (почему?). Тогда $\angle A = \angle B$. Углы A и B являются накрест лежащими углами при прямых AC и BD и секущей AB. Поэтому $AC \parallel BD$.

Интерактивные задания для коллективного выполнения

1. В доказательстве каких теорем использовалось неравенство внешнего угла треугольника? Прочитайте соответствующий текст доказательств из учебника. **Землянин**. Попробуйте рассказать его своими словами с помощью рисунка. Не старайтесь заучивать наизусть!

2. Повторите доказательства теорем 4–6. В случае затруднений обращайтесь к учебнику.

3. (устно). Пусть AB и CD – два диаметра окружности (см. рис. 2.48д). Докажите, что $AD \parallel BC$.

2.3.3. АКСИОМА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКИЙ. СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ И СУММА УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА

Методические особенности содержания параграфа. Рассматриваются свойства параллельных прямых, для доказательства которых необходимо первое применение знаменитой аксиомы параллельных прямых. Структура содержания параграфа: определения параллельных прямых и отрезков, аксиома параллельных прямых и первые следствия из неё, историческая справка о Н. И. Лобачевском, свойства параллельных прямых, сумма углов треугольника, примеры решения задач, интерактивные задания для коллективного выполнения. Параграф разбит на пункты 36–43.

4 урока

36. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ОТРЕЗКОВ И ЛУЧЕЙ С ПРЯМОЙ И ДРУГ С ДРУГОМ. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ В ПРОСТРАНСТВЕ (1-й урок). Рассмотрим дополнительные определения, относящиеся к параллельным прямым. Кроме того, для обоснования свойств параллельных прямых потребуется новая аксиома – аксиома параллельных прямых. Два отрезка (луча) называются **параллельными**, если они лежат на параллельных прямых. Отрезок (луч) и прямая называются **параллельными**, если отрезок (луч) лежит на некоторой прямой, параллельной данной прямой.

Примеры. На рисунке 2.49а изображены параллельные прямые a и b и параллельные отрезки AB и CD. Записывают: $a \parallel b$, $AB \parallel CD$, $AB \parallel b$, $CD \parallel a$. Почитайте эти записи со словами «прямая», «отрезок». Существуют различные чертежные инструменты для построения параллельных прямых. Простейшими из них являются линейка и чертежный треугольник (рис. 2.49б).

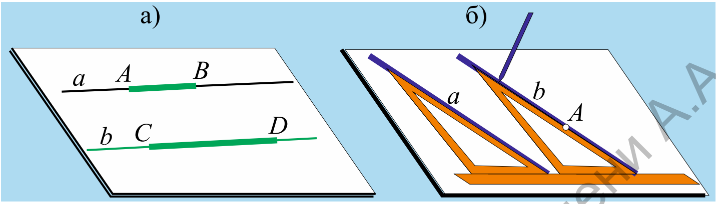


Рис. 2.49

37. ВЫХОД В ПРОСТРАНСТВО. Параллельные прямые часто можно наблюдать в быту, природе, строительстве, технических сооружениях и т.д. На рисунке 2.50 а изображен групповой перелет реактивных самолетов. На рисунке 2.50 б – рельсы и пейзаж около железнодорожного полотна. На этих рисунках нетрудно обнаружить примеры параллельных прямых. На рисунке2.50 в приведено изображение куба и четырех прямых, на которых лежат ребра куба. Эти прямые и ребра, которые на них лежат, попарно параллельны друг другу. В планиметрии и стереометрии на рисунках параллельные отрезки и прямые изображаются параллельными отрезками и прямыми.

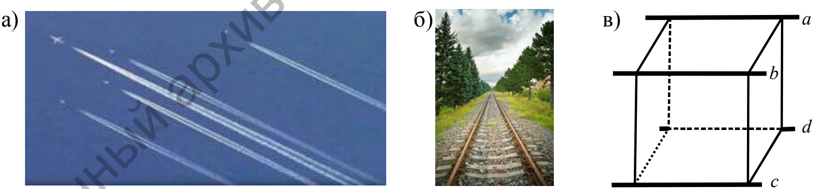


Рис. 2.50

38. ЗНАМЕНИТАЯ АКСИОМА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКИЙ.

VI. Через точку, не лежащую на данной прямой, нельзя провести более одной прямой, параллельной данной прямой.

Землянин. На рисунке 2.51 в плоскости α даны точка A и прямая a. Прямая b проходит через точку A и параллельна прямой a. Аксиома утверждает, что через точку *A* нельзя провести еще какую-либо прямую, отличную от прямой *b*, которая была бы параллельна прямой *a*.

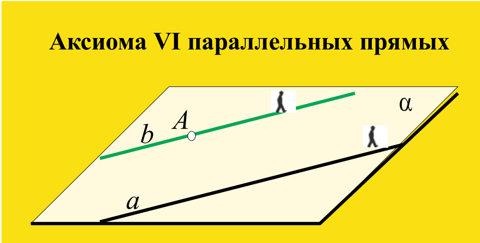
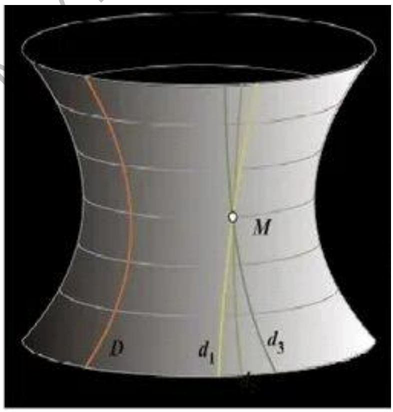


Рис. 2.51

От того, как сформулирована аксиома параллельных прямых, зависит очень многое, даже то, какой получается сама геометрия. Рассмотренная часть геометрии является общей как для геометрии Евклида, так и для геометрии Лобачевского. Далее идет разделение этих геометрий. Отрицание этой аксиомы приводит к новой геометрии, называемой **геометрией Лобачевского**, по имени её создателя знаменитого ученого Н. И. Лобачевского. При жизни ни сам Лобачевский, ни его геометрия не получили признание. Вместо этого Николай Иванович сполна получил разного рода издевательств и насмешек. Петербургские профессора так и не дали ему возможности защитить докторскую диссертацию. Никто не поддержал Лобачевского. Сама судьба пришла на выручку ученого – Лобачевский, став ректором Казанского университета, получил возможность опубликовать свои

Николай Иванович Лобачевский
(1792 – 1856)
Основоположник эпохи неевклидовых геометрий



труды по новой геометрии. Современная физика Вселенной пришла к выводу, что космическое пространство, малую часть которого мы с вами занимаем, хорошо описывается геометрией, которую мы с вами изучаем. В больших масштабах пространство-время под воздействием гравитации со стороны больших космических тел искажается и обладает отрицательной кривизной. Лучи света распространяются по линиям, изображенным на приведенной ниже поверхности. И именно геометрия Лобачевского описывает такое пространство. По мере освоения глубин космического пространства геометрия Лобачевского будет все больше и больше востребованной. Но уже сейчас геометрия Лобачевского расширила представление о реальном космическом пространстве, нашла различные практические применения. После работ Лобачевского астрономам, например, пришлось пересчитать заново все расстояния между звездами. Запоздалое признание геометрии Лобачевского вызвало настоящую революцию в геометрии. Появился целый «букет» неевклидовых геометрий. Однако, пальма первенства принадлежит Н.И. Лобачевскому, и он по праву является первопроходцем, основоположником эпохи неевклидовых геометрий. Приведем стихотворение о геометрии Лобачевского (с сокращениями по источнику: «Квант», 1980, № 8).

И стояла геометрия Евклида,
Как египетское чудо-пирамида.
Строже выдумать строенья невозможно,
Лишь одна была в ней глыба ненадёжна.
Аксиома параллельных.
Разгадать её загадку не сумели.

И подумал Лобачевский:
«Но ведь связана
С природой аксиома!
Мы природу понимаем
По-земному.
Во Вселенной расстоянья неземные,
Могут действовать законы там иные! …

Там, где звёздный мир
Раскинулся без края, –
Аксиома параллелей
там другая!
С одной параллельной
геометрия Евклида.
Есть ещё одна –
Совсем другого вида.

39. СЛЕДСТВИЯ ИЗ АКСИОМЫ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ (2-й урок):

1. *Если прямая пересекает одну из параллельных прямых, то она пересечет и вторую параллельную прямую*.

2. *Если прямая перпендикулярна к одной из параллельных прямых, то она пересечет вторую параллельную прямую*.

3. *Если* $a \parallel b$ *и* $b \parallel c$, *то* $a \parallel c$.

4. *Если прямая пересекает одну из сторон треугольника и параллельна другой стороне, то она пересечет третью сторону треугольника*.

Доказательства. **1.** Воспользуемся методом от противного: допустим, что **прямая *c* пересекает прямую *b* и не пересекает прямую *a*** (рис. 2.52а). Тогда $c \parallel a$.

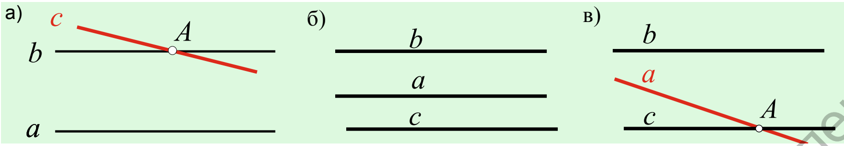


Рис. 2.52

Получаем, что через точку A проходят две прямые b и c, параллельные прямой a.

Это **противоречит аксиоме параллельных прямых**. Полученное противоречие означает, что сделано неверное допущение. Итак, прямая c, пересекая прямую b (одну из параллельных прямых), пересекает и прямую a (другую параллельную прямую).

2. Непосредственно следует из предыдущего следствия.

3. Пусть $a \parallel b$, $b \parallel c$ (рис. 2.52б). Докажем, что $a \parallel c$. **Воспользуемся методом от противного: допустим, что $a \nparallel c$.** Тогда прямые a и c пересекаются в некоторой точке A (рис. 2.52в). Через точку A проходят две прямые a и c, параллельные прямой b. Это **противоречит аксиоме параллельных прямых**. Следовательно, допущение о том, что $a \nparallel c$, неверно, значит, $a \parallel c$.

4. Непосредственно следует из аксиомы о разбиении плоскости прямой на две полуплоскости.

40. СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ.

Землянин. Доказать свойства параллельных прямых без аксиомы параллельных невозможно. Поэтому применение этой аксиомы в следующих доказательствах составляет самую существенную их черту.

Теоремы (*свойства параллельных прямых*):

7. **Если две параллельные прямые пересечены секущей, то:**

а) **Накрест лежащие углы равны;**

б) **Сумма односторонних углов равна 180°.**

Доказательства. **7а.** Пусть $a \parallel b$ и при пересечении этих прямых секущей c образовались накрест лежащие углы 1 и 2 (рис. 2.53а). Докажем методом от противного, что $\angle 1 = \angle 2$. **Допустим, что $\angle 1 \neq \angle 2$.** Отложим $\angle 3$, равный $\angle 2$. На основании признака параллельности прямых: $AC \parallel b$. В результате оказалось, что через точку A проходят две различные (!) прямые a и AC, параллельные прямой b. **Это противоречит**

единственности параллельной прямой. Значит, допущение, что $\angle 1 \neq$ $\neq \angle 2$, неверно. Отсюда $\angle 1 = \angle 2$.

7б. Пусть $a \parallel b$ и при пересечении этих прямых прямой c образовались односторонние углы 2 и 3. Докажем, что $\angle 2 + \angle 3 = 180°$ (рис. 2.53б). В самом деле. Так как $a \parallel b$, то накрест лежащие углы 1 и 2 равны – на основании предыдущей теоремы. Если накрест лежащие углы равны, то сумма односторонних углов равна 180°: $\angle 2 + \angle 3 = 180°$.

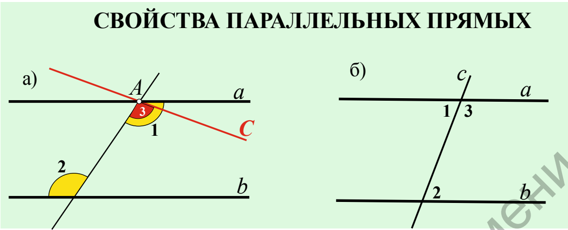


Рис. 2.53

41. ЗАДАЧИ (3-й урок). 1. Докажите, что диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника (рис. 2.54).

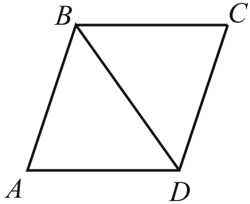


Рис. 2.54

Доказательство. В параллелограмме противоположные стороны параллельны. Так как $AB \parallel DC$, то накрест лежащие углы равны: $\angle ABD =$ $= \angle CDB$. Так как $AD \parallel BC$, то накрест лежащие углы при прямых также равны: $\angle ADB = \angle CBD$. Тогда $\Delta ABD = \Delta CDB$ по стороне и двум прилежащим углам.

2. Докажите, что противоположные углы и стороны параллелограмма равны (см. рис. 2.54).

Дано: $ABCD$ – параллелограмм.

Доказать: 1) $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$; 2) $AB = DC$, $BC = AD$.

Доказательство. Воспользуемся методом равных треугольников: $\Delta ABD = \Delta CDB$ по стороне и двум прилежащим углам (см. предыдущую задачу). Из равенства этих треугольников следует, что $\angle A = \angle C$. Аналогично устанавливается равенство углов B и D (для этого нужно провести другую диагональ). Из равенства треугольников ABD и CDB следует также равенство противоположных сторон параллелограмма.

3. а) На рисунке 2.55абв одни параллельные прямые пересечены другими параллельными прямыми. Найдите углы треугольника и четырехугольника (рис. 2.55аб).

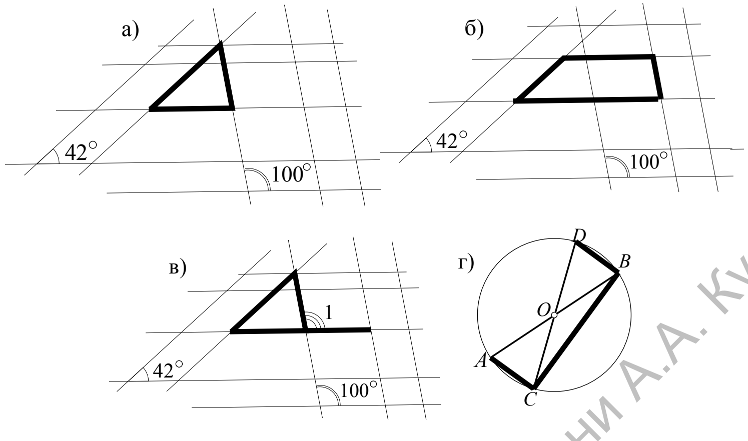


Рис. 2.55

б) Сравните внешний угол треугольника с суммой двух внутренних углов треугольника, не смежных с ним (рис. 2.55в).

в) Пусть AB и CD – диаметры окружности (рис. 2.55г). Докажите, что: 1) $\angle ACB + \angle DBC = 180°$; 2) $\angle ACB = \angle DBC = 90°$.

Доказательства. **1)** Пусть O – центр окружности. Проведем AC, CB и BD. Воспользуемся методом равных треугольников: $\Delta AOC = \Delta BOD$ (по двум сторонам и углу между ними: $OA = OB$, $OC = OD$, $\angle ACB = \angle DBC$). Из равенства этих треугольников следует, что $\angle CAO = \angle DBO$. Из равенства этих треугольников следует, что $AC \parallel BD$. Воспользуемся свойством параллельных прямых: если $AC \parallel BD$, то сумма односторонних углов равна 180°: $\angle ACB + \angle DBC = 180°$.

2) Нетрудно установить, что углы ACB и DBC состоят из равных частей. Поэтому $\angle ACB = \angle DBC = 180°:2 = 90°$.

4. Углы 1 и 2 с соответственно параллельными сторонами равны, если они оба острые или оба тупые (рис. 2.56аб); или в сумме составляют 180°, если один из них острый, а другой тупой (рис. 2.56в).

Доказательство. Если углы 1 и 2 оба острые или тупые, то на основании равенства накрест лежащих углов при параллельных прямых и секущей можно записать: $\angle 1 = \angle 3 = \angle 2$. Отсюда $\angle 1 = \angle 2$. Если, например, угол 1 тупой, а угол 2 острый, то на основании случая б) имеем, что $\angle 1 = \angle 3$. Так как $\angle 3 + \angle 2 = 180°$, то $\angle 1 + \angle 2 = 180°$.

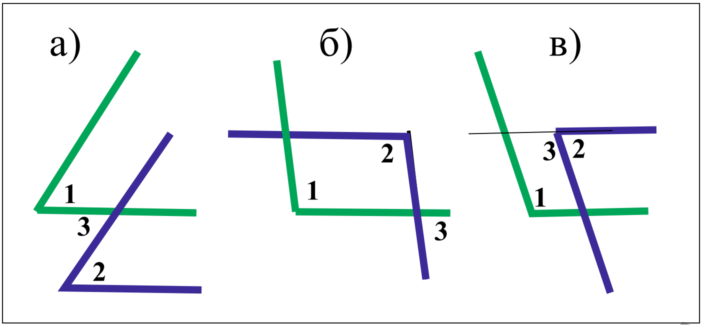


Рис. 2.56

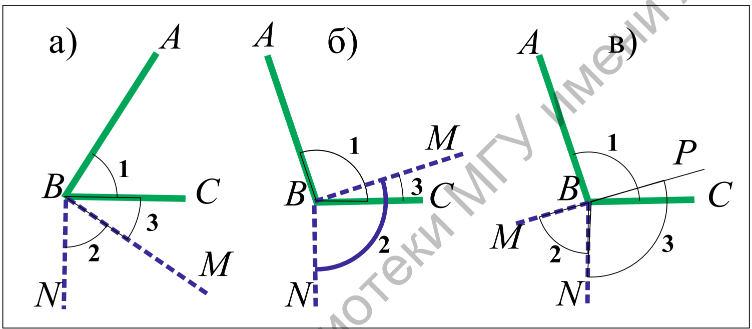


Рис. 2.57

5. Два угла 1 и 2 с соответственно перпендикулярными сторонами равны, если они оба острые или оба тупые (рис. 2.57аб); или в сумме составляют 180°, если один из них острый, а другой тупой (рис. 2.57в).

Доказательство. Если углы 1 и 2 оба острые, то вычтя из прямых углов один и тот же угол 3, получим углы 1 и 2. Значит, $\angle 1 = \angle 2$. Если углы 1 и 2 оба тупые, то прибавив к прямым углам один и тот же угол 3, получим углы 1 и 2. Значит, $\angle 1 = \angle 2$. Если угол 1 тупой, а угол 2 острый, то проведя луч *BP*, дополнительный лучу *BM*, получим угол 3, равный углу 1. Тогда $\angle 1 + \angle 2 = \angle 3 + \angle 2 = 180°$.

42. СУММА УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА. НОВОЕ СВОЙСТВО ВНЕШНЕГО УГЛА ТРЕУГОЛЬНИКА (4-й урок).

Самый известный геометрический опыт. На рисунке 2.58а стрелками показано, что если от картонной модели оторвать два нижних угла треугольника и приложить их к вершине *B*, то опытным путем можно обнаружить данную теорему. Опыт подсказывает и её доказательство.

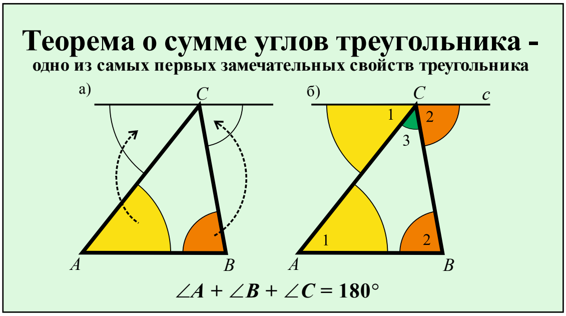


Рис. 2.58

Теорема 8. **Сумма углов треугольника равна 180°** (рис. 2.58).

Доказательство. Через вершину C (рис. 2.58б) проведем прямую c, параллельную стороне AB. Так как $c \parallel AB$, и $\angle 1$ и $\angle A$, $\angle 2$ и $\angle B$ – накрест лежащие, то $\angle A = \angle 1$, $\angle B = \angle 2$. Поэтому $\angle A + \angle B + \angle C = \angle 1 + \angle 2 + \angle C = 180°$.

Следствие. *Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.*

43. ЗАДАЧИ. 1 **(Практическое применение: уголковый отражатель).** Уголковые отражатели обычно используются для точного измерения расстояний (до Луны; топографической съёмке, строительстве). Возврат излучения точно назад используется: с целью обнаружения ложных целей, ловушек радиоэлектронной борьбы, повышения заметности навигационных знаков для радиолокаторов судов и т.п. В устройстве уголкового отражателя имеются два перпендикулярно расположенных зеркала OA и OB (рис. 2.59а), любой луч света (в том числе лазера), под каким бы углом α он не падал на эти зеркала, отражается строго в противоположном направлении. Это нетрудно установить с помощью:

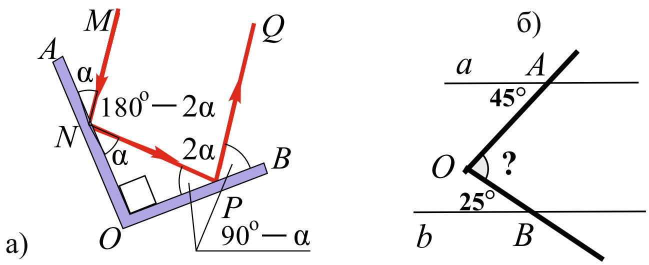


Рис. 2.59

а) физического закона – угол падения луча света равен углу отражения;

б) аксиомы о мере развернутого угла, теоремы о сумме углов треугольника и признака параллельности двух прямых. В самом деле. Если $\angle MNA = \angle PNO = \alpha$, то $\angle MNP = 180° - 2\alpha$. Кроме того, по теореме о сумме углов треугольника $\angle NPO = 90° - \alpha$. Тогда $\angle QPB = 90° - \alpha$ и $\angle NPQ = 180° - 2(90° - \alpha) = 2\alpha$. Так как $\angle MNP + \angle NPQ = (180° - 2\alpha) = 180°$, то по признаку параллельности прямых $MN \parallel PQ$.

2. Углы треугольника относятся как 2:3:5. Найдите эти углы. Какое уравнение надо составить?

Землянин. Решение задачи сводится к составлению и решению уравнения $2x + 3x + 5x = 180°$, где через $2x$, $3x$ и $5x$ – обозначены искомые величины углов.

Ответ: 36°, 54°, 90°.

3. Один угол треугольника равен 25°. Из двух других углов один на 10° больше другого. Найдите эти углы. Какое уравнение надо составить?

Указание. Обозначим через x меньший из неизвестных углов, тогда можно составить уравнение $x + (x + 10°) + 25° = 180°$. Осталось решить его.

Ответ: 72,5°, 82,5°, 25°.

4. Угол B при вершине произвольного треугольника ABC равен 70°. Биссектрисы углов A и C пересекаются в точке O. Найдите $\angle AOC$.

Объясните следующие действия: 1) $180° - 70° = 110°$; 2) $110° : 2 = 55°$; 3) $180° - 55° = 125°$.

Ответ: 125°.

5. Угол B при вершине остроугольного треугольника ABC равен 70°. Высоты, проведенные из вершин A и C, пересекаются в точке H. Найдите $\angle AHC$.

Объясните следующие действия: 1) $90° - \angle A$; 2) $90° - \angle C$; 3) $(90° - \angle A) + (90° - \angle C) = 180° - (\angle A + \angle C) = 70°$; 4) $180° - 70° = 110°$.

Ответ: 110°.

Интерактивные задания для коллективного выполнения

1. (устно). а) $a \parallel b$, $\angle 1 = 45°$, $\angle 2 = 25°$ (рис. 2.59б). Найдите $\angle AOB$.

Землянин. Возможны три способа. Через точку O надо провести вспомогательную прямую: 1) параллельную данным прямым; 2) перпендикулярную данным прямым; 3) полупрямую, дополнительную к лучу OA. Какой способ проще?

б) В предыдущей задаче величины углов 45° и 25° заменим на произвольные значения α и β. Докажите, что $\angle AOB = \alpha + \beta$.

2. В параллелограмме $ABCD$ (рис. 2.60) проведены два перпендикуляра: $BM \perp AD$ и $BN \perp AB$. Докажите, что $\angle A = \angle C = \angle MBN$.

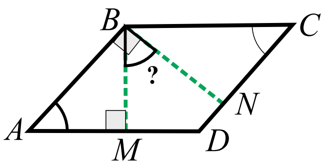


Рис. 2.60

Доказательство. $\angle A = \angle C$ (доказано в задачах 2 и 4 п. 41). Кроме того, $\angle BAM = \angle MBN$ (см. задачу 5 п. 41). Отсюда $\angle A = \angle C = \angle MBN$.

3. Докажите, что сумма внешних углов треугольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360°.

Решение. Обозначим внутренние углы треугольника через α, β, γ. Запишем сумму внешних углов и преобразуем её:

$$(180° - \alpha) + (180° - \beta) + (180° - \gamma) = 540° - (\alpha + \beta + \gamma) = 540° - 180° = 360°.$$

4. Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника параллельна основанию.

Землянин. Сделайте рисунок. Обозначьте углы при основании равнобедренного треугольника буквой α. Тогда по следствию для внешнего угла треугольника внешний угол при вершине треугольника равен 2α. Биссектриса внешнего угла делит его на два равных угла, каждый из которых равен α. Осталось воспользоваться признаком параллельности прямых.

2.4. ПОСТРОЕНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА ТЕМЫ 3 «ВТОРОЙ И ТРЕТИЙ ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ. ТЕОРЕМА ФАЛЕСА – ОСНОВА ШКОЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ»

Второй признак равенства треугольников
Равнобедренный треугольник
Третий признак равенства треугольников
Равенство прямоугольных треугольников
Теорема Фалеса и обратная теорема
Средняя линия треугольника. Точка пересечения медиан треугольника

Методические особенности содержания параграфа. Этот параграф завершает изложение признаков равенства треугольников. Доказательство 2-го признака сводится к 1-му признаку, проводится методом от противного. Для сглаживания скачка трудности и понижения энтропии данного параграфа перед доказательствами 2–3-го признаков приводятся вспомогательные задачи. При доказательстве методом от противного допущение и противоречие выделяются красным цветом (при черно-белой распечатке – более крупным шрифтом). Этими приемами обеспечивается научность изложения без потери доступности. Разумеется, это не исключает необходимость четкого объяснения со стороны учителя, закрепление доказательства, тренировки учащихся в его воспроизведении (что необходимо делать при изучении доказательства любой теоремы, начиная с теоремы 1). Вводится понятие о методе равных треугольников. Расширяется круг задач, решаемых с помощью метода равных треугольников. Структура параграфа: теория (2–3-й признаки равенства треугольников, равенство прямоугольных треугольников – малый парад теорем); метод равных треугольников, примеры решения задач; интерактивные задания для коллективного выполнения.

2.4.1. ВТОРОЙ ПРИЗНАК РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

1 урок

44. ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ 2-ГО ПРИЗНАКА РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ. Вспомогательная задача 1. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 2.61) $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1 = 64°$, $\angle C = \angle C_1 = 85°$. Докажите, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

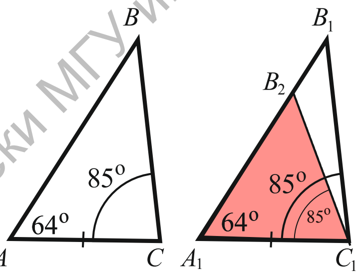


Рис. 2.61

Доказательство. Следуя методу **от противного, допустим, что $AB \neq A_1B_1$**. Тогда на луче A_1B_1 можно отложить отрезок $A_1B_2 = AB$. Получим $\Delta A_1B_2C_1$. На основании 1-го признака равенства треугольников $\Delta ABC = \Delta A_1B_2C_1$. Из их равенства следует, что $\angle C = \angle A_1C_1B_2 = 85°$. Получаем, что $\angle A_1C_1B_2 = \angle A_1C_1B_1 = 85°$, так как они равны одному и тому же углу C. Углы $A_1C_1B_2$ и $A_1C_1B_1$ оба равны 85° и не совпадают (!), что **противоречит аксиоме откладывания угла**. Следовательно, допущение неверно, и поэтому $AB = A_1B_1$.

45. 2-Й ПРИЗНАК РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ.

Теорема 9. **Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника** (рис. 2.62) **соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого, то такие треугольники равны**.

Землянин. Достаточно доказать, что в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$. (Тогда треугольники будут равны по 1-му признаку.)

Доказательство. Выполним следующие рассуждения. Может ли $AB \neq A_1B_1$? Если **допустить, что $AB \neq A_1B_1$**, то к каким выводам можно прийти? Отложим отрезок $A_1B_2 = AB$. Получим треугольник $A_1B_2C_1$. На основании 1-го признака равенства треугольников $\Delta ABC = \Delta A_1B_2C_1$.

Из их равенства следует, что $\angle C = \angle A_1C_1B_2$. Получаем, что $\angle A_1C_1B_2 = \angle A_1C_1B_1$, так как они равны одному и тому же углу C. Углы $A_1C_1B_2$ и $A_1C_1B_1$ равны между собой и не совпадают (!), что **противоречит аксиоме откладывания угла**. Поэтому, **допущение неверно** и, значит, $AB = A_1B_1$. Тогда по 1-му признаку: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

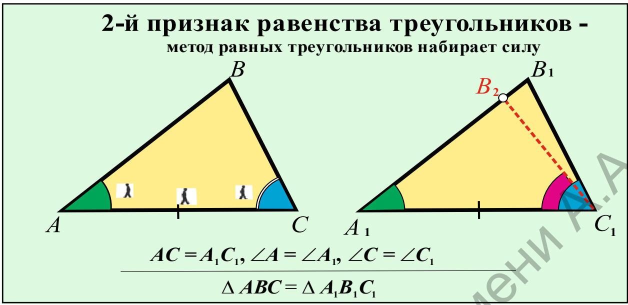


Рис. 2.62

Землянин. 1. Второй признак равенства треугольников часто называют иначе – *«признак равенства треугольников по стороне и двум прилежащим углам»*. Как видно, наножители очень интересуются признаками равенства треугольников!

2. Напомним, что примененный выше метод доказательства называется **методом от противного**. Этот метод каждый раз начинается с отрицания того, что нужно доказать. Отрицание делается не потому, что есть сомнения в истинности теоремы, а потому, что так легче её доказать, показав, что такое отрицание приводит к логическому противоречию. Противоречие показывает ложность отрицания и, следовательно, истинность теоремы.

46. МЕТОД РАВНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ – ИСТОРИЧЕСКИ САМЫЙ ПЕРВЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД. ЗАДАЧИ НА ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РАВНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ. Применение признаков равенства треугольников столь широко, что о нем говорят как о геометрическом методе – **методе равных треугольников**, который состоит в том, что по равенству одних элементов треугольников доказывается равенство самих треугольников, а при помощи их равенства доказывается равенство новых треугольников и их элементов.

С помощью 1-го признака, например, доказывали, что в равных треугольниках соответственные медианы равны. Для доказательства аналогичного предложения для биссектрис требуется 2-й признак.

Задачи. 1. Доказать, что в равных треугольниках биссектрисы, проведенные к соответственным сторонам, равны (рис. 2.63а): $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, BD и B_1D_1 – биссектрисы, доказать, что $BD = B_1D_1$.

Доказательство. Так как $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, то $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. Так как BD и B_1D_1 – биссектрисы и $\angle B = \angle B_1$, $\angle ABD = \angle A_1B_1D_1$. Тогда $\Delta ABD = \Delta A_1B_1D_1$ по стороне и двум прилежащим углам ($AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle ABD = \angle A_1B_1D_1$). Из равенства треугольников следует, что $BD = B_1D_1$.

2 (устно). Пусть $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, BD и B_1D_1, AE и A_1E_1 – их биссектрисы (рис. 2.63б). Докажите, что $\Delta AOB = \Delta A_1O_1B_1$.

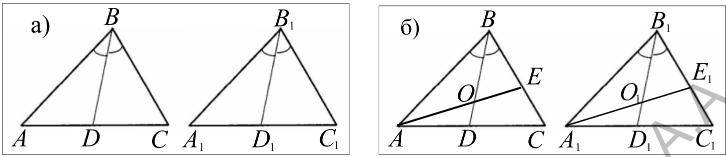


Рис. 2.63

3 (устно)**.** В треугольнике ABC $AB = BC$, BD – медиана (рис. 2.64). Докажите, что BD является биссектрисой и высотой треугольника.

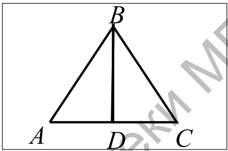


Рис. 2.64

Интерактивные задания для коллективного выполнения

Задания 1–3 выполните устно. Обратите внимание на выполнение задания 4.

1. Поясните, в чем суть метода равных треугольников?
2. Поясните, в чем суть метода от противного?
3. Сформулируйте два признака равенства произвольных треугольников.
4. Выполните рисунок и при его помощи докажите 2-й признак равенства треугольников.

2.4.2. РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК. ТРЕТИЙ ПРИЗНАК РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

2 урока

47. РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК.

Определение. **Равнобедренным треугольником** называется треугольник, у которого хотя бы две стороны равны (рис. 2.65). Равные стороны называются *боковыми*, а третья сторона – *основанием.* Треугольник, у которого все стороны равны, называется **равносторонним**. Равносторонний треугольник – частный случай равнобедренного треугольника.

Теоремы 10. **В равнобедренном треугольнике:**

1. **Углы при основании равны**;

2. **Биссектриса, медиана и высота, проведенные к основанию, совпадают.**

Рис. 2.65 Рис. 2.66

Доказательства. **10.1.** Пусть $AB = BC$ (см. рис. 2.65), BK – биссектриса угла ABC. В треугольниках ABK и CBK $AB = BC$ (по условию), BK – общая сторона, $\angle ABK = \angle CBK$. Тогда по 1-му признаку равенства треугольников $\Delta ABK = \Delta CBK$. Из их равенства следует, что $\angle A = \angle C$.

10.2. Пусть $AB = BC$ (рис. 2.65), BK – биссектриса угла ABC. В треугольниках ABK и CBK $\angle ABK = \angle CBK$ (так как BK – биссектриса угла ABC), кроме того, $\angle A = \angle C$ (по теореме 10.1). Тогда по 2-му признаку $\Delta ABK = \Delta CBK$. Из их равенства следует, что $AK = CK$, $\angle AKB = \angle CKB = = \dfrac{180°}{2} = 90°$ и значит, BK – медиана и высота).

48. ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА (УЧИМСЯ НАХОДИТЬ ПРОТИВОРЕЧИЕ).

Выясните, какое **противоречие возникает, если допустить, что у треугольников *PQR* и *PTR*** (рис. 2.66) **соответственные стороны равны (*PQ* = *PT*, *QR* = *TR*, *PR* – общая), они располагаются по одну сторону от прямой *PR* и не совпадают**.

Решение. Рассмотрим равнобедренные треугольники QPT и QRT и точку O – середину отрезка QT. Получим медианы PO и RO этих треугольников, которые по только что изученному свойству являются высотами этих треугольников. Поэтому $PO \perp QT$, и $RO \perp QT$, что **противоречит теореме о единственности прямой, проходящей через данную точку *O* перпендикулярно к данной прямой *QT*.** Противоречие найдено.

49. 3-Й ПРИЗНАК РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ.

Теорема 11. **Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого, то такие треугольники равны**.

Доказательство 3-го признака равенства треугольников. Пусть $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$. Докажем, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ (рис. 2.67). Для этого достаточно доказать, что $\angle A = \angle A_1$. (Потому, что тогда треугольники будут равны по 1-му признаку.) **Допустим, что $\angle A \neq \angle A_1$** и построим $\angle C_1A_1B_1 = \angle A$, на стороне которого отложим отрезок $A_1B_2 = AB$. Построим отрезок B_2C_1. Получим $\Delta A_1B_2C_1$, равный треугольнику ABC (по 1-му признаку). Тогда $A_1B_2 = A_1B_1$, $C_1B_2 = C_1B_1$ и треугольники $B_1A_1B_2$ и $B_1C_1B_2$ оказываются равнобедренными. Проведем в них биссектрисы к основанию B_1B_2. По теореме 10.2 эти биссектрисы являются медианами и высотами равнобедренных треугольников.

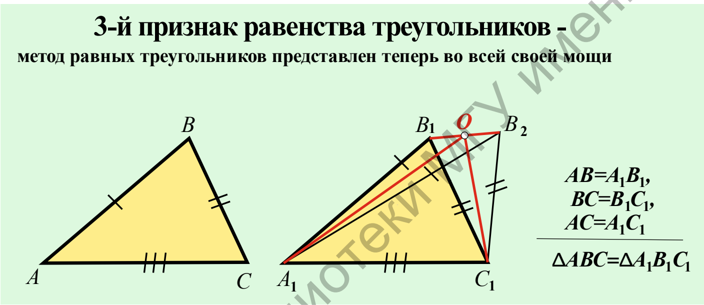


Рис. 2.67

Получили, что через точку O проведены два перпендикуляра к отрезку B_1B_2.

Это противоречит теореме о единственности прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно к данной прямой. Противоречие означает, что **допущение $\angle A \neq \angle A_1$ неверно**. Значит, $\angle A = \angle A_1$ и $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ по 1-му признаку.

50. ЗАДАЧИ. 1. Докажите, что медианы, проведенные к боковым сторонам равнобедренного треугольника, равны.

Доказательство. $MC = NA$ (как половины равных сторон). Тогда $\Delta AMC = \Delta CNA$ по 1-му признаку. Из равенства этих треугольников следует, что медианы AM и CN равны.

2. Докажите, что биссектрисы, проведенные к боковым сторонам равнобедренного треугольника, равны.

Доказательство (рис. 2.68а). Пусть $AB = BC$, AP и CQ – биссектрисы. Докажем, что $AP = CQ$ (рис. 2.68б). Рассмотрим треугольники APC и CQA. В этих треугольниках AC – общая сторона, $\angle C = \angle A$, $\angle PAC = \angle QCA$ (как половины равных углов). Тогда $\Delta APC = \Delta CQA$ по 2-му признаку. Из равенства этих треугольников следует, что биссектрисы AP и CQ равны.

3. Докажите равенство высот, проведенных к боковым сторонам равнобедренного треугольника.

Доказательство. Пусть $AB=BC$, AR и CS – высоты. Докажем, что $AR=CS$ (рис. 2.68в).

Рассмотрим треугольники ARC и CSA. В этих треугольниках AC – общая сторона, $\angle C = \angle A$, $\angle RAC = \angle SCA$ (так как $\angle RAC = 180° - 90° - \angle C$, $\angle SCA = 180° - 90° - \angle A$).

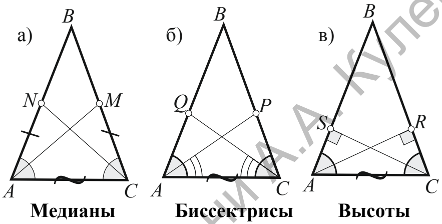


Рис. 2.68

Тогда $\Delta ARC = \Delta CSA$ по 2-му признаку. Из равенства этих треугольников следует, что высоты AR и CS равны.

4. Пусть AB и CD – диаметры окружности с центром O (рис. 2.69а). Докажите, что $\Delta AOC = \Delta BOD$.

Доказательство. Рассмотрим треугольники AOC и BOD. В этих треугольниках $OA = OB$, $OC = OD$ как радиусы окружности, $\angle AOC = \angle BOD$ – как вертикальные. Тогда $\Delta AOC = \Delta BOD$ по 1-му признаку.

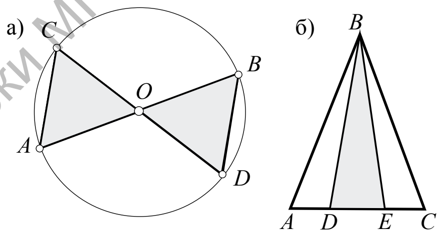


Рис. 2.69

5. На основании AC равнобедренного треугольника ABC (рис. 2.69б) отложили равные. отрезки AD и CE. Докажите, что ΔDBE – равнобедренный.

Доказательство. Требуется доказать, что $BD = BE$. Так как ΔABC – равнобедренный, то $\angle A=\angle C$. Тогда $\Delta ABD = \Delta CBE$ по 1-му признаку ($AB = CB$, $AD = CE$, $\angle A = \angle C$). Из равенства этих треугольников следует, что $BD=BE$. Значит, ΔDBE – равнобедренный.

Интерактивные задания для коллективного выполнения

1. Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Докажите, что $\angle O_1AO_2 = \angle O_1BO_2$.

2. В равнобедренном треугольнике ABC на боковой стороне BC ($BC > AC$) отложили отрезок CD, равный основанию AC. Провели отрезок AD. Докажите, что $\angle C > \angle ADC$.

3. В равнобедренном треугольнике ABC $AB = BC$, $\angle B = 36°$, провели биссектрису AD. Докажите, что $BD = AD = AC$.

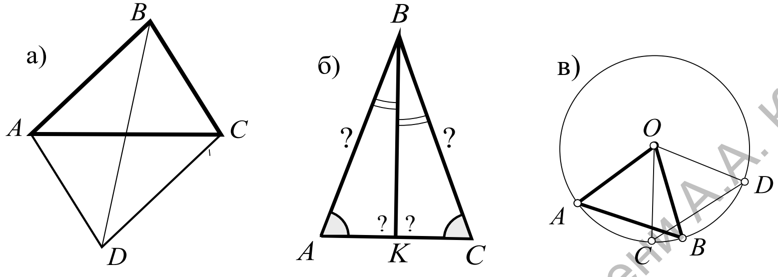


Рис. 2.70

4. Треугольники ABC и CDA приложили друг к другу так, как показано на рисунке 2.70а. Известно, что $\angle BAC = \angle DCA$, $\angle BCA = \angle DAC$. Провели также отрезок BD. Докажите, что $\Delta ABD = \Delta CDB$.

Доказательство. $\Delta ABC = \Delta CDA$ по 2-му признаку (AC – общая сторона, $\angle BAC = \angle DCA$, $\angle BCA = \angle DAC$). Из равенства этих треугольников следует, что $AB = CD$, $BC = AD$. Рассмотрим теперь треугольники ABD и CDB. В этих треугольниках $\angle BAD = \angle BCD$ (эти углы состоят из равных частей). Тогда $\Delta ABD = \Delta CDB$ по 1-му признаку ($AB=CD$, $BC=AD$, $\angle BAD = \angle BCD$).

5. Докажите, что если два угла, прилежащие к одной стороне треугольника, равны, то треугольник равнобедренный.

Доказательство. Дано, что $\angle A = \angle C$. Доказать, что $AB=BC$ (рис. 2.70б). Проведем биссектрису BK, получим два треугольника ABK и CBK. В этих треугольниках $\angle A = \angle C$ (по условию), $\angle ABK = \angle CBK$ (так как BK – биссектриса).

Тогда по теореме о сумме углов треугольника третьи углы также будут равны: $\angle AKB = \angle CKB$. Отсюда следует, что $\Delta ABK = \Delta CBK$ по 2-му признаку (по стороне и двум прилежащим углам) и, значит, $AB=BC$.

6 (устно). Хорды AB и CD равны (рис. 2.70в). Докажите, что $\Delta AOB = \Delta COD$.

2.4.3. РАВЕНСТВО ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

2 урока

51. ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ.

Теоремы 12. **Прямоугольные треугольники равны, если у них равны соответственные:**

1. **Катеты;**
2. **Катет и острый угол;**
3. **Гипотенуза и острый угол;**
4. **Гипотенуза и катет.**

Рис. 2.71

Доказательства (для желающих).

12.1. $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ (рис. 2.71а) по 1-му признаку ($AC=A_1C_1$, $BC=B_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$).

12.2. $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ (рис. 2.71б) по 2-му признаку ($AC=A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$).

12.3. $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ (рис. 2.71в) так же по 2-му признаку, так как $AB=A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$ по условию и, кроме того, $\angle B = \angle B_1$. (В самом деле: $\angle B = 180° - 90° - \angle A = 180° - 90° - \angle A_1 = \angle B_1$).

12.4. Пусть $AB = A_1B_1$ и $AC = A_1C_1$. Докажем, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ (рис. 2.71г). Для этого достаточно доказать, что $CB = C_1B_1$. Допустим, что $CB \neq C_1B_1$ и построим отрезок $C_1B_2 = CB$. Получим два равных треугольника ABC и $A_1B_2C_1$ (они равны по двум катетам). Из равенства треугольников следует, что $A_1B_2 = AB = A_1B_1$. Тогда $\Delta A_1B_1B_2$ равнобедренный и его биссектриса A_1O является высотой и, следовательно, $A_1O \perp C_1B_1$. Получили, что из точки A_1 к прямой C_1B_1 проведены два перпендикуляра A_1C_1 и A_1O, что невозможно. Значит, допущение $CB \neq C_1B_1$ неверно, а верным является равенство катетов CB и C_1B_1. Тогда $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ (по трем сторонам).

52. ЗАДАЧИ. 1. Катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого прямоугольного треугольника (рис. 2.72а). Докажите, что медианы, проведенные к соответственным катетам, равны.

Доказательство. Пусть $AC=A_1C_1$, $BC=B_1C_1$, $\angle C = \angle C_1 = 90°$, AM и A_1M_1 – медианы, проведенные к катетам BC и B_1C_1. Докажем, что $AM = A_1M_1$. Треугольники ACM и $A_1C_1M_1$ равны по двум катетам ($AC = A_1C_1$ по условию, $CM=C_1M_1$ как половины равных катетов BC и B_1C_1). Из равенства этих треугольников следует, что $AM = A_1M_1$. Аналогично доказывается равенство медиан, проведенных к другому катету.

2. Катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого прямоугольного треугольника (рис. 2.72б). Докажите, что медианы, проведенные к соответственным гипотенузам, равны.

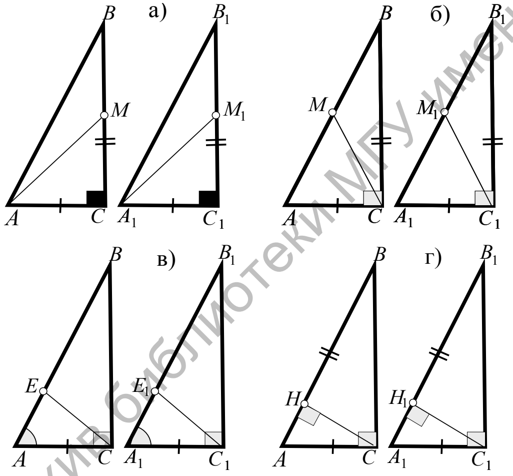


Рис. 2.72

Доказательство. Дано: $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle C = \angle C_1 = 90°$, AM и A_1M_1 – медианы, проведенные к гипотенузам AB и A_1B_1. Докажем, что $CM = C_1M_1$. Имеем: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ по двум катетам. Поэтому $AB = A_1B_1$ и $\angle A = \angle A_1$. $\Delta ACM = \Delta A_1C_1M_1$ по двум сторонам и углу между ними (у них: $AC = A_1C_1$ по условию, $AM = A_1M_1$ как половины равных гипотенуз и $\angle A = \angle A_1$). Поэтому $CM = C_1M_1$.

3. Катет и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и острому углу другого прямоугольного треугольника (рис. 2.72в). Докажите, что биссектрисы, проведенные к соответственным сторонам, равны.

Доказательство.

Дано: $AC=A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, CE и C_1E_1 – биссектрисы, проведенные к гипотенузам.

Докажем, что $CE = C_1E_1$.

Имеем: $\Delta ACE = \Delta A_1C_1E_1$ по двум сторонам и углу между ними (у них: $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, по условию, $\angle ACE = \angle A_1C_1E_1$, как половины прямых углов). Из равенства этих треугольников следует равенство биссектрис: $CE = C_1E_1$.

4. Катет и гипотенуза одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и гипотенузе другого прямоугольного треугольника (рис. 2.72г). Докажите, что высоты, проведенные к соответственным гипотенузам, равны.

Доказательство. Имеем: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ по катету и гипотенузе. Из их равенства следует, что $\angle A = \angle A_1$. Тогда $\Delta ACH = \Delta A_1C_1H_1$ по гипотенузе и острому углу. Из равенства этих треугольников следует равенство высот: $CH = C_1H_1$.

Интерактивные задания для коллективного выполнения

1. Сформулируйте и докажите четыре признака равенства прямоугольных треугольников.

2. Докажите, что диагональ квадрата делит его на два равных прямоугольных равнобедренных треугольника.

3. Докажите, что отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными прямыми, равны.

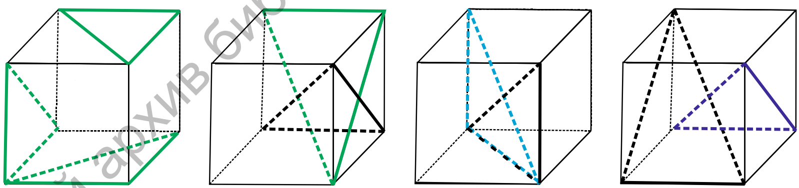


Рис. 2.73

4. Рассмотрите куб. Докажите, что выделенные на рисунке 2.73 треугольники равны.

Землянин. Учтите, что гранями куба являются квадраты.

2.4.4. ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМЫ ФАЛЕСА

1 урок

53. ТЕОРЕМЫ ФАЛЕСА. О важности этих теоремы вы многократно убедитесь в дальнейшем.

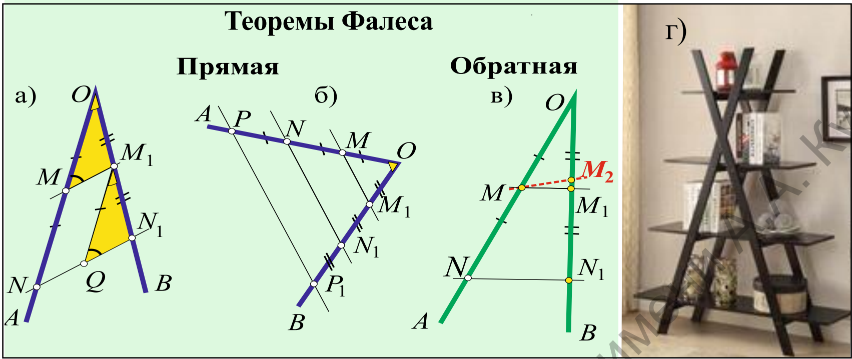


Рис. 2.74

Теоремы: 13 (*теорема Фалеса*). **Если на одной стороне угла последовательно отложить равные отрезки** (рис. 2.74аб) **и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую сторону угла, то они отсекут на этой стороне также равные между собой отрезки.**

14 (*обратная теорема*). **Если на одной стороне угла последовательно отложить равные отрезки и на другой стороне угла так же отложить равные между собой отрезки** (2.74в) **и через соответственные концы этих отрезков провести прямые, то эти прямые параллельны.**

Доказательство. **13**. Пусть на стороне OA угла AOB отложены равные отрезки OM и MN (рис. 2.74а) и через точки M и N проведены параллельные прямые, пересекающие сторону OB угла AOB в точках M_1, N_1. Докажем, что $OM_1 = M_1N_1$. Для доказательства через точки M_1 и N_1 проведем прямые, параллельные стороне OA угла AOB. Получим треугольники OMM_1 и M_1QN_1. Докажем, что эти треугольники равны.

Основная часть доказательства. Соответственные углы этих треугольников равны, как углы с соответственно параллельными сторонами. Кроме того, $OM = M_1Q$ (учли, что отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными прямыми, равны). Тогда $\Delta OMM_1 = \Delta MQN_1$ по стороне и двум прилежащим углам. Из равенства этих треугольников следует, что $OM_1 = M_1N_1$. Аналогичные рассуждения проводятся, если на стороне OA откладывается любое другое количество равных отрезков (рис. 2.74б).

14. Построения. Пусть на стороне OA угла AOB отложены равные отрезки OM и MN (рис. 2.74в) и на стороне OB этого угла также отложены равные между собой отрезки OM_1, M_1N_1. Через концы этих отрезков проведем прямые MM_1, NN_1. Докажем, что $MM_1 \parallel NN_1$. Воспользуемся методом от противного.

Основная часть доказательства. Допустим, например, что $MM_1 \nparallel NN_1$. Тогда через точку M можно провести прямую (отрезок) $MM_2 \parallel NN_1$. По теореме Фалеса должно быть: $OM_2=M_2N_1$. Кроме того, по условию $OM_1=M_2N_1$. Получили, что от точки O на луче OB отложены два разных отрезка, равных одному и тому же отрезку M_2N_1. Это противоречит аксиоме откладывания отрезка. Полученное противоречие означает, что допущение $MM_1 \nparallel NN_1$ неверно и, значит, $MM_1 \parallel NN_1$.

Землянин. В быту, строительстве, технических объектах часто используются лестницы, стеллажи, книжные полки, которые иллюстрируют частный случай теоремы Фалеса, когда на второй стороне угла получаются отрезки, равные отрезкам на первой стороне (рис. 2.74г).

55. ЗАДАЧИ. 1. Разделите данный отрезок OE (рис. 2.75а) на 5 равных частей.

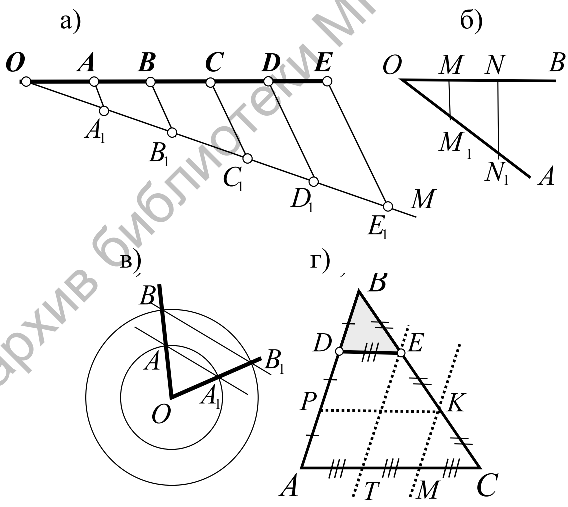


Рис. 2.75

Решение. 1-й способ. Через точку O проведем некоторый луч OM и на этом луче от его вершины O отложим циркулем последовательно 5 равных отрезков OA_1, A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1E_1. Соединим точки E и E_1 отрезком. С помощью линейки и чертежного треугольника проведем прямые D_1D, C_1C, B_1B, A_1A_1, параллельные E_1E. На основании теоремы

Фалеса отрезки OA, AB, BC, CD, DE равны. В итоге отрезок OE разделили на 5 равных частей.

Землянин. 2-й способ. Не совсем удобно много параллельных прямых проводить с помощью линейки и чертежного треугольника (трудно добиться точности построений). Да и рук не хватает для того чтобы держать два чертежных инструмента и карандаш. А если один раз только применить линейку и чертежный треугольник для построения параллельных прямых? Для этого, как и выше, проводим луч OM, циркулем последовательно откладываем на нем отрезки OA_1, A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1E_1. Соединяем точки E и E_1 отрезком. С помощью линейки и чертежного треугольника проводим только одну прямую D_1D, параллельную E_1E. Полученный отрезок ED равен 1/5 отрезка OE. Откладываем циркулем трижды этот отрезок от точки D. В результате отрезок OE будет разделен на 5 равных частей.

3-й способ. Построенный выше отрезок ED можно начинать откладывать на отрезке OE, от точки O.

2 (устно). С помощью рисунка 2.75а проверьте, справедливо ли утверждение: точка C_1 делит отрезок OE_1, в таком же отношении, как точка C делит отрезок OE.

3. Дан $\angle AOB = 45°$ (рис. 2.75б). На его стороне OA отложили отрезки $OM_1 = M_1N_1 = 3$ см. Из точек M_1 и N_1 на луч OB провели перпендикуляры M_1M и N_1N. Докажите, что $OM = MN$ и найдите их длину.

Решение. Так как два перпендикуляра, проведенные к одной прямой, параллельны, то $M_1M \parallel N_1N$. Тогда на основании теоремы Фалеса $OM = MN$. Катет OM нетрудно найти из прямоугольного треугольника по теореме Пифагора: $OM = 3\sqrt{2}/2$. Итак, $OM = MN = 3\sqrt{2}/2$.

4. По рисунку 2.75в самостоятельно докажите, что $AA_1 \parallel BB_1$.

5. Стороны AB и BC треугольника ABC каждая разделены на три равные части (рис. 2.75г): $AB:BD = CB:BE = 3:1$. Докажите, что $AC:DE = AB:BD = CB:BE = 3:1$.

Доказательство. По теореме, обратной теореме Фалеса (применяя её к углу ABC), прямые, проходящие через концы равных отрезков, параллельны: $DE \parallel AC$, $PK \parallel AC$. Далее: через концы горизонтальных отрезков проведем прямые, параллельные AB. Пусть эти прямые пересекут сторону AC в точках T и M. По теореме Фалеса, применяя её к углу C, получим, что $AT = TM = MC$. Учтем, что $DE = AT$ (как отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными прямыми). Тогда $AB:BD = CB:BE = CA:AT = CA:DE = 3:1$.

Интерактивные задания для коллективного выполнения

1. Сформулируйте теорему Фалеса. Что дано в этой теореме, что нужно доказать?

2. Сформулируйте теорему, обратную теореме Фалеса. Что дано в этой теореме, что нужно доказать?

3. На рисунке 2.76 $MM_1 \parallel NN_1$. Найдите отрезки OM_1 и M_1N_1.

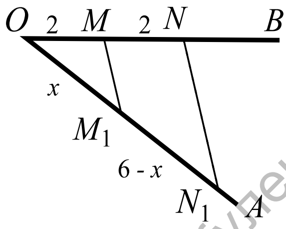


Рис. 2.76

2.4.5. СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА. ТОЧКА ПЕРЕСЕЧЕНИЯ МЕДИАН ТРЕУГОЛЬНИКА

2 урока

54. СВОЙСТВА СРЕДНЕЙ ЛИНИИ И МЕДИАН ТРЕУГОЛЬНИКА.

Определение. **Средней линией треугольника** называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

На рисунке 2.77а изображены три средние линии треугольника *ABC*: *MK, KT, TM*.

Теоремы: 15 (о *средней линии треугольника*). **Средняя линия треугольника, соединяющая середины двух его сторон, параллельна третьей стороне и равна ее половине.**

16 (*о медиане, проведенной к гипотенузе*). **Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна половине гипотенузы.**

17 (*обратная теорема*). **Если медиана равна половине стороны треугольника, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.**

18 (*о точке пересечения медиан*). **Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2:1, считая от вершины треугольника**.

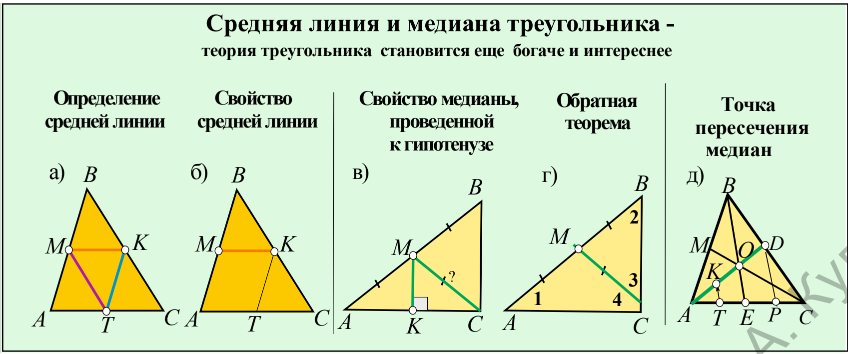


Рис. 2.77

Доказательства. **15.** Пусть MK (рис. 2.77б) – средняя линия треугольника ABC. Докажем, что: а) $MK \parallel AC$; б) $MK = \dfrac{AC}{2}$.

а) Так как $BM = MA$ и $BK = KC$**,** то на основании теоремы, обратной теореме Фалеса, $MK \parallel AC$.

б) Для этого проведем среднюю линию KT. Тогда $KT = TC$. По утверждению а) $KT \parallel AB$. Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными прямыми, равны. Поэтому $MK = AT$. Имеем: $MK = AT = TC = \dfrac{AC}{2}$

16. Докажем данную теорему с помощью теоремы Фалеса. Пусть CM – медиана, проведенная к гипотенузе AB. Докажем, что $MA = MB = MC$ (рис. 2.77в).

Построим MK – высоту треугольника AMC. Так как MK и BC перпендикулярны к AC, то $MK \parallel BC$. К углу BAC применима теорема Фалеса. На её основании $AK = KC$. Тогда $\Delta AMK = \Delta CMK$ (по двум катетам). Из их равенства следует, что $AM = CM$. Отсюда следует, что медиана CM равна половине гипотенузы AB.

17. Пусть медиана CM равна половине стороны AB треугольника ABC (рис. 2.77г). Тогда треугольники AMC и CMB – равнобедренные и $\angle 1 = \angle 4$, $\angle 2 = \angle 3$. Учтем, что сумма всех четырех углов равна 180° (сумме углов треугольника ABC). Поэтому $\angle ACB = \angle 3 + \angle 4 = \angle 1 + \angle 2 = 180° : 2 = 90°$.

18. Пусть AD, BE, CM – медианы. Докажем, что они пересекаются в одной точке O (рис.2.77д). Пусть точка O – точка, в которой медиана BE пересекает медиану AD. Выясним, в каком отношении медиана BE делит медиану AD.

Проведем $DP \parallel BE$. По теореме Фалеса, применяя её к углу C, $PC = PE$. Далее возьмем середину T отрезка AE. В результате отрезок AP разделили на три равные части. Далее проведем $TK \parallel BE$. По теореме Фалеса, применяя её к углу DAP, $AK = KO = OD$. Это означает, что медиана BE разделила медиану AD в отношении 2:1, считая от вершины A.

Аналогично доказывается, что медиана CM делит медиану AD в таком же отношении, т.е. в той же самой точке O. Это означает, что все три медианы пересекаются в одной точке O и делятся ею в отношении 2:1, считая от вершины треугольника.

Следующие следствия часто используются, особенно при решении задач.

Следствия. 1. *Катет, лежащий против угла в* 30°, *равен половине гипотенузы*.

Доказательство. 1. Пусть в треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $\angle B = 30°$ (рис. 2.78а). Докажем, что $AC = \frac{AB}{2}$. Продолжим катет AC за вершину C и отложим на продолжении отрезок $CM = AC$. Точки M и B соединим отрезком. Получим треугольники BCM и ABM: $\Delta BCM = \Delta BCA$ (по двум катетам). Из равенства этих треугольников следует, что $AB = BM$ и $\angle ABC = \angle MBC = 30°$. Тогда ΔABM равнобедренный с углом ABM, равным 60°. Нетрудно теперь найти углы при основании треугольника ABM: $\angle A = \angle M = 60°$. Если все три угла треугольника ABM равны 60°, то этот треугольник – равносторонний. Если ΔABM равносторонний, то $AC = \frac{1}{2}AM = \frac{1}{2}AB$.

2. *Справедливо и обратное утверждение.*

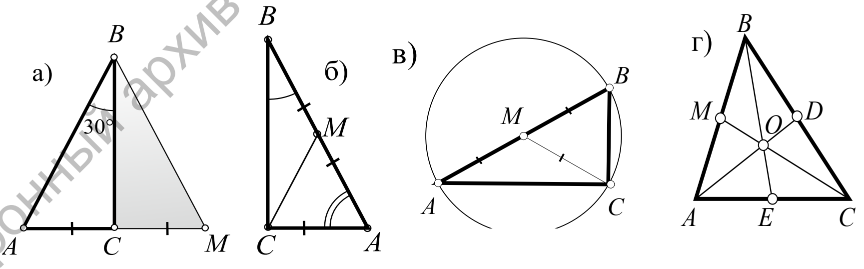


Рис. 2.78

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $AC = \frac{AB}{2}$ (рис. 2.78б). Докажем, что $\angle B = 30°$. Для этого возьмем точку M – середину гипотенузы AB. Тогда $AC = AM$ (по условию). По свойству медианы, проведенной к гипотенузе, $CM = AM$. Отсюда $AC = AM = CM$. Это значит, что ΔCAM — равносторонний. Поэтому $\angle A = 60°$. Если $\angle A = 60°$, то $\angle B = 30°$.

Интерактивные задания для коллективного выполнения

1. Сформулируйте теорему Фалеса и расскажите с помощью рисунка её доказательство.

2. Сформулируйте теорему, обратную теореме Фалеса, и докажите её.

3. Докажите теорему о точке пересечения медиан треугольника.

4. Докажите, что если построить окружность с центром в середине гипотенузы и радиусом, равным половине гипотенузы, то она пройдет через все вершины прямоугольного треугольника ABC (рис. 2.78в).

Доказательство. Достаточно воспользоваться теоремой о медиане, проведенной к гипотенузе.

5. AD, BE, CM – медианы треугольника ABC (рис. 2.78г), $OD = 2$, $OE = OM = 3$. Найдите медианы.

Решение. Воспользуемся свойством точки пересечения медиан треугольника: $OA = 2OD = 4$, $AD = 6$. Аналогично находим, что $BE = CM = 9$.

Ответ: $AD = 6$, $BE = CM = 9$.

2.5 ТЕМА 4 «ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ ЦИРКУЛЕМ И ЛИНЕЙКОЙ»

Венец геометрии – так называли их в античной математике

Теория – 2 урока, Основные задачи на построение 2 урока

Теоретические сведения: **основные геометрические места точек, неравенства для сторон и углов треугольника.**

Основные задачи на построение циркулем и линейкой:

1) построение треугольника по трем сторонам;

2) построение угла, равного данному углу;

3) построение серединного перпендикуляра к отрезку;

4) построение биссектрисы угла;

5) построение перпендикулярных прямых;

6) построение параллельных прямых.

2.5.1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Методические особенности содержания параграфа. Приводятся небольшие теоретические сведения, необходимые для решения задач на построение циркулем и линейкой: основные геометрические места точек, новые неравенства для сторон и углов треугольника, как решаются задачи на построение, о записи построений, примеры задач с решением, интерактивные задания для коллективного выполнения.

2 урока

56. ОСНОВНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА ТОЧЕК.

Определение. Если точки фигуры обладают определенным характерным свойством, позволяющим однозначно утверждать, принадлежит ли точка данной фигуре, или не принадлежит, то такая фигура (такое множество точек) называется **геометрическим местом точек**. Часто используют сокращение ГМТ – геометрическое место точек. Хорошо знакомые нам окружность, серединный перпендикуляр к отрезку, биссектриса угла являются примерами ГМТ.

Следствия: 1. *Серединный перпендикуляр к отрезку есть* ГМТ*, равноудаленных от концов этого отрезка.*

2. *Биссектриса угла есть* ГМТ*, равноудаленных от сторон этого угла.*

Доказательства. **1.** а). Докажем, что если точка M принадлежит серединному перпендикуляру s к отрезку AB, то она равноудалена от концов этого отрезка (рис. 2.79а). Пусть M – произвольная точка прямой s. Докажем, что $MA = MB$. В самом деле $\Delta AMO = \Delta BMO$ (по двум катетам: $AO = OB$, а катет OM – общий). Из равенства этих треугольников следует, что $AM = BM$.

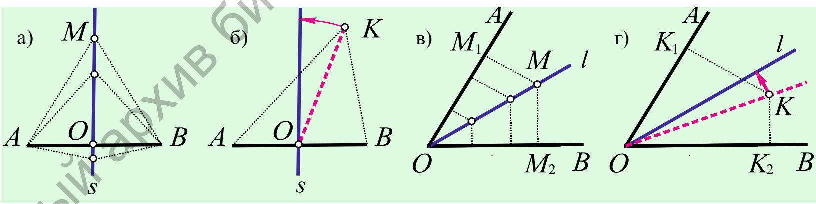


Рис. 2.79

б) Пусть точка K равноудалена от концов отрезка AB, т. е. $AK=BK$, прямая s – серединный перпендикуляр к отрезку AB. Докажем, что $K \in$ s.

Доказательство проведем методом от противного. Допустим, что $K \notin$ s. (рис. 2/79б). Проведем луч OK. Получим, что $\Delta AKO = \Delta BKO$ – по трем сторонам ($AO = OB$, $AK = BK$, OK – общая). Из равенства этих треугольников следует, что $\angle AOK = \angle BOK = \dfrac{180°}{2} = 90°$. **Пришли к противо-**

речию: через точку *O* к прямой *AB* проведены две перпендикулярные к ней прямые *OK* и *s*. Следовательно, $K \in s$.

2. а) Пусть l – биссектриса угла BAC (рис. 2.79в), $M \in l$, MM_1 и MM_2 – расстояния от точки M до сторон угла. Докажем, что $MM_1 = MM_2$. Это равенство следует из равенства $\Delta MOM_1 = \Delta MOM_2$ (по гипотенузе OM и острому углу $\angle M_1OM = \angle M_2OM$).

б) Пусть – расстояния от точки K до сторон угла A равны: $KP_1 = KP_2$ (рис. 2.79г). Докажем, что $K \in l$. Проведем луч. OK. Получим, что $\Delta K_1OK = \Delta K_2OK$. (по гипотенузе и катету). Из их равенства следует, что $\angle K_1OK = \angle K_2OK$. **Получили противоречие: $\angle AOB$ имеет две биссектрисы**. Это означает, что $K \in l$.

57. НОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ СТОРОН И УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА.

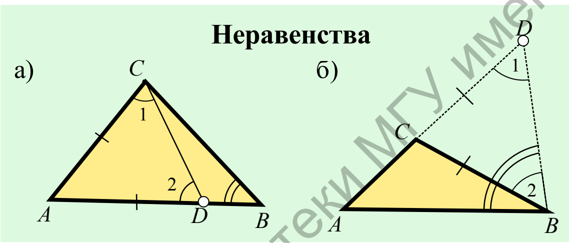


Рис. 2.80

Теоремы: 19. **В треугольнике:**

а) против большей стороны лежит больший угол;

б) против большего угла лежит большая сторона.

20 (*неравенства треугольника*). **Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.**

Доказательства (для желающих). **19а.** Пусть в треугольнике ABC (рис. 2.80а) $AB > AC$. Докажем, что $\angle C = \angle B$. Для этого выполним дополнительное построение: отложим на стороне AB отрезок $AD = AC$, построим отрезок CD. Так как ΔACD – равнобедренный, то $\angle 1 = \angle 2$. Для треугольника BDC $\angle 2$ – внешний, поэтому $\angle 2 > \angle B$ (на основании свойства внешнего угла треугольника). Имеем:

$$\left.\begin{aligned} &\angle C > \angle 1, \\ &\angle 1 = \angle 2, \\ &\angle 2 > \angle B \end{aligned}\right\} \Rightarrow \angle C > \angle B.$$

19б. Обратное предложение доказывается **методом от противного**.

20. Пусть в треугольнике ABC AB – наибольшая сторона. Докажем, что $AB<AC+CB$ (рис. 2.80б). Выполним построение: продолжим сторону AC за точку C и на продолжении отложим отрезок $CD=CB$; построим отрезок BD; в результате получим ΔBCD. В равнобедренном треугольнике BCD $\angle 1 = \angle 2$. В треугольнике ABD $\angle ABD > \angle 2$, и поэтому $\angle ABD > \angle 1$. В треугольнике против большего угла лежит большая сторона. Поэтому в треугольнике ABD $AB<AD$. Имеем:

$$\left.\begin{aligned} &AB<AD, \\ &AD=AC+CD=AC+CB \end{aligned}\right\} \Rightarrow AB<AC+BC.$$

Если большая сторона треугольника оказалась меньше суммы двух других его сторон, то каждая из остальных сторон и подавно будет меньше суммы двух других сторон. Итак, для треугольника ABC выполняются следующие неравенства:

$$AB<AC+BC,\ BC<AC+AB,\ AC<AB+BC.$$

Эти неравенства в данной теме указывают условия, при которых задача на построение треугольника имеет решение, т.е. существует треугольник со сторонами, равными некоторым данным отрезкам.

Следствия. 1. *Расстояние между точками A и B является кратчайшим (наименьшим) расстоянием между этими точками.*

2. *Каждая сторона треугольника больше разности двух других его сторон.*

58. КАК РЕШАЮТСЯ ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ. До сих пор при решении задач на построение мы пользовались достаточно широким набором чертежных инструментов: циркулем, линейкой, чертежным треугольником и транспортиром. Изученный теоретический материал позволяет выполнить построения с помощью только двух инструментов: циркуля и линейки.

Решение задач на построение предполагает следующие этапы:

1) *поиск решения задачи (анализ)*;

2) *построение* искомой фигуры циркулем и линейкой;

3) *доказательство* правильности построений;

4) *исследование* – нахождение условий, при которых задача имеет (или не имеет) решения, и определение числа решений.

59. О ЗАПИСИ ПОСТРОЕНИЙ. Рассмотренные выше примеры показывают, что запись построений даже для сравнительно простых задач довольно громоздка. Её можно сделать более краткой, если не описывать заново те построения, которые ранее выполнялись (ограничиваясь ссылкой на них). Этот прием помогает также четче представить замысел решения задачи, показать, к каким ранее решенным задачам сводится данная задача.

60. ЗАДАЧИ.

1. Пусть l – биссектриса угла AOB (рис. 2.81а), $M \in l$, MM_1 и MM_2 – расстояния от точки M до сторон угла. Найдите эти расстояния, если точка M удалена от вершины угла на 6 см и $\angle AOB = 60°$.

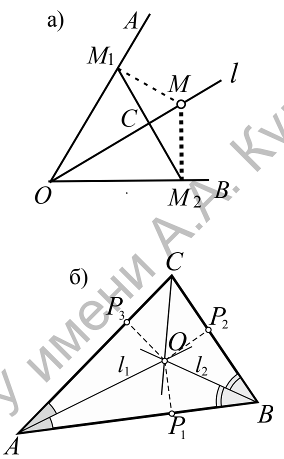


Рис. 2.81

Решение. Если $\angle AOB = 60°$, то угол $\angle M_1OM = 30°$ и из прямоугольного треугольника OMM_1 находим, что

$MM_1 = MM_2 = \frac{1}{2} OM = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$ (см). = 3 (см).

Ответ. $MM_1 = MM_2 = 3$ (см).

2. Пусть две биссектрисы треугольника пересекаются в точке O. Докажите, что точка O равноудалена от всех сторон треугольника (рис. 2.81б).

Доказательство. Пусть биссектрисы l_1 и l_2 треугольника ABC пересекаются в точке O. Из точки O проведем перпендикуляры OP_1, OP_2 и OP_3 на стороны треугольника. Тогда:

$$\left.\begin{matrix} O \in l_1 \Rightarrow OP_1 = OP_3 \\ O \in l_2 \Rightarrow OP_1 = OP_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow OP_3 = OP_2 \qquad OP_1 = OP_2 = OP_3.$$

3. Докажите, что все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

Доказательство. Пусть O – точка пересечения двух биссектрис l_1 и l_2 треугольника ABC (см. рис. 2.81б), OP_1, OP_2 и OP_3 – перпендикуляры, проведенные из точки O к сторонам треугольника. В задаче 1 доказано, что $OP_1 = OP_2 = OP_3$. Если $OP_2 = OP_3$, то точка O принадлежит биссектрисе угла C. Поэтому CO – биссектриса угла C. Следовательно, все три биссектрисы треугольника ABC пересекаются в одной точке – точке O.

Интерактивные задания для коллективного выполнения

1. Можно ли построить треугольник со сторонами а) 1 см, 2 см, 3 см; б) 2 см, 3 см, 4 см?

2. Как построить равнобедренный треугольник со сторонами 3 см и 4 см? Перечислите построения.

2.5.2. ОСНОВНЫЕ ПОСТРОЕНИЯ

Методические особенности содержания параграфа. Содержание параграфа достаточно традиционно. В него входят шесть основных задач на построение. Построение: треугольника по трем сторонам, угла, равного данному; серединного перпендикуляра к отрезку (деление отрезка пополам); биссектрисы угла; перпендикулярных и параллельных прямых. Подчеркивается, что решить задачу на построение означает свести её к основным построениям. Многие задачи на построение сводятся к построению равных треугольников. Предусмотрены учебно-исследовательские задания на решение задач на построение с помощью компьютерных средств, значение которых очевидно, в будущем будет возрастать. В целом тема имеет немалое прикладное значение в актуальной области – в инженерной практике.

2 урока на построения 1–3

61. ПЕРВОЕ ОСНОВНОЕ ПОСТРОЕНИЕ (ПОСТРОЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКА ПО ТРЁМ СТОРОНАМ): $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ – стороны треугольника ABC. Постройте ΔABC.

1. *Поиск решения* (рис. 2.82а). Начнем с построения, например, стороны $AC = b$.

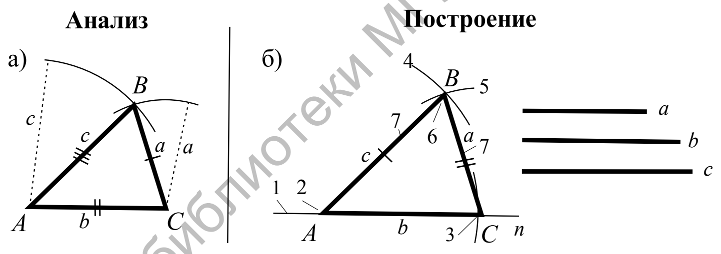


Рис. 2.82

Для этого на некотором луче от его начала A отложим отрезок $AC=b$. Две вершины треугольника ABC построены. Для построения вершины B учтем, что она лежит на окружности с центром A и радиусом $AB=c$. Аналогично вершина B лежит на окружности с центром C и радиусом $CB=a$. Следовательно, вершина B определяется как точка пересечения указанных окружностей. Найденное свойство дает способ построения вершины B. В итоге искомый ΔABC будет построен.

2. *Построение* (рис. 2.82б). Строим:

1) луч n;
2) точку $A\in n$;
3) отрезок $AC=b$;
4) окружность (A, c) – окружность с центром A и радиусом c;
5) окружность (C, a) – окружность с центром C и радиусом a;
6) точку B – точку пересечения окружностей (A, c) и (C, a);
7) отрезки AB, BC; ΔABC – искомый.

2. *Доказательство.* По построению стороны треугольника ABC соответственно равны заданным отрезкам a, b, c. Следовательно, ΔABC является искомым.

3. *Исследование.* Для отрезков a, b, c неравенства треугольника выполняются (для данных отрезков наибольшая сторона c меньше суммы отрезков b и a, проверяется непосредственно). Учитывая, что прямая a и точка A_1 на ней строятся произвольно, можно построить сколько угодно треугольников, удовлетворяющих данной задаче. Все эти треугольники по 3-му признаку будут равны между собой. Если при решении задачи на построение получаются равные фигуры, то обычно их принимают за одно решение. В этом случае задача имеет единственное решение.

62. ВТОРОЕ ОСНОВНОЕ ПОСТРОЕНИЕ: ПОСТРОЕНИЕ УГЛА, РАВНОГО ДАННОМУ УГЛУ. 1. *Поиск решения.* Требуется построить угол A_1, равный данному углу A (рис. 2.83а). Нельзя ли данную задачу свести к предыдущей задаче? Для этого построим на сторонах угла A некоторый ΔABC. Если теперь построим $\Delta A_1B_1C_1$, равный треугольнику ABC, то тем самым будет построен $\angle A_1$, равный углу A.

2. *Построение* (см. рис. 283б). Строим:

1) окружность $(A,\ R)$;

2) точки C и B – точки пересечения окружности $(A,\ R)$ со сторонами угла A;

3) отрезок BC. В результате построили ΔABC.

4) $\Delta A_1B_1C_1$, равный треугольнику ABC (см. рис. 2.130); $\angle A_1$ – искомый.

3. *Доказательство* проведите самостоятельно.

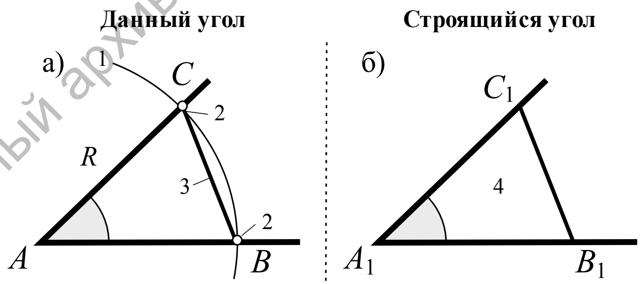


Рис. 2.83

4. *Исследование.* В построении треугольника ABC существует большой произвол, его можно построить по-разному, с разными размерами.

Тем не менее, $\angle A_1$ строится единственным образом. Это следует из аксиомы о единственности откладывания угла, равного данному углу.

63. ТРЕТЬЕ ОСНОВНОЕ ПОСТРОЕНИЕ: ПОСТРОЕНИЕ СЕРЕДИННОГО ПЕРПЕНДИКУЛЯРА К ОТРЕЗКУ (ДЕЛЕНИЕ ОТРЕЗКА ПОПОЛАМ).

1. *Поиск решения.* Допустим, что искомый серединный перпендикуляр s к отрезку AB построен (рис. 2.84). Для построения s достаточно построить две точки этой прямой. Возьмем произвольную точку $C \in s$. Какими свойствами обладает эта точка? Она равноудалена от концов A и B данного отрезка. Это означает, что точка C принадлежит двум окружностям (A, R) и (B, R). Радиус R можно выбирать произвольно, лишь бы эти две окружности пересекались. Нетрудно заметить, что для этого должно быть $R > \frac{AB}{2}$.

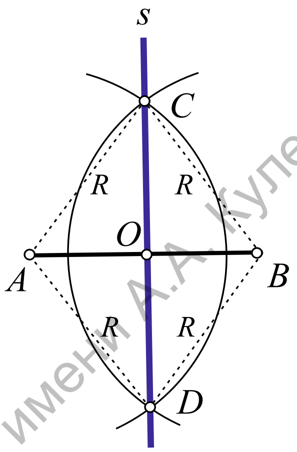


Рис. 2.84

Для построения второй точки прямой s – точки D – можно использовать те же окружности. Построив точки C и D, построим серединный перпендикуляр s (разделим отрезок AB пополам).

2–3. *Построение* и *доказательство* проведите самостоятельно,

4. *Исследование.* Две пересекающиеся окружности равных радиусов с центрами в точках A и B всегда можно построить. Через точки C и D всегда можно провести прямую s. Поэтому задача всегда имеет решение. Это решение единственное, так как у отрезка может быть только одна середина.

Ответ: s – искомый серединный перпендикуляр к отрезку AB.

Построение серединного перпендикуляра приводит к интересному геометрическому понятию осевой симметрии (симметрии относительно прямой).

Точки A и B на рисунке 2.84 называются **симметричными относительно прямой** s. Фигуры, состоящие из симметричных точек, также называются симметричными относительно прямой.

СИММЕТРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЯМОЙ В ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЕ. С симметрией относительно прямой мы уже встречались. При симметрии треугольник переходит в равный треугольник и, значит, любые две симметричные фигуры равны друг другу.

Отметим еще, что примеры симметрии разнообразны: в строительстве, архитектуре, технике, природе (см., например, рис. 2.85, на котором изображены наиболее важные и интересные в архитектурном отношении сооружения в столице Республики Беларусь в г. Минске).

Дворец Республики

Дом Правительства

Ворота Минска

Рис. 2.85

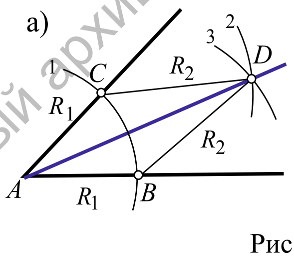
2 урока на построения 4–6

К построению двух равных треугольников сводится также и задача на построение биссектрисы угла.

64. ЧЕТВЕРТОЕ ОСНОВНОЕ ПОСТРОЕНИЕ: ПОСТРОЕНИЕ БИССЕКТРИСЫ УГЛА. 1. *Поиск решения.* Допустим, что биссектриса AD угла BAC построена (рис. 2.86а). Нельзя ли точки B и C подобрать таким образом, чтобы $\Delta ABD = \Delta ACD$ и, следовательно, оказались равными и углы BAD и CAD? Можно. Для этого достаточно отрезки AB и AC, BD и CD взять равными. Этим можно воспользоваться при построении биссектрисы AD.

2. *Построение* (см. рис. 2.86а). Строим:

1) окружность (A, R_1);



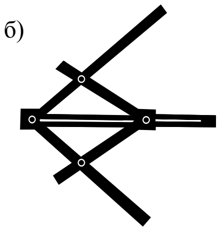


Рис. 2.86

2) точки B и C – точки пересечения окружности (A, R_1) со сторонами данного угла;

3) окружности (B, R_2) и (C, R_2);

4) точку D – точку пересечения окружностей (B, R_2) и (C, R_2);

5) луч AD.

3–4. *Доказательство* и *исследование* проведите самостоятельно.

Землянин. На рис. 2.86б изображен шарнирный прибор для построения биссектрисы, конструкция которого почти буквально «повторяет» геометрические построения с помощью циркуля и линейки.

65. ПЯТОЕ ОСНОВНОЕ ПОСТРОЕНИЕ (ПОСТРОЕНИЕ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ ПРЯМЫХ): Даны точка A и прямая a. Требуется построить прямую b, проходящую через точку A и перпендикулярную к прямой a.

Решение 1. *Поиск решения.* Возможны два случая: $A \notin a$ и $A \in a$.

Нельзя ли указать один (общий) способ решения задачи для этих случаев? Нельзя ли искомую прямую b построить как серединный перпендикуляр к некоторому отрезку XY? Оказывается, можно. Проведем окружность с центром A, пересекающую прямую a в некоторых двух точках. Обозначим их через X и Y (рис. 2.87аб).Так как точка A равноудалена от точек X и Y, то серединный перпендикуляр к отрезку XY пройдет через точку A. Значит, этот серединный перпендикуляр будет искомой прямой b (как его строить мы уже знаем).

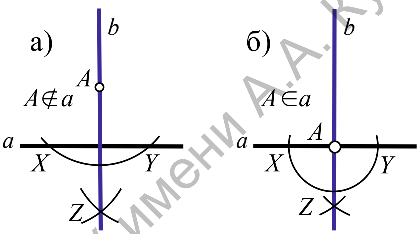


Рис. 2.87

2. *Построение* (см. рис. 2.87аб). Строим:

1) окружность (A, R), пересекающую прямую a в двух точках X и Y;

2) прямую b – серединный перпендикуляр к отрезку XY.

3. *Доказательство.* Так как $b \perp XY$, то $b \perp a$. Кроме того, так как $XA = AY$ (т.е. точка A равноудалена от концов отрезка XY), то серединный перпендикуляр к отрезку XY пройдет через точку A. Таким образом, построенная прямая b проходит через точку A и перпендикулярна прямой a.

4. *Исследование.* Задача всегда имеет решение, причем единственное (в силу теоремы о единственности прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярной данной прямой).

66. ШЕСТОЕ ОСНОВНОЕ ПОСТРОЕНИЕ (ПОСТРОЕНИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ): Даны точка A и прямая a. Требуется простроить прямую b, проходящую через точку A и параллельную прямой a.

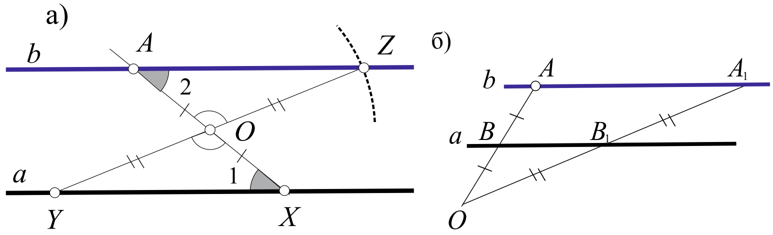


Рис. 2.88

Решение. **1-й способ**. 1. *Поиск решения* (рис. 2.88а). Естественно решение задачи связать с построением равных треугольников и равных накрест лежащих углов. Через точку A проведем произвольный отрезок AX, где $X \in a$, построим середину этого отрезка – точку O. Возьмем ещё произвольную точку $Y \in a$ и проведем прямую YO. Получим ΔXOA. Если теперь на продолжении отрезка XO построить равный отрезок OZ, то получим ΔAOZ, равный треугольнику XOY, и тем самым получим угол 2, равный углу 1. Прямая AZ – искомая прямая b.

2. *Построение* (см. рис. 2.88а). Строим:

1) отрезок AX;

2) точку O – середину отрезка AX;

3) прямую YO;

4) окружность (O, OY);

5) точку Z – точку пересечения окружности (O, OY) и прямой YO;

6) прямую AZ – искомую прямую b.

Заметим, что решение данной задачи свелось к построению треугольника, равного данному, и тем самым к построению равных накрест лежащих углов.

3. *Доказательство.* На основании признака параллельности прямых $a \parallel b$. Кроме того, прямая b по построению проходит через точку A. Значит, прямая b – искомая.

4. *Исследование.* Задача всегда имеет решение, причем единственное (в силу аксиомы параллельных прямых).

2-й способ (на основе теоремы, обратной теореме Фалеса). Построения показаны на рисунке 2.88б. Запишите последовательность построений.

Решение шестой основной задачи приводит ещё к одному геометрическому понятию – понятию симметрии относительно точки.

Если точка O является серединой отрезка AB, то точки A и B называются **симметричными относительно точки** O. Фигуры, состоящие из симметричных точек, также называются симметричными относительно точки *O*. Точка *O* называется **центром симметрии**. Симметрия в этом случае называется **центральной симметрией**.

Дополнительный материал

Следствия (о симметрии).

1. При осевой и центральной симметрии симметричной фигурой для прямой, луча и отрезка являются соответственно прямая, луч и отрезок.

2. Два симметричных отрезка (треугольника, угла) равны. Любые две симметричные друг другу фигуры равны.

3. Равнобедренный треугольник имеет одну ось симметрии.

4. Равносторонний треугольник имеет три оси симметрии.

5. Квадрат имеет четыре оси симметрии.

6. Острый, прямой, тупой углы имеют одну ось симметрии и ни одного центра симметрии. Развернутый угол имеет две оси симметрии и один центр симметрии.

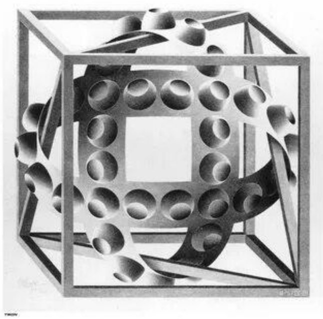
7. Параллельные прямые имеют сколько угодно центров симметрии. Параллелограмм имеет один центр симметрии.

Интерактивные задания для коллективного выполнения

1. Как построить равнобедренный треугольник по боковой стороне и медиане, проведенной к этой стороне? Перечислите построения.

2. Симметрия привлекала к себе внимание различных художников (см., например, картину Сальвадора Дали «Лебеди, отраженные в слонах», рис. 2.89а и картину М.К. Эшера «Куб с волшебными лентами», рис. 2.89б). Укажите элементы симметрии на этих картинах, ось или центр симметрии.

а)



б)

Рис. 2.89

Глава 3
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАЗРАБОТКА ИНТЕРАКТИВНОЙ СИСТЕМЫ ЗАДАЧ УЧЕБНИКА ГЕОМЕТРИИ 7 КЛАССА НА ОСНОВЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

Таблица (см. сл. стр.). Данные о количестве различных видов задач в задачном отделе (7 класс). Всего 28 ч.

Все задачи разбиты на малые группы с отрегулированной энтропией. Группы пронумерованы группа 1, группа 2 и т.д. Каждая группа пунктирной линией поделена на две части: 1-я часть – вспомогательные, более легкие задачи, 2-я часть – основные задачи. Устные задачи отнесены к 1-й части. Дополнительные задачи на малые группы не делятся.

Рекомендуемое учебное время на решение задач из задачного отдела примерно: 28 уроков и примерно такое же время на домашнюю работу. Всего 56 ч. Почасовую дозировку задач здесь не приводим. От тех или иных особенностей каждого класса она может несколько колебаться, оставаясь в пределах 56 ч.

Отношение количества задач основного раздела и задач дополнительного раздела примерно равно 4:1. Переход к дополнительному задачному отделу осуществляется после решения задач основного отдела и для осуществления индивидуализации обучения. Многие задачи повышенной трудности отнесены к дополнительному разделу и там, так как их подавляющее большинство, звездочкой не помечаются.

Задачи со стереометрическим содержанием в систематическом виде приводятся в теоретическом отделе учебника.

Часть задач с решением приводится в ответах.

Решение задач, обладающих новизной, сопровождает помощник «Землянин».

Решение задач на построение требует много учебного времени. Поэтому не нужно стремиться перерешать таких задач как можно больше. Часть задач на построение необходимо решить с применением циркуля и линейки. В целях экономии времени при решении других задач возможно ограничиться схематичным рисунком и перечислением основных построений, к которым сводится решаемая задача.

Темы	Основн. задачи / в т.ч. с реш.	Дополн. задачи / в т.ч. с реш.	Основные задачи					
			на вычисление	на док-во	на индук. обоснование	с практ. содерж., на построение	со стереомет. содерж.	со звездочкой
3.1	85/7	48/4	35	23	4	20	1	8
3.2	126/2	29/4	42	66	–	24	–	–
3.3	84/0	16/0	16	51	–	11	–	8
3.4	55/0	16/0	7	55	–	–	–	3
Повторение	42	–	14	42	–	42	–	–
Всего	392	109	114	237	4	97	1	19

3.1. СИСТЕМА ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ 1 «ПЕРВЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ И АКСИОМЫ»

Задачи разделены на две части: основные и дополнительные задачи.

Основные задачи выделены тематическими заголовками, взятыми в рамку. Этими заголовками задачи разбиваются на тематические группы, к которым относятся наиболее близкие друг другу задачи. Детальная рубрикация задач, разбиение их на **малые группы** проводятся с помощью нумерации Группа 1, Группа 2 и т.д., отделяющих малые группы друг от друга. Это помогает учащимся лучше ориентироваться в системе задач и создает более комфортные условия для решения задач. Как правило, первые задачи в малой группе являются подготовительными, следующие – основными. Часть задач предназначены для устного выполнения. Задачи, содержащие посильный скачок трудности, помечены звездочкой.

В некоторых задачах появляется персонаж «**Землянин**» – так он себя называет, – для которого математика – лучшее увлечение, какое может быть и которому нравится давать советы о том, как решать задачи. Иногда он дает на удивление очень дельные и толковые советы. Но никто не знает, откуда у него такие познания и такое увлечение. Может быть, он один из геометров с планеты «Геометрия», или из детей с космолета «Землянин», вернувшихся на Землю с этой планеты ...
Дополнительные задачи выделены заголовками: задачи с межпредметным содержанием, занимательные задачи, задачи с практическим содержанием, задачи повышенной сложности, стереометрические задачи.

Основные задачи

Группа 1

Геометрическая фигура. Аксиомы принадлежности

1 (устно). Напомним, что, **геометрической фигурой** называется любое множество точек. Это множество чаще состоит из бесконечного множества точек (например, плоскость, прямая, отрезок, луч и т.д.), но может состоять из конечного множества точек (например, множество начал у луча, множество концов отрезка, множество вершин треугольника). Приведите примеры геометрических фигур, состоящих из бесконечного и конечного числа точек.

2 (устно). Иногда в геометрии говорят о геометрических фигурах, которые не содержат ни одной точки (например, множество начал у прямой, множество концов у прямой, множество точек пересечения двух окружностей с общим центром и т.д.). Приведите пример геометрической фигуры, не содержащей ни одной точки.

3. а) (устно) Обратимся к аксиомам принадлежности:

I.1. Сколько угодно точек принадлежит прямой, сколько угодно точек не принадлежит прямой. Если две точки прямой принадлежат плоскости, то все точки прямой принадлежат плоскости.

I.2. Через две точки плоскости можно провести прямую и притом только одну.

В данных аксиомах характеризуются следующие понятия: *точка, прямая, плоскость* … и еще два понятия. Какие? Назовите их. (Это понятия «точка принадлежит…» и «точка …». Обратите внимание на название этих аксиом.)

б) Прочитайте записи и выполните соответствующий рисунок. Справедливы ли записанные утверждения:

$$1)\ (A \in \alpha \text{ и } B \in \alpha) \Rightarrow AB \subset \alpha;\quad 2)\ (A \in \alpha \text{ и } C \in \alpha) \Rightarrow AC \subset \alpha;$$
$$3)\ (B \in \alpha \text{ и } C \in \alpha) \Rightarrow BC \subset \alpha;\quad 4)\ (A \notin \alpha \text{ и } B \in \alpha) \Rightarrow AB \not\subset \alpha;$$
$$5)\ (A \in \alpha \text{ и } B \notin \alpha) \Rightarrow AB \not\subset \alpha;\quad 6)\ (A \notin \alpha \text{ и } B \notin \alpha) \Rightarrow AB \not\subset \alpha;$$
$$7)\ AB \not\subset \alpha \Rightarrow (A \notin \alpha \text{ и } B \notin \alpha);$$

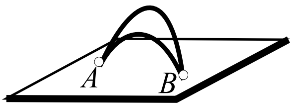


Рис. 3.1

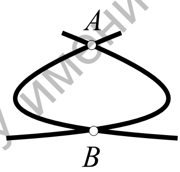


Рис. 3.2

4 (устно). а) Объясните, почему кривые линии (рис. 3.1–3.2) не удовлетворяют аксиомам принадлежности и **по свойствам** (а не только внешне) отличается от прямой.

б) Пусть точка A лежит на поверхности Земли, а точка B – на поверхности Луны. Можно ли с помощью инструментов через эти точки провести прямую: на схематичном рисунке, непосредственно в космосе? А с точки зрения математики такая прямая существует?

в) Прямая a принадлежит плоскости α. Точка A не принадлежит прямой a. Означает ли это, что точка A не принадлежит плоскости α?

Аксиомы порядка. Отрезок

Группа 2

5. (устно). а) Луч принадлежит плоскости. Делит ли он плоскость на части?

б) Окружность принадлежит плоскости. Делит ли она плоскость на части? На сколько? Почему окружность нельзя считать прямой? Удовлетворяет ли окружность всем аксиомам порядка?

в) Два луча имеют общее начало. Делят ли они плоскость на части? На сколько частей?

г) Делит ли река Днепр территорию Республики Беларусь на две части? Где начинается эта река?

---

6. а) На сколько не перекрывающихся частей делится луч: 1) 1, 2, 3, 4 точками; 2) 100 точками; 3) n точками? Заполните таблицу:

Число точек	1	2	3	4	…	100	…	n
Число частей	2	3					…	

б) На сколько не перекрывающихся частей разбивается прямая n точками? Заполните таблицу:

Число точек	1	2	3	4	…	100	…	n
Число частей	2	3					…	

Группа 3

7 (устно)**.** У отрезка AB «выкололи» конец B. Подходит ли полученная фигура под определение отрезка? Какой вывод надо сделать?

---

8. а) На сколько не перекрывающихся частей делится плоскость: 1) 100 прямыми, проходящими через одну и ту же точку; 2) n прямыми, проходящими через одну и ту же точку?

б) (*логическая задача,* устно) Прямая разбивает все точки плоскости, не принадлежащие этой прямой, на две области. Справедливо ли обратное предложение: «Если некоторая линия разбивает все точки плоскости, не принадлежащие этой линии, на две области, то эта линия является прямой»? Ответ подтвердите рисунком.

Группа 4

Аксиомы измерения и откладывания отрезков

9 (устно). Рассмотрим аксиому измерения отрезков:

III.1. Существует отрезок, длина которого равна 1, используемый для измерения длин отрезков (и называемый **единичным отрезком**).

Аксиома утверждает только существование, а не единственность единицы измерения. Дело в том, что такая единственность просто отсутствует. С точки зрения математики в качестве единицы измерения может быть выбран любой отрезок (поэтому у разных народов существовали самые различные единицы измерения отрезков). Какие единицы измерения, используемые в настоящее время, вы знаете? Назовите их. (Воспользуйтесь Интернет-источниками.) Слышали ли вы про нанометр – новую единицу измерения?

—————————————

10. а) (устно) Обратимся к аксиоме измерения отрезков.

III.2. Каждый отрезок, при выбранной единице измерения, имеет единственную положительную длину.

Почему в этой аксиоме специально сказано «при выбранной единице измерения»?

б) Указанную длину отрезка в сантиметрах переведите в миллиметры: 1) $\frac{4}{5}$ см; 2) $\frac{3}{5}$ см; 3) $\frac{6}{5}$ см; 4) 1,2 см; 5) 0,8 см.

Решение: 1) $\frac{4}{5}$ см $= = \frac{4}{5}\cdot 10 = \frac{4\cdot 10}{5} = 8$ (мм).

в) Указанную длину отрезка в миллиметрах переведите в сантиметры: 1) 8 мм; 2) 18 мм; 3) $\frac{5}{3}$ мм; 4) 12 мм; 5) 11 мм.

Решение. 1) 8 мм $= \frac{8}{10}$ см = 0,8 см

Группа 5

11. а) Лежат ли точки *A, B* и *C* на одной прямой, если $AB = 10$, $AC=7$, $CB = 2$?

б) Точки *A, B* и *C* лежат на одной прямой и $AB = 10$, $AC = 7$, $CB = 3$. Какая из этих точек лежит между двумя другими?

—————————————

в) Постройте отрезок $AB = 12$ см и точку *M*, которая делит этот отрезок в отношении 1 : 3, считая от конца *A*.

г) Постройте отрезок $AB = 12$ см и точку *N*, которая делит этот отрезок в отношении 1 : 3, считая от конца *B*.

д) Даны две точки: конец *A* отрезка *AB* и точка *M* этого отрезка, такая, что $AB : AM = 5 : 1$. Постройте конец *B* отрезка.

е) Найдите неизвестный член пропорции $\frac{2}{x-1} = \frac{20}{50}$.

Группа 6

12. а) Нарисуйте некоторый треугольник и луч. С помощью циркуля на луче постройте отрезок, равный сумме сторон треугольника.

б) Нарисуйте некоторый треугольник и луч. С помощью циркуля на луче постройте отрезок, равный разности большей и меньшей сторон треугольника.

—————————————

в) Нарисуйте некоторый отрезок AB и луч. С помощью циркуля на луче постройте отрезок MN, который в 3 раза больше данного отрезка. Какое равенство можно записать?

13. а) Один отрезок больше другого на 4 см (рис. 3.3а). Сумма двух отрезков равна 14 см. Найдите длину этих отрезков.

Землянин. Длину меньшего отрезка обозначьте буквой x. Составьте уравнение.

б) Один отрезок больше другого в 4 раза. Сумма этих отрезков равна 15 см. Найдите длину отрезков. Сделайте схематичный рисунок.

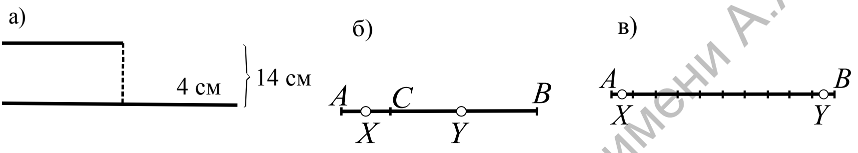


Рис. 3.3

в) Длины двух отрезков относятся как 3 : 1. Сумма этих отрезков равна 16 см. Найдите их длину.

г) Длины двух отрезков относятся как 3 : 1. Разность их равна 12 см. Найдите длину этих отрезков.

14. а) Стороны треугольника относятся как 3 : 4 : 5. Периметр треугольника равен 48 см. Найдите длины сторон треугольника.

б) Каждую сторону треугольника увеличили в 3 раза. Докажите, что периметр треугольника увеличился также в 3 раза.

15. а) Отрезок AB разбит точкой C на части, равные a и b. Найдите расстояние между серединами X и Y этих частей.

Решение. Имеем (рис. 3.3б): $XY = XC + CY = \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}CB =$

$= \frac{1}{2}(AC + CB) = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}(a + b)$.

Ответ: $XY = \frac{1}{2}(a + b)$.

б) Отрезок AB разбит на три равные части. Докажите, что расстояние между серединами первого и третьего отрезков равно $\frac{2}{3}$ расстояния AB.

Группа 7

16. а) Отрезок AB разбит на n равных частей (n – любое натуральное число). Найдите расстояние между серединами крайних частей, если $AB = a$.

Землянин. Везет вам, готовые решения предлагают. Однако надо разобраться в них.

Решение. а) Выполните рисунок 3.3в: разбейте, например, отрезок AB на 10 равных частей. Несмотря на это, рассуждение будем проводить в общем виде – для n равных частей. Учтем, что длина одной n-ой части данного отрезка равна $\frac{a}{n}$ и сумма двух половинок таких частей равна одной n-й части, т. е. $\frac{a}{n}$. Имеем: $XY = AB - (AX + YB) = = a - \frac{a}{n} = \frac{an-a}{n} = \frac{a(n-1)}{n}$.

Ответ: $XY = \frac{a(n-1)}{n}$.

———————————

б) Отрезок AB равен 16 см. Найдите расстояние между серединой X этого отрезка и точкой Y, которая делит его в отношении $\frac{1}{2}:\frac{2}{3}$.

Решение.1-*й способ*. Так как $AY:YB = \frac{1}{2}:\frac{2}{3}$, то можно записать, что $AY = \frac{1}{2}x$, $YB = \frac{2}{3}x$, $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}x = 16$, $\frac{7}{6}x = 16$, $x = 16 \cdot \frac{6}{7}$, $AY = \frac{1}{2}x = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot \frac{6}{7} = \frac{48}{7}$.

Тогда $XY = AX - AY = 8 - \frac{48}{7} = \frac{56-48}{7} = \frac{8}{7} = 1\frac{1}{7}$ (см).

Ответ: $XY = 1\frac{1}{7}$ (см).

2-*й способ*. Так как $AY:YB = \frac{1}{2}:\frac{2}{3} = \frac{3}{6}:\frac{4}{6}$, то можно записать, что $AY = \frac{3}{6}x$, $YB = \frac{4}{6}x$, $\frac{3}{6}x + \frac{4}{6}x = 16$, $\frac{7}{6}x = 16$, $x = 16 \cdot \frac{6}{7}$, $AY = \frac{3}{6}x = \frac{3}{6} \cdot 16 \cdot \frac{6}{7} = \frac{48}{7}$.

Далее, как и выше, приходим к ответу: $XY = 1\frac{1}{7}$ (см).

3-*й способ*. Так как $AY:YB = \frac{1}{2}:\frac{2}{3} = 3:4$, то можно записать, что

$AY = 3x$, $YB = 4x$, $3x + 4x = 16$, $7x = 16$, $x = \frac{16}{7}$, $AY = 3x = 3 \cdot \frac{16}{7} = \frac{48}{7}$.

Как и выше, приходим к ответу: $XY = 1\frac{1}{7}$ (см).

в) Отрезок AB равен 16 см. Найдите расстояние между точками X и Y этого отрезка, если точка X делит его в отношении 1:2, считая от конца A, а точка Y в отношении 1:3, считая от конца B.

г) Отрезки AB и CD пропорциональны отрезкам A_1B_1 и C_1D_1. Найдите отрезок C_1D_1, если:

1) $AB = 3$, $CD = 4$, $A_1B_1 = 4{,}5$; 2) $AB = 10$, $CD = 5$, $A_1B_1 = 5$.

Группа 8

Первое знакомство с теоремой Пифагора

17. (устно). а) Длина отрезка равна: 1) 1; 2) 4; 3) 0,5; 4) $\frac{2}{3}$.

Найдите квадрат этой длины.

б) Квадрат длины отрезка равен: 1) 4; 2) 9; 3) 0,25; 4) $\frac{9}{16}$.

―――――――――――――

в) Вычислите квадратные корни из чисел: 1) 3844; 2) 3969; 3) 4096; 4) 4225.

г) Катеты прямоугольного треугольника равны: 1) 2 и 3; 2) 1 и 3; 3) 3 и 4; 4) 1 и 5. Найдите квадрат гипотенузы.

д) Катеты прямоугольного треугольника равны: 1) 3 и 4; 2) 6 и 8; 3) $\frac{3}{5}$ и $\frac{4}{5}$. Найдите гипотенузу.

е) Найдите неизвестный член пропорции:

1) $\frac{x}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{4}}{2}$; 2) $\frac{x}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$; 3) $\frac{x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}$.

Группа 9

Аксиомы измерения и откладывания углов

18. (устно). а) Обратимся к аксиомам измерения углов:

IV.1. Каждый угол имеет единственную положительную градусную меру.

IV.2. Развернутый угол равен 180°.

IV.3. Мера угла равна сумме мер углов, на которые угол разбивается лучом, проходящим между его сторонами.

Как эти аксиомы задают единицу измерения углов в 1 градус?

б) На рисунке 3.4 найдите градусные меры углов: 1) *AOB, AOC, AOD, AOE, AOF*; 2) *BOC, BOD, COE, BOE, EOF.*

——————————————

в) Угол *AOE* равен 140°. Луч *OX* делит этот угол на две части в отношении 1:5, а луч *OY* – в отношении 2:3, считая в обоих случаях от стороны *OA*. Найдите ∠*XOY*.

19. (устно)**.** По рисунку 3.4 назовите:

а) лучи, которые проходят между сторонами угла *AOD*;

б) угол, который является суммой углов *COD* и *DOE*. Чему равна эта сумма?

в) угол, который является разностью этих углов.

Группа 10

20. По рисунку 3.4:

а) найдите угол между биссектрисами углов *AOB* и *AOC*;

б) найдите угол между биссектрисами углов *AOB* и *BOF*;

в) назовите наибольший из изображенных углов;

г) назовите наименьший из изображенных углов;

д) найдите отношение углов *AOB* и *AOF*;

е) найдите сумму мер углов *AOB, AOC, AOD, AOE, AOF.*

Откладывание углов. Смежные и вертикальные углы

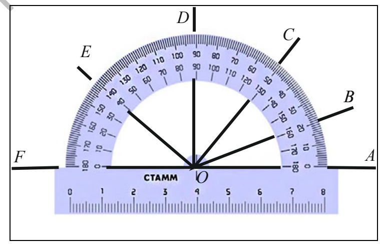


Рис. 3.4

21. Постройте два луча и от одного из них в выбранную вами полуплоскость с помощью транспортира отложите угол, равный 100°, а от другого луча угол, равный 90°.

22. Постройте луч, отложите от этого луча угол, равный 100°, сначала в одну полуплоскость, затем в дополнительную полуплоскость.

23 (устно)**.** Даны две пересекающиеся прямые. Сколько пар смежных углов они образуют?

24. а) Один из смежных углов равен 45°. Чему равен другой угол?

——————————————

б) Разность смежных углов равна 20°. Найдите эти углы.

в) Смежные углы относя как 1 : 5. Найдите эти углы.

г) Даны смежные углы *AOB* и *BOC*, ∠*AOB* = 20°. Проведена биссектриса *OX* угла *AOB* и луч *OY*, который дели угол *BOC* на части в отношении 1:3, считая от стороны *OB*. Найдите ∠*XOY.*

д) Даны смежные углы AOB и BOC, $\angle BOC = 140°$. Проведена биссектриса OX угла AOB, затем биссектриса OY угла AOX. Найдите $\angle XOY$.

Группа 11

25*. Докажите, что угол между биссектрисами двух смежных углов всегда равен 90°.

26 (устно)**.** а) **Углом между двумя пересекающимися прямыми** называется наименьший из четырех углов, образуемых при пересечении прямых.

При пересечении двух прямых один из смежных углов равен 150°. Чему равен угол между прямыми? Покажите этот угол на рисунке, отметив его дужкой.

б) При пересечении двух прямых один из вертикальных углов равен 60°. Чему равен угол между прямыми? Покажите этот угол на рисунке.

—————————————

в) Как с помощью одной линейки построить угол, равный данному углу и имеющий с ним общую вершину? Интересно, как строить такой угол? Спросить что ли у Землянина? Подумаю сам (Если бы Землянин назвал только одно слово, вы бы сразу догадались!).

27. Докажите, что биссектрисы: а) вертикальных углов образуют развернутый угол. Начните с выполнения рисунка; б) одной и другой пары вертикальных углов перпендикулярны друг другу. Начните с выполнения рисунка.

Землянин: Я всегда с вами. Попробуйте воспользоваться задачей 25.

28. Сколько раз слагаемым можно взять: а) прямой угол, чтобы в сумме получился развернутый угол? б) острый угол в 60°, чтобы в сумме получился развернутый угол? в) тупой угол, чтобы в сумме получился развернутый угол?

Группа 12

Определение равных треугольников. Аксиома V о равенстве треугольников (1-й признак равенства треугольников)

29. С помощью линейки и транспортира постройте треугольник, равный данному. Данный треугольник постройте с помощью линейки.

30. Докажите, что если в треугольниках равны две соответственные стороны и углы между ними, то третьи стороны также равны.

Землянин: Нарисуйте треугольники, без рисунков в геометрии ничего не докажешь...

31. Докажите, что если в треугольниках равны две соответственные стороны и углы между ними, то другие соответственные углы тоже равны.

32. Докажите, что если треугольники равны, то медианы одного треугольника соответственно равны медианам другого треугольника.

33. а) На рисунке 3.5 отрезки AB и CD точкой пересечения O делятся пополам. Сколько пар равных отрезков на этом рисунке имеется? Назовите их. Ответ обоснуйте.

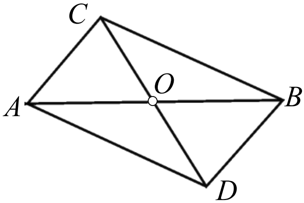


Рис. 3.5

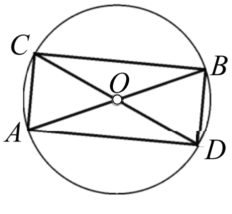


Рис. 3.6

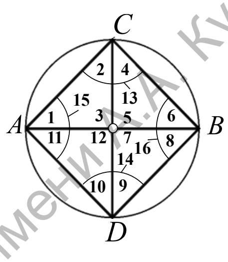


Рис. 3.7

б) На рисунке 3.5 отрезки AB и CD точкой пересечения O делятся пополам. Сколько пар равных углов (не считая развернутые углы) на этом рисунке имеется? Ответ обоснуйте.

в) На рисунке 3.6 отрезки AB и CD – диаметры окружности. Сколько пар равных отрезков на этом рисунке имеется? Назовите их. Ответ обоснуйте.

г) На рисунке 3.6 отрезки AB и CD – диаметры окружности. Сколько пар равных углов (не считая развернутые углы) на этом рисунке имеется? Назовите их. Ученик Х назвал 8 пар, ученик У 12 пар. Кто прав?

34. На рисунке 3.7 отрезки AB и CD – перпендикулярные диаметры окружности. Сколько множеств, состоящих из двух равных отрезков, можно образовать? Ответ обоснуйте.

Решение. На улице остановили Землянина и попросили помочь решить эту задачу. «Легко» сказал Землянин и начал считать. Из отрезков, равных стороне квадрата, беря из по 2, можно образовать 6 множеств. Из отрезков, равных половине диагонали квадрата, также можно образовать 6 множеств. Из отрезков, равных диагонали квадрата, беря их по 2, можно образовать только 1 множество. Всего насчитывается 13 множеств. Не слишком ли много множеств насчитал Землянин?

Группа 13

35. На рисунке 3.8 отмечены равные отрезки и углы. Что можно доказать на основании этих данных? Приведите эти доказательства.

36. На рисунке 3.9 отмечены равные отрезки ($BD = BE$, $AD = CE$) и прямые углы. Равенство каких треугольников и углов можно доказать на основании этих данных?

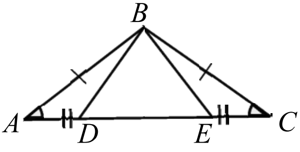


Рис. 3.8

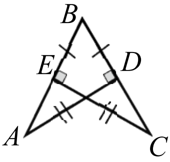


Рис. 3.9

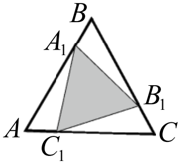


Рис. 3.10

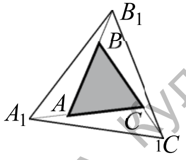


Рис. 3.11

Землянин: Какие интересные следующие две задачи!

37. На сторонах равностороннего треугольника ABC (рис. 3.10) отложены равные отрезки ($AA_1 = BB_1 = CC_1$). Докажите, что $\Delta A_1B_1C_1$ – равносторонний.

38. На продолжениях сторон равностороннего треугольника ABC (рис. 3.11) отложены равные отрезки ($AA_1 = BB_1 = CC_1$). Докажите, что $\Delta A_1B_1C_1$ – равносторонний.

Дополнительные задачи

Задачи с межпредметным содержанием

39 (*связь с алгеброй,* устно). а) На сколько неперекрывающихся частей делит плоскость кривая, состоящая из двух отдельных линий, на рис. 3.12? Эта кривая называется *гиперболой*.

б) На сколько частей делят плоскость оси системы координат и график функции $q(x) = 1/x$, состоящая из двух отдельных линий, на рис. 3.12? Один ученик сказал на 6 частей, другой на 4 части. Кто из них прав?

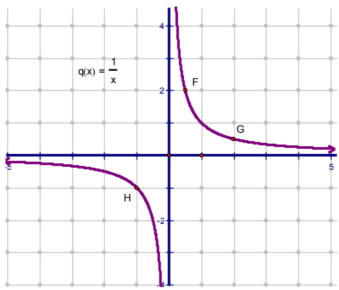
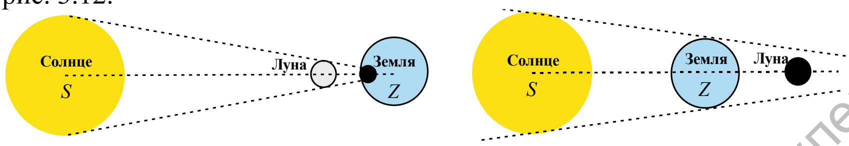


Рис. 3.12

40 (устно). Объясните, почему аксиома порядка **«II.1. Из трех точек, принадлежащих прямой, существует одна и только одна точка, которая лежит между двумя другими»** не выполняется для линии, показанной на рис. 3.12. Лежит ли точка H между точками F и G?

41 (устно)**.** Объясните, почему аксиома порядка **«II.2. Точка, принадлежащая прямой, разбивает все остальные точки прямой на две непересекающиеся части»** не выполняется для линии, показанной на рис. 3.12.



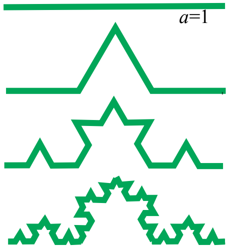
а) Солнечное затмение б) Лунное затмение

Рис. 3.13

42 (*задача на космическую тему*). Расстояние между Землей и Солнцем приближенно равно 149 млн км, между Землей и Луной – 384 тыс. км. На каком расстоянии находится Луна от Солнца в момент: 1) солнечного затмения (рис. 3.13,а), при котором Луна закрывает полностью или частично Солнце от наблюдателя на Земле; 2) лунного затмения (рис. 3.13,б)? Объясните схематичное расположение Солнца, Земли и Луны относительно друг друга в каждом случае.

43. Пусть длина некоторого отрезка на карте равна 2 см и известно, что на карте он изображен с уменьшением в 50 000 раз. Это уменьшение (масштаб) показывается на карте таким образом: 1 : 50 000. Требуется определить длину соответствующего отрезка на местности.

а) размеры карты не изменять



б) Кривая Коха

Рис. 3.14

Решение. Измеренное на карте расстояние 2 см необходимо увеличить в 50 000 раз, получим расстояние между соответствующими пунктами на местности: 2 · 50 000 = 100 000 (см) = 1 (км).

44. а) Найдите масштаб карты, предлагаемой на рисунке 3.14,а, если по данным Интернета длина пути между Могилевым и Осиповичами по железной дороге равно 136 км.

б) По масштабу, найденному в предыдущей задаче, найдите длину пути между Могилевым и Жлобиным. Сверьте полученный результат с данными Интернета.

Решение. а) Воспользуемся сравнительно прямолинейным путем от Могилева до Осиповичей. Если масштаб на карте не указан, то его можно найти. Для этого надо знать расстояние между какими-либо двумя пунктам на местности и измерить соответствующее расстояние непосредственно на карте. Расстояние между ними на местности равно 136 км. Измеряя соответствующее расстояние по карте, получаем, что оно равно 4,7 см. Тогда 136 : 4,7 ≈ 29. Находим масштаб: на 1 см приходится 29 км.

45. Как найти длину кривой Коха? Построение кривой Коха показано на рисунке 3.3. Оно заключается в том, что каждый отрезок, начиная с исходного (у нас он равен 1) делится на три равные части, удаляется средняя часть и над ней строится «крыша» из двух отрезков, равных удаленной середине. Заполните приводимую ниже таблицу. Как ведет себя длина линии при неограниченном увеличении числа шагов? Можно ли сделать вывод о том, что при неограниченном увеличении числа шагов длина линии неограниченно увеличивается? А возможно ли такое? Ведь «зубчики» делаются все мельче и мельче... В таблице, наверное, «опечатка».

Землянин. Проще найти длину маленького отрезка и умножить её на число отрезков.

	1-й шаг	2-й шаг	3-й шаг	…	12-й шаг	…	51-й шаг	…	n-й шаг	
Число отрезков	4	16	64		4^{12}		...		?	
Длина одного отрезка	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	По аналогии	$\left(\frac{1}{3}\right)^{12}$		...		?	
Длина линии	$\frac{4}{3}$	$\frac{16}{9}=\left(\frac{4}{3}\right)^2$	$\frac{64}{27}=\left(\frac{4}{3}\right)^3$		$\left(\frac{4}{3}\right)^{12}$		...		?	
Приближенная длина линии	1,333	1,778	2,370		31,559		2351374,66		?	

Занимательные задачи

46 (*задача Ньютона,* устно). Мне нужна помощь, чтобы посадить 9 деревьев в 9 рядов так, чтобы в каждом ряду было 3 дерева (рис. 3.15). Скажи – как, и я больше у тебя ничего не спрошу.

47 (*историческая задача,* устно). Один военачальник распорядился построить укрепление, состоящее из 10 крепостей, соединенных между собой оборонительными траншеями. Траншеи должны были представлять 5 прямых линий, на каждой из которых приходилось бы по 4 крепости. Причем хотя бы одна из крепостей должна быть защищена траншеями со всех сторон. Удовлетворяет ли этому требованию план, приведенный на рисунке 3.16? Укажите крепость, защищенную со всех сторон.

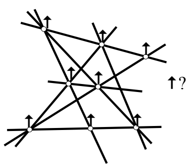


Рис. 3.15

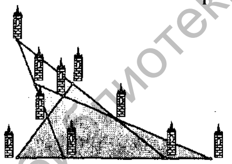


Рис. 3.16

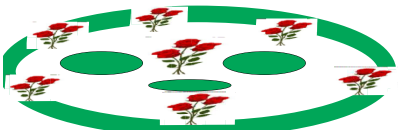


Рис. 3.17

48 (*задача на развитие наблюдательности*). На клумбе (рис. 3.17) имеется 7 роз. Покажите, как тремя прямыми разделить клумбу на 7 частей, каждая из которых содержала бы по одному растению (изобразите розы точками). Справились! Мы молодцы! Все-таки, проверим, что скажет Землянин.

49 (*логическая задача*). На некотором удалении от центральной туристической базы A находятся три пункта B_1 B_2 и B_3 образующие «ближний пояс», и четыре более удаленных пункта C_1, C_2, C_3 и C_4, образующие «дальний пояс». Сколько можно составить разных маршрутов, начинающихся в пункте A, проходящих через один пункт «ближнего пояса» и заканчивающихся в одном пункте «дальнего пояса»? Один ученик сказал 7, другой 12. Кто прав? (Изобразите все маршруты с помощью отрезков и сосчитайте их.) А что скажет Землянин?

Задачи с практическим содержанием. Центральный угол окружности

50 (*провешивание прямой*)**.** На местности (рис. 3.18) колышками обозначены две удалённые друг от друга точки. Как проложить через них прямую? Используются обычно 2-х метровые колышки, называемые вехами. Способ построения прямой на местности с их помощью называется «провешиванием прямой». Этот способ вы можете применить на даче.

Решение. Для этого между двумя стоящими вертикально вехами A и B, поставим третью веху C так, чтобы все три вехи загораживали друг друга (находились на одном «луче зрения»).

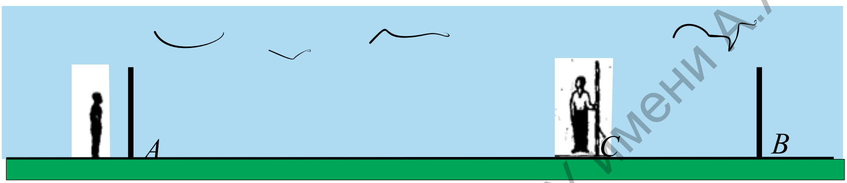


Рис. 3.18

Аналогично можно найти положение других вех, которые находились бы на этой же прямой.

51. На местности вехами обозначены две прямые, при этом было использовано четыре вехи. Как, используя пятую веху, построить точку пересечения этих прямых? Что подскажет З е м л я н и н?

52 (устно). Сейчас мы вас сильно озадачим! Как проверить является ли поверхность стены плоской? Для этого берут достаточно длинную, ровную рейку и прикладывают её к поверхности стены в разных направлениях. Если между рейкой и поверхностью стены просветов нет, то поверхность стены является плоской. Объясните, какая аксиома используется в этом способе проверки поверхности стены.

53 (устно). Существуют более точные способы измерения длины путей по карте. Для их измерения с помощью карты в геодезии и военные, например, используют простой прибор, который называется **курвиметр** («миниспидометр»).

Рис. 3.19

Этот прибор позволяет измерять длину пути между двумя точками на карте и «по прямой», и по извилистой линии (например, по дороге или берегу реки). Небольшое колесико перемещают по маршруту, вращаясь, оно указывает искомую длину пути. Для ознакомления с этим прибором воспользуйтесь Интернет-источником. Общий вид его приведен на рисунке 3.19.

54 (устно)**.** Для измерения и построения углов на местности используются различные приборы.

Простейшим из них является **астролябия**. В астролябии используются **новые понятия – дуговой градус и центральный угол окружности.** Центральный угол окружности – это другое понятие по сравнению с понятием угла. Дуговой градус используется для измерения длин дуг окружности. Самой окружности приписывается 360 дуговых градусов, а 1дуговой градус – это 1/360 часть окружности. Если дуга, например, содержит 270 дуговых градусов, то это означает, что её величина содержит 270 дуговых градусных единиц. **Центральный угол окружности** – это угол (т.е. пара лучей с общей вершиной), вершина которого находится в центре окружности, вместе с определенной дугой окружности, на которую он «опирается». Это может быть одна дуга, или дуга, дополняющая первую до полной окружности. Центральный угол окружности измеряется дугой, на которую он опирается: **сколько дуговых градусов содержит эта дуга, столько угловых градусов содержит центральный угол окружности**. Если, например, центральный угол равен 300 угловым градусам, то другой центральный угол с этими же сторонами равен 60 угловым градусам.

Чему равна сумма двух центральных углов окружности с одними и теми же сторонами?

55 (устно)**.** Как уже было отмечено в предыдущей задаче, для измерения и построения центральных углов окружности на местности используются *угломеры*. Простейшим из них является *астролябия* (рис. 3.20). Основной частью астролябии служит *лимб* – круг с делениями от 0 до 360 дуговых градусов (рис. 3.21). На ось, проходящую через центр круга,

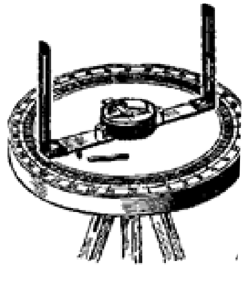


Рис. 3.20

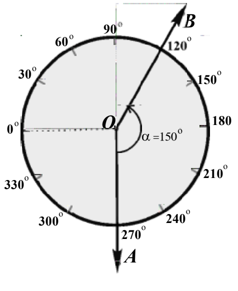


Рис. 3.21

насажена линейка, например, с оптической трубой (*алидада*), которая может вращаться вокруг центра. Весь прибор устанавливается на треножнике. Предположим, что необходимо измерить на местности угол AOB. Вначале трубу устанавливают по направлению OA и отмечают деление круга (в нашем примере оно равно 270°). Затем трубу поворачивают и направляют по направлению OB, отмечают соответствующее деление круга (оно равно 120°). После этого находят разность отсчетов (270° – 120° = 150°), в итоге находят $\angle AOB = 150°$.

Чему равен угол на местности, если первое показание угломера равно 135°, а второе 45°?

Задачи повышенной сложности

56. а) Отрезок AB разбит на 10 равных частей. Расстояние между серединой четвертого отрезка. считая от конца A, и серединой четвертого отрезка, считая от конца B, равно 15 см. Найдите длину отрезка AB.

б) Отрезок AB точками C и D разбит на 3 равные части. Отрезок CD точками E и F также разбит на три равные части. Расстояние между точками A и E равно 16 см (E – ближайшая точка к точке C). Найдите длину отрезка AB.

57. а) Отрезок AB точкой C разбит на две части так, что AC =5 см, CB = 12 см. Пользуясь только циркулем, постройте отрезок, равный 1 см. Землянин: Одним только циркулем – это интересно. Значит, после построения отрезка AB и точки C линейкой вообще нельзя пользоваться.

б) Отрезок AB точкой C разбит на две части так, что AC = 5 см, CB = 9 см. Пользуясь только циркулем, разделите отрезок AB на 14 равных частей.

в) Дан развернутый угол. Из картона вырежьте угол, равный 27°. Как с помощью этой модели построить угол, равный 90°?

Землянин: на стороне развернутого угла несколько раз отложил угол, равный 27°, получился угол с другой стороной развернутого угла в 45°. А что дальше делать? Надо подумать...

58. На сколько неперекрывающихся частей разобьется плоскость прямыми, проведенными через одну и ту же точку, если проведены: а) 3 прямые; б) 4 прямые; в) 6 прямых?

59. На сколько неперекрывающихся частей разобьется плоскость n прямыми, проведенными через одну и ту же точку?

Землянин: Для развития ума очень полезно замечать различные закономерности... Заполните таблицу:

n	3	4	5	6	...	n	...
Число частей плоскости	6	8			...		...

60. Дан ΔABC. На сколько неперекрывающихся частей делят плоскость прямые AB, BC и AC?

61. На сколько неперекрывающихся частей разобьется луч n точками?

62. Дан угол. Заштрихуйте общую часть двух полуплоскостей, каждая из которых удовлетворяет условиям: граница полуплоскости содержит одну из сторон угла, а полуплоскость содержит другую сторону угла.

63 (устно)**.** Вначале введем некоторые понятия.

Определения. **Ломаной** (рис. 3.22) называется геометрическая фигура, состоящих из отрезков, для которых конец первого отрезка служит началом второго отрезка, конец второго отрезка – началом третьего отрезка и т.д. При этом требуется также, чтобы никакие соседние отрезки не лежали на одной прямой и любой отрезок не являлся частью другого отрезка.

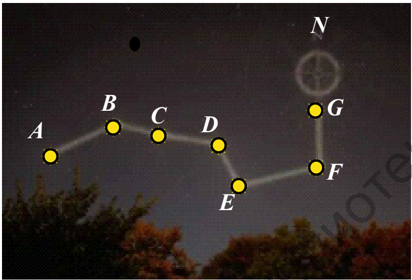


Рис. 3.22

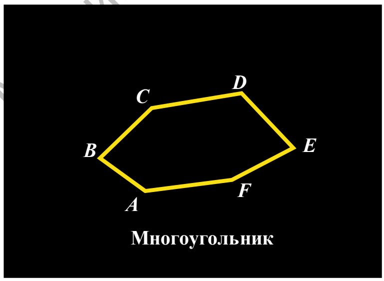


Рис. 3.23

Точки A, B и т.д. называются **вершинами**, а отрезки AB, BC и т.д. – **звеньями** ломаной. Концы одного звена называются **соседними** вершинами ломаной. Два звена, выходящие из одной вершины, также называются **соседними** или **смежными**. Если ломаная не имеет самопересечений, то она называется **простой**. **Длиной ломаной** называется сумма длин всех её звеньев. Если концы ломаной совпадают, то она называется **замкнутой.** На рисунке 3.22 в качестве примера ломаной приведено одно из красивых созвездий «Большая медведица», а также указано направление на Полярную звезду.

а) Прочитайте ломаную, изображенную на рисунке 3.22;

б) Сколько вершин имеет ломаная, изображенная на рисунке 3.22;

в) Сколько звеньев имеет ломаная, изображенная на рисунке 3.22;

г) Приведите примеры соседних и несоседних вершин ломаной, изображенной на рис. 3.22;

64 (устно)**.** Определения. **Многоугольником** (рис. 3.23) называется простая (без самопересечений) замкнутая ломаная (вместе с ограниченной ею конечной частью плоскости или без нее). Вершины ломаной называются **вершинами** многоугольника, звенья ломаной – **сторонами** многоугольника. Отрезок, соединяющий две ее не соседние вершины, называется **диагональю** многоугольника. Многоугольник с n вершинами (а значит, и n сторонами) называется ***n*-угольником**. Если $n = 3$, то многоугольник является **треугольником**; если $n = 4$, то – **четырехугольником**; если $n = 5$, то – **пятиугольником** и т.д.

а) Назовите многоугольник, изображенный на рисунке 3.23;

б) Сколько вершин имеет многоугольник, изображенный на рисунке 3.23;

в) Сколько сторон имеет многоугольник, изображенный на рисунке 3.23;

г) Если стороны некоторого многоугольника равны a см, b см, c см, d см, то чему равен периметр многоугольника?

65 (*проблема, связанная с теоремой Жордана,* устно). Теорема Жордана формулируется следующим образом: **Многоугольник разбивает все точки плоскости, не принадлежащие ему, на два подмножества, называемые внутренней и внешней областями многоугольника.** Если многоугольник имеет довольно «замысловатый» вид (см., например, рисунок 3.25, на котором изображены невыпуклые многоугольники), то далеко не очевидно, какие точки плоскости принадлежат внутренний, а какие внешней области многоугольника. Если обратиться к многоугольникам с меньшим числом сторон,

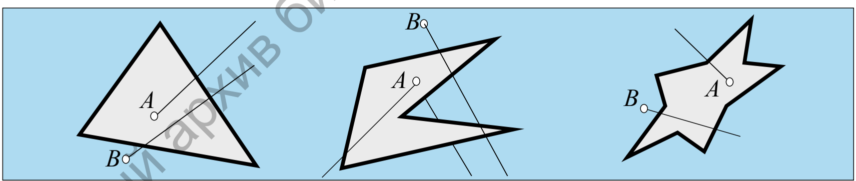
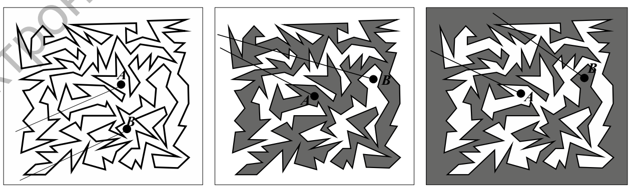


Рис. 3.24



а) б) в)

Рис. 3.25

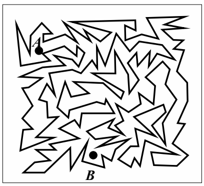


Рис. 3.26

приведенным на рисунке 3.24, то можно заметить некоторые закономерности. Для внутренней точки A луч, с началом в этой точке пересекает границу областей 1 раз (для треугольника) и 3 раза (для четырехугольника), 1 раз (для десятиугольника). Для внешний точки B луч, с началом в этой точке, пересекает границу областей соответственно 2 раза, 4 раза и 2 раза.

Убедитесь, что при любом выборе лучей с началами в A и B выполняется следующая закономерность: **Луч, выходящий из внутренней точки, пересекает границу областей нечетное число раз, а луч, выходящий из внешней точки, если пересекает границу, то пересекает её четное число раз. Эта закономерность сохраняется для любых простых многоугольников.**

Встретился снова **Землянин**: Сказал, что с задачей знаком, всегда удивлялся, как до нее додумался Жордан (франц. математик). Какие же математики умные, наверное, действительно их готовят на планете «Геометрия»! Но «за пределами теоремы Жордана» невыпуклые многоугольники используются крайне редко.

66 (устно)**.** Убедитесь, что на рисунке 3.25а точка A принадлежит внутренней области, а точка B – внешней области. На рисунке 3.25б внутренняя область выделена черным фоном, на рисунке 3.25в таким же фоном выделена внешняя область.

67 (устно)**.** Разбивает ли ломаная, приведенная на рисунке 3.26, плоскость на две области? (Нужно «обойти» границу и убедиться, что она замкнутая, простая, без самопересечений ломаная.)

68 (устно)**.** Нанесите некоторые точки на рисунке 3.26 и определите, какой области многоугольника они принадлежат – внутренней или внешней.

69. Заштрихуйте или закрасьте на отдельном рисунке внутреннюю область многоугольника, приведенного на рисунке 3.26.

70. Заштрихуйте на отдельном рисунке внешнюю область многоугольника, приведенного на рисунке 3.26.

71 (устно). На рисунке 3.26 в пункте A находится мышка и на наибольшем удалении от неё в пункте B кусочек сыра. Выясните, удастся ли мышке достать сыр, оставаясь в той же самой области лабиринта.

Стереометрические задачи. Равенство произвольных фигур

72. а) Отрезок, соединяющий две наиболее удаленные друг от друга вершины куба, называется *диагональю куба* (рис. 3.27). Как измерить диагональ деревянного куба, пользуясь только линейкой и карандашом, если есть один куб?

Землянин: Да, проблема – куб ведь не полый и во внутрь его линейку не просунешь. Придется соображать!

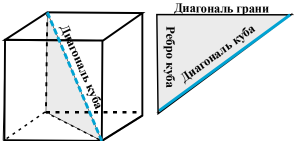


Рис. 3.27

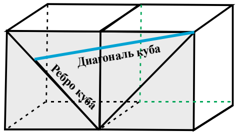


Рис. 3.28

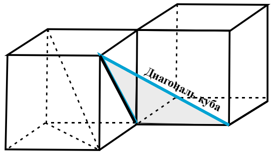


Рис. 3.29

Решение. Заметим, что диагональ куба является стороной треугольника, в котором две другие стороны равны соответственно ребру куба и диагонали грани куба (важно, что они на поверхности куба), а угол между этими сторонами – прямой. Остается построить этот треугольник (см. рис. 3.27) и измерить линейкой сторону, лежащую против прямого угла (прямой угол можно построить, обводя карандашом прямой угол грани куба). Похоже, что математика любую проблему может решить?

б) Как измерить диагональ деревянного куба, пользуясь только линейкой и карандашом, если есть два таких куба?

Решение. Интересно, с двумя кубами решить задачу сложнее или проще? Скорее всего, глядя на рисунок 3.29, проще. В этом случае также строится аналогичный треугольник. Возможны два способа. Один способ построения (самый простой) показан на рисунке 3.28, другой (посложнее) – на рисунке 3.29.

в) Пользуясь определением равенства произвольных фигур, докажите равенство: 1) двух квадратов с равными сторонами; 2) двух прямоугольников с соответственно равными сторонами; 3) двух кубов с равными ребрами.

г) Объясните, почему два квадрата с неравными сторонами не будут равными.

д) Объясните, почему треугольник не может быть равным квадрату.

е) Звенья одной ломаной соответственно равны звеньям другой ломаной. Будут ли эти ломаные являться равными фигурами?

ж) Изготовьте модель треугольной пирамиды и её развёртку. Представим, что это две фигуры. Будут ли они равны?

3.2. СИСТЕМА ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ 2 «ВНЕШНИЙ УГОЛ ТРЕУГОЛЬНИКА. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ И ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ. СУММА УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА»

Определение внешнего угла треугольника
Неравенство внешнего угла треугольника

Накрест лежащие и односторонние углы
Единственность перпендикулярной прямой
Признаки параллельности прямых
Аксиома и свойства параллельных прямых
Н. И. Лобачевский – основатель неевклидовых геометрий
Сумма углов треугольника
Равенство внешнего угла треугольника сумме двух внутренних углов, не смежных с ним

Основные задачи

Определение внешнего угла треугольника

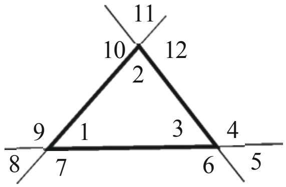


Рис. 3.30

Группа 14

73 (устно)**.** А как вам покажется такой вопрос: «Какие углы на рисунке 3.30 не являются внутренними и внешними углами треугольника?»

74. Сколько имеется внешних углов треугольника, если брать их по одному при каждой вершине треугольника?

75 (устно)**.** а) Всегда ли внешние углы треугольника тупые?

б) Приведите пример треугольника, у которого внешний угол прямой.

в) Приведите пример треугольника, у которого внешний угол острый.

——————————————

76. Рассмотрим внутренние и внешние углы треугольника, взятые по одному при каждой вершине. Найдите сумму градусных мер этих шести углов.

77. Рассмотрите внутренний и внешний угол треугольника при одной из его вершин.

Проведите биссектрисы этих углов. Чему равен угол между биссектрисами?

Группа 15

78. а)* Внешний угол в 1,5 раза больше угла треугольника, смежного с ним. Найдите эти углы.

б) Внешний угол треугольника относится к внутреннему углу, смежному с ним, как 2:3. Найдите внешний угол.

в) Внешний угол треугольника относится к внутреннему углу, смежному с ним, как $\frac{3}{2}:\frac{1}{2}$. Найдите эти углы.

г)* Внешний угол треугольника больше одного из внутренних углов на 40° и в 3 раза больше этого же угла. Найдите эти углы.

Землянин: Задача решается арифметически. Изобразите углы на одном рисунке.

Группа 16

79. а)* Внешний угол треугольника больше одного из внутренних углов на 30° и в 1,5 раза больше этого же угла. Найдите внутренний угол треугольника, смежный с внешним углом, о котором говорится в задаче.

Появился **Землянин:** «Задача похожа на задачу 78г. Но чем они отличаются? Ну, конечно, – у них требования разные. Сразу на это и не обратишь внимание...».

―――――――――――――

б) Сумма внешних углов треугольника в 2 раза больше суммы внутренних углов. Найдите эти суммы.

Землянин: «Как решать такую задачу, не зная ничего большего про обе эти суммы?». Попробуйте воспользоваться равенством $x' + y' + z' = 2(x + y + z)$, где x, y, z – внутренние углы треугольника, а x', y', z' – внешние углы, соответствующие внутренним углам.

в) Может ли сумма внешних углов треугольника равняться 350°, а сумма внутренних углов 215°?

Землянин: «Эта задача с такими же странностями, как и предыдущая...». Сравните общую сумму внутренних и внешних углов с тем, какая она должны быть и какая получается по условию задачи.

г) Внутренние углы треугольника относятся как 2:3:4, меньший из них равен 40°. Найдите отношения внешних углов. Найдите неизвестные углы.

Землянин: Найдите вначале внутренние углы треугольника.

80. а) Найдите сумму внутренних углов треугольника из предыдущей задачи и сумму внешних его углов.

б) При сложении суммы внутренних углов треугольника с суммой внешних углов, взятых по одному при каждой вершине, получили 540°, а при вычитании из суммы внешних углов суммы внутренних углов получили 180°. Найдите эти суммы.

Землянин: обозначьте суммы внутренних и внешних углов треугольника соответственно буквами x и y. Тогда $x + y = 540°$, $y – x = 180°$. Задача свелась к известной задаче о нахождении двух величин, зная их сумму и разность.

Группа 17

81. а) Отрезки BC и AD пересекаются и в точке пересечения O делятся пополам. Докажите, что внешний угол при вершине A треугольника ABO равен внешнем углу при вершине D треугольника DCO.

б) Отрезки BC и AD пересекаются и в точке пересечения O делятся пополам. Найдите внешний угол при вершине A треугольника ABO, если $\angle ODC = 45°$.

———————————

82. В треугольнике ABC построили медиану AM и на её продолжении за точку M отложили отрезок MD, равный AM. Затем точку D соединили отрезком с точкой C. Найдите внешний угол треугольника ACD при вершине C, если сумма внутренних углов B и C треугольника ABC равна 50°.

83. В треугольнике ABC построили медиану BN и на её продолжении за точку N отложили отрезок ND, равный BN. Затем точку D соединили отрезком с точкой C. Найдите внешний угол треугольника BCD при вершине C, если сумма внутренних углов A и C треугольника ABC равна 70°.

Группа 18

Неравенство внешнего угла треугольника:
внешний угол треугольника больше каждого внутреннего угла, не смежного с ним

84 (устно)**.** Возможно ли в треугольнике, что внутренний угол и внешний угол, не смежный с ним, одновременно являются прямыми углами?

85 (устно)**.** Докажите, что если в треугольнике один угол прямой, то два другие угла острые.

86 (устно)**.** Могут ли на рисунке 3.31 углы 1 и 2 быть равными друг другу?

87 (устно)**.** Может ли быть на рисунке 3.31 угол 1 меньше угла 2?

——————

88 (устно)**.** Докажите, что на рисунке 3.31 угол 3 больше углов 1 и 2.

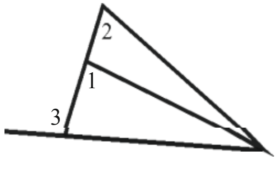


Рис. 3.31

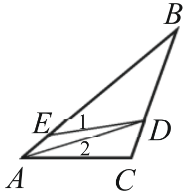


Рис. 3.32

89 (устно)**.** На рисунке 3.32 AD – биссектриса угла BAC. Точка E – произвольная точка, принадлежащая стороне AB. Докажите, что $\angle 1 = \angle 2$.

90*. Докажите, что сумма градусных мер внешних углов треугольника, взятых по одному при каждой вершине, больше суммы градусных мер внутренних углов треугольника. **Землянин**: Нельзя ли воспользоваться неравенством внешнего угла треугольника? ...

Группа 19

91*. а) Докажите, что сумма любых двух внутренних углов треугольника меньше 180°.

Доказательство (рис. 3.33). Сложим равенства $\angle 1 + \angle 3 = 180°$ и $\angle 2 + \angle 4 = 180°$, получим $(\angle 1 + \angle 2) + (\angle 3 + \angle 4) = 360°$. Учтем, что $\angle 1 < \angle 4$ и $\angle 2 < \angle 3$ (неравенство внешнего угла треугольника). Заменим сумму во вторых скобках меньшей суммой из первых скобок. Левая часть равенства уменьшится и вместо равенства будет выполняться неравенство $(\angle 1 + \angle 2) + (\angle 1 + \angle 2) < 360°$. Отсюда $2(\angle 1 + \angle 2) < 360°$, $(\angle 1 + \angle 2) < 180°$.

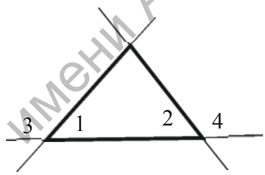


Рис. 3.33

б) Докажите, что сумма двух внешних углов треугольника больше 180°.

Доказательство (см. рис. 3.33). Запишем вначале равенство и от него перейдем к неравенству:
$\angle 3 + \angle 4 = (180° - \angle 1) + (180° - \angle 2) = 360° - \underbrace{(\angle 1 + \angle 2)}_{<180°} > 180°.$

92*. Докажите, что сумма трех внешних углов треугольника, взятых по одному при каждой вершине, больше 270°, а сумма внутренних углов меньше 270°.

Группа 20

Единственность прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данной прямой.
Серединный перпендикуляр к отрезку.
Точки, симметричные относительно прямой

93. Постройте перпендикулярные прямые с помощью транспортира и линейки.

94 (устно). Докажите, что если точка принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку, то она равноудалена от концов отрезка.

95. Точки A и A_1 называются **симметричными относительно прямой s,** если прямая s является серединным перпендикуляром к отрезку AA_1. Прямая s называется **осью симметрии** точек A и A_1. Если точка B принадлежит оси симметрии s то она сама себе симметрична. Пусть точка $A \notin s$. С помощью чертежного треугольника и циркуля постройте точку A_1, симметричную точке A относительно s.

96. Пусть $A \notin s$, $B \in s$, A_1 – точка, симметричная точке A относительно оси s. Докажите, что отрезок AB равен отрезку A_1B.

97. Пусть отрезок AB пересекает ось симметрии s. Постройте отрезок A_1B_1, симметричный отрезку AB. Докажите, что $AB = A_1B_1$.

98. Пусть отрезок AB не пересекает ось s. Постройте отрезок A_1B_1, симметричный отрезку AB относительно оси s. Докажите, что $AB = A_1B_1$.

Группа 21

99. Дано (рис. 3.34): $\angle AOD = 90°$, луч OP проходит между сторонами угла AOD, $\angle 1 = \angle 2$. Докажите, что $\angle EOP = 90°$.

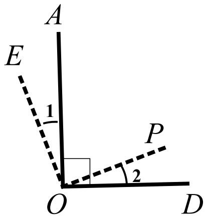


Рис. 3.34

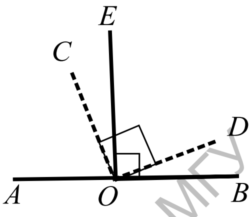


Рис. 3.35

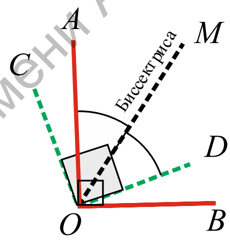


Рис. 3.36

100. Дано (рис. 3.35): точки A, O и B лежат на одной прямой, луч OD проходит между лучами OE и OB, $OE \perp OB$, $OD \perp OC$. Докажите, что $\angle COE = \angle DOB$.

101. Дано (рис. 3.36): $AO \perp OB$, $CO \perp OD$, OM – биссектриса угла AOD. Докажите, что OM является биссектрисой угла COB.

102. Дано (рис. 3.36): $AO \perp OB$, $CO \perp OD$, OM – биссектриса угла AOD. На этом рисунке изображены 10 углов (отсчет углов ведите вначале от луча OB, затем OD и т.д.). Найдите 9 из них, если $\angle BOD = 20°$.

103. Дано (рис. 3.36): $AO \perp OB$, $CO \perp OD$, OM – биссектриса угла AOD. На этом рисунке изображены 10 углов (отсчет углов ведите вначале от луча OB, затем OD и т.д.). Найдите 9 из них. если $\angle MOA = 35°$.

Группа 22

104. Дано (рис. 3.36): $AO \perp OB$, $CO \perp OD$, OM – биссектриса угла AOD. На этом рисунке изображены 10 углов, $\angle MOD = 35°$. Найдите остальные углы.

105. Даны не параллельные отрезки AB и MK. Проведены серединные перпендикуляры к этим отрезкам. Пусть X – точка пересечения этих серединных перпендикуляров. Докажите, что точка X равноудалена от концов отрезка AB и равноудалена (на другое расстояние) от концов отрезка MK.

———————————

106. Даны прямая a и отрезок MN. Постройте точку A такую, чтобы перпендикуляр, проведенный из точки A к прямой a, был бы равен отрезку MN. Сколько решений имеет задача?

107. Даны точка A и отрезок MN. Постройте прямую a такую, чтобы перпендикуляр, проведенный из точки A к прямой a, был бы равен отрезку MN. Сколько решений имеет задача?

108. К сторонам AB и BC треугольника ABC проведены серединные перпендикуляры, которые пересекаются в точке O. Сравните отрезки OA, OB и OC.

109. В условиях задачи 108 проведите окружность с центром в точке O и радиусом, равным OA. Пройдет ли эта окружность через все вершины треугольника?

Задачи с практическим содержанием

110. Как построить точку на местности, равноудаленную от концов данного отрезка? Нельзя ли воспользоваться шнуром с узлом, завязанным в его середине?

111. На карте рядом с населенными пунктами A и B проходит железная дорога. Требуется построить станцию в таком месте, чтобы она была равноудалена от пунктов A и B. Определите положение этой станции на карте. Выполните рисунок.

Группа 23

Определения накрест лежащих и односторонних углов

112 (устно). **Внутренние накрест лежащие углы** – это углы, которые лежат по разные стороны от секущей (накрест друг от друга).

Рис. 3.37

Рис. 3.38

Рис. 3.39

Представление о накрест лежащих углах дает, например, начертание буквы «зет», у славян она была символом Земли (рис. 3.37), или такое природное явление, как молния (рис. 3.38). Применение накрест лежащих углов часто используется в конструкции опор линии электропередач (рис. 3.39). Приведите примеры рисунков накрест лежащих углов.

113 (устно). Не встречалось ли вам применение накрест лежащих углов в строительстве, архитектуре, технических устройствах? Воспользуйтесь Интернет-источниками.

114. С помощью транспортира отложите от лучей *AB* и *BA* углы, равные 53° и расположенные по разные стороны от прямой *AB*. Как называются эти углы?

115. Даны две точки *A* и *B*. С помощью транспортира отложите от лучей *AB* и *BA* углы, равные 53° и расположенные по одну сторону от прямой *AB*. Как называются эти углы?

116. Постройте накрест лежащие углы, которые не были бы равными.

117. Постройте односторонние углы, которые не были бы равными.

118. Постройте накрест лежащие углы, отношение которых равно 1 : 2.

Землянин. Вначале вычислите эти углы.

119. Постройте односторонние углы, отношение которых равно 1 : 2.

120 (устно). При пересечении двух прямых *a* и *b* секущей прямой *c* образовалось 8 углов (рис. 3.40). Назовите накрест лежащие и односторонние углы.

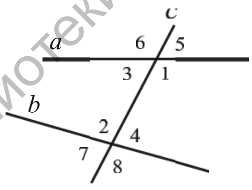


Рис. 3.40

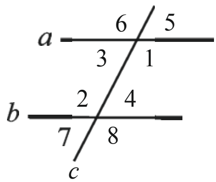


Рис. 3.41

Связь величин накрест лежащих и односторонних углов

Группа 24

121. Докажите, что если накрест лежащие углы одной пары равны, то накрест лежащие углы другой пары также равны (рис. 3.41).

122. Докажите, что если сумма односторонних углов одной пары равна 180°, то сумма односторонних углов другой пары также равна 180° (см. рис. 3.41).

—————————

123. Докажите, что если накрест лежащие углы одной пары равны, то сумма односторонних углов равна 180° (см. рис. 3.41).

124 <u>(обратная предыдущей).</u> Докажите, что если сумма односторонних углов равна 180°, то накрест лежащие углы равны (см. рис. 3.41).

Признаки параллельных прямых

Группа 25

125. Пусть $\angle ABC = 70°$, $\angle BCD = 100°$ (см. рис. 3.42). Всегда ли прямые AB и CD не параллельны? Все ли случаи рассмотрены? Ответ обоснуйте.

—————————————

126. Пусть $\angle ABC = 70°$, $\angle BCD = 100°$ (см. рис. 3.42). Всегда ли прямые AB и CD не параллельны? Все ли случаи рассмотрены? Ответ обоснуйте.

127. Пусть $\angle ABC = 70°$, $\angle BCD = 100°$ (см. рис. 3.42). Могут ли прямые AB и CD быть параллельными? Какой из рисунков требует уточнения?

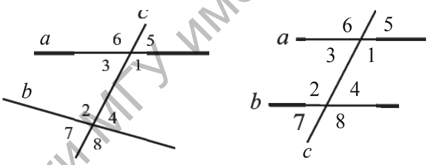


Рис. 3.42

128. Пусть $\angle ABC = 70°$, $\angle BCD = 110°$ (см. рис. 3.42). Всегда ли $AB \parallel CD$? Какой из рисунков требует уточнения?

Группа 26

129*. Накрест лежащие углы при прямых a и b и секущей c равны α и $180° - \alpha$. Могут ли прямые a и b быть параллельными? Ответ обоснуйте.

—————————————

130. Односторонние углы при прямых a и b и секущей c равны α и $180° - \alpha$. Могут ли прямые a и b быть параллельными? Ответ обоснуйте.

131*. Односторонние углы при прямых a и b и секущей c равны α и $180° - \frac{\alpha}{2}$. Могут ли прямые a и b быть непараллельными? Ответ обоснуйте.

132. На рисунке 3.41 $\angle 3 = 50°$, а $\angle 8$ на 80° больше. Докажите, что $a \parallel b$.

Применение 1-го признака равенства треугольников к доказательству параллельности прямых

Группа 27

133. Отрезки AB и CD – диаметры окружности (рис. 3.43). Докажите, что $AD \parallel BC$.

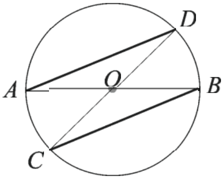


Рис. 3.43

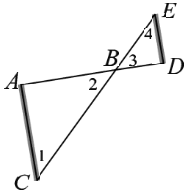


Рис. 3.44

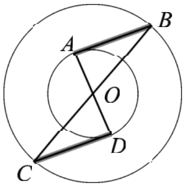


Рис. 3.45

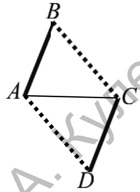


Рис. 3.46

134. Отрезки AB и CD – диаметры окружности (см. рис. 3.43). Постройте отрезки AC и BD. Докажите, что $AC \parallel BD$.

135. Отрезки AD и CE пересекаются (рис. 3.44), $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. Докажите, что $AC \parallel DE$.

136. В окружностях с общим центром проведены диаметры (рис. 3.45). Докажите, что $AB \parallel CD$.

137. На рисунке 3.46 $\angle B = \angle D$, $AB = CD$, $BC = AD$. Докажите, что $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$.

138. На рисунке 3.46 $\angle B = \angle D$, $AB = CD$, $BC = AD$. В треугольниках ABC и CDA проведите медианы AA_1 и CC_1 и докажите, что $AA_1 \parallel CC_1$.

139. а) На рисунке 3.47 изображены два треугольника ABC и CDA: $\angle B = \angle D$, $AB = CD$, $BC = AD$. На стороне AC отложили равные отрезки AX и CY. Докажите, что $BX \parallel DY$.

б) На рисунке 3.47 изображены два треугольника ABC и CDA: $\angle B = \angle D$, $AB = CD$, $BC = AD$. На стороне AC отложили равные отрезки AX и CY. Докажите, что $BY \parallel DX$.

140. а) На рисунке 3.48 изображены два треугольника ABC и CDA: $\angle B = \angle D$, $AB = CD$, $BC = AD$. На сторонах AB и CD отложили равные отрезки AX и CY. Докажите, что $BY \parallel DX$.

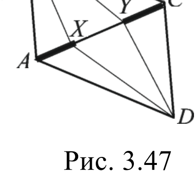


Рис. 3.47

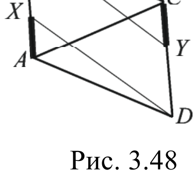


Рис. 3.48

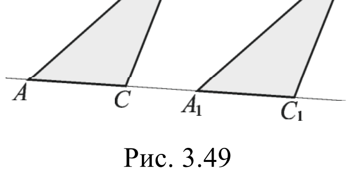


Рис. 3.49

б) $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ (рис. 3.49). Докажите, что $AB \parallel A_1B_1$ и $BC \parallel B_1C_1$.

141*. Внешний угол при вершине B треугольника ABC (см. рис. 3.49) равен внешнему углу при вершине B_1 треугольника $A_1B_1C_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$. Докажите, что $AB \parallel A_1B_1$ и $BC \parallel B_1C_1$.

Группа 28

142*. $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ (см. рис. 3.49). В них проведены медианы из вершин A и A_1 Докажите, что эти медианы параллельны.

143. $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ (см. рис. 3.49). В них проведены медианы из вершин B и B_1 Докажите, что эти медианы параллельны.

144. $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ (см. рис. 3.49). В них проведены медианы из вершин C и C_1 Докажите, что эти медианы параллельны.

Группа 29

Свойства параллельных прямых: задачи на готовых чертежах

В задачах 145–152 дано, что $a \parallel b$, даны некоторые углы, требуется найти угол α. Дополнительное условие задачи (задачи 153–160) указывается непосредственно над чертежом.

145.

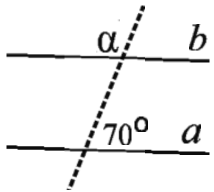


Рис. 3.50

146. $\angle A : \angle C = 2 : 1$

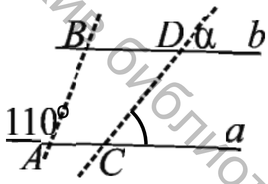


Рис. 3.51

147. *BD* –биссектриса $\angle ABC$

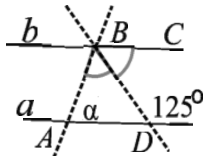


Рис. 3.52

148. *AB* –биссектриса $\angle DAC$

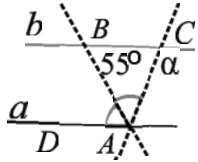


Рис. 3.53

149*.

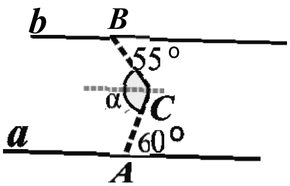


Рис. 3.54

150.

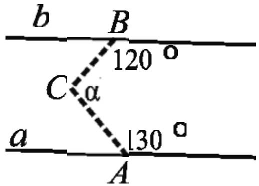


Рис. 3.55

151*.

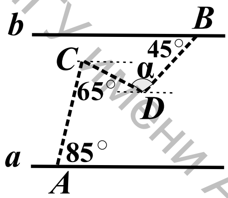


Рис. 3.56

152.

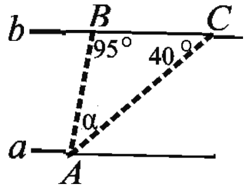


Рис. 3.57

153. $\Delta ABC = \Delta CDE$

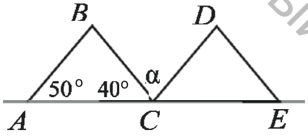


Рис. 3.58

154. $AB \parallel CD$, $BC \parallel DE$

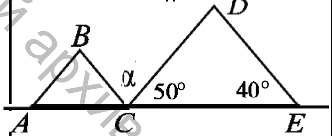


Рис. 3.59

155. $BC \parallel DE$

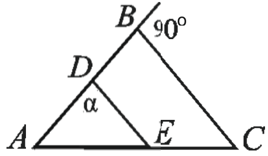


Рис. 3.60

156. $BC \parallel EF \parallel AK$, $AB \parallel DC \parallel KF$

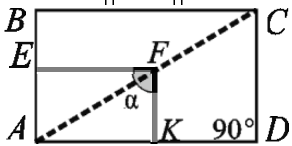


Рис. 3.61

157. $BC \parallel EK \parallel$ $\parallel AF$, $AB \parallel KF \parallel CD$

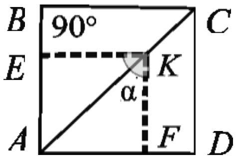


Рис. 3.62

158. Треугольники равны

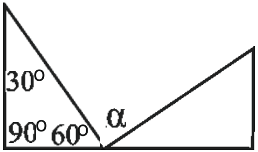


Рис. 3.63

159. $\Delta ABC = \Delta BDE$

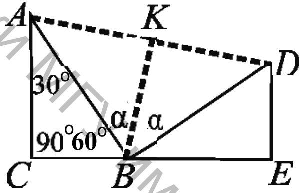


Рис. 3.64

160*. $\Delta ABC =$ $= \Delta CEK$

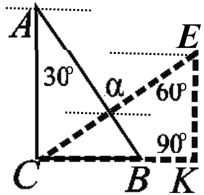


Рис. 3.65

Группа 30

161. Составьте задачи по рисункам 3.66–3.67.

162. Допущена ли ошибка на рисунках 3.68, а-в?

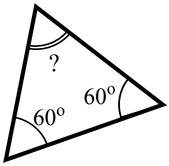


Рис. 3.66

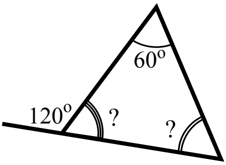


Рис. 3.67

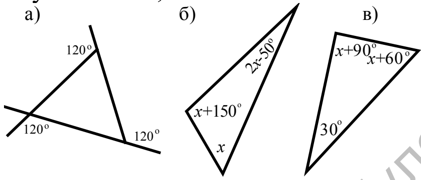


Рис. 3.68

163 (задачи а–ж устно)**.** а) Может ли быть в треугольнике: 1) два тупых угла; 2) тупой и прямой углы; 3) тупой и два острых; 4) два прямых угла?

б) Докажите, что если в треугольнике один угол прямой, то два других острые. Чему равна сумма острых углов? Если один из острых углов равен α, то чему равен другой острый угол?

в) Может ли больший угол треугольника быть меньше 60°?

г) Может ли меньший угол треугольника быть больше 60°?

д) Один из углов треугольника равен 90°. Могут ли два других его угла быть равными? Чему они равны?

е) Один из углов треугольника равен 60°. Могут ли два других его угла быть равными?

Чему они равны?

ж) Можно ли сделать один из углов треугольника: 1) сколь угодно малым (сколь угодно мало отличающимся от 0°); 2) почти равным 180° (сколь угодно мало отличающимся от 180°)?

з) Углы треугольника относятся как 1:3:4. Найдите их. Обозначьте меньший угол буквой x.

и) Сумма двух углов в треугольнике равна третьему углу. Докажите, что в треугольнике имеется прямой угол.

к) Имеется ли в треугольнике прямой угол, если его углы относятся как 1:2:3?

л) Два угла треугольника относятся как 3:7, причем один из них больше другого на 40°. Найдите углы треугольника.

м) Даны три произвольных угла. Выяснить, могут ли они быть углами треугольника, если они относятся как 1:2:3 и третий угол больше второго на 40°.

н) Один из углов треугольника равен $\frac{1}{4}$ от суммы всех трех его углов. Два других угла равны. Найдите углы треугольника.

Группа 31

164*. Дано (рис. 3.69): а) $AC \parallel BD$, $\angle DAB = \angle BDA$, $\angle CAD = 25°$. Какие из следующих утверждений можно доказать на основе этих данных, а какие нельзя: 1) $\angle ADB = 25°$; 2) $\angle BAD = 25°$; 3) луч AD делит $\angle CAB$ пополам; 4) $\angle B = 130°$; 5) $AB = 5$ см; 6) $\angle CAB + \angle DBA = 180°$; 7) $\angle ACD = 130°$? б) Углы какого из двух треугольников ACD и DBA можно найти, а какого нельзя?

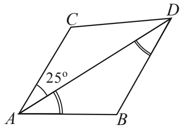


Рис. 3.69

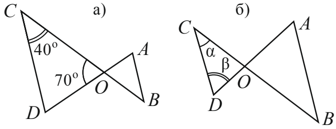


Рис. 3.70

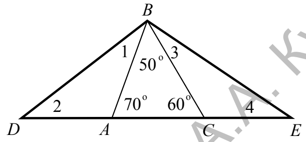


Рис. 3.71

165*. Как видно, данные, имеющиеся в предыдущей задаче, не позволяют доказать на их основании утверждения 5 и 7 (их недостаточно для этого). А если к этим данным добавить еще какие-либо условия? Нельзя ли на основании более широкого набора данных доказать эти утверждения?

Землянин: Постановка такого вопроса вполне естественна. Действительно, если к данным предыдущей задачи добавить дополнительные условия (это надо суметь сделать!), то утверждения 5 и 7 могут быть доказаны. Надо попытаться подобрать такие условия.

166. а) Дано (рис. 3.70а): $AB \parallel CD$, $\angle C = 40°$, $\angle COD = 70°$. Найдите углы треугольников ABO и COD.

б) Дано (рис. 3.70б): $AB \parallel CD$, $\angle C = \alpha$, $\angle COD = \beta$. Найдите остальные углы треугольников ABO и COD.

167. Даны углы треугольника ABC (рис. 3.71): $\angle BAC = 70°$, $\angle ABC = 50°$, $\angle BCA = 60°$. Известно так же, что $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. Найдите углы треугольника DBE. Есть ли в задаче лишнее данное?

Дополнительные задачи

168. Докажите: «Два угла, с соответственно перпендикулярными сторонами:

а) равны, если они оба острые или тупые;

б) в сумме составляют 180°, если один из них острый, а другой – тупой».

169. Докажите теорему: «Сумма внешних углов треугольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360°».

170. Докажите, что сумма:

а) внутренних углов четырехугольника (рис. 3.72,а) равна 360°;

б) внешних углов четырехугольника, взятых по одному при каждой вершине (рис. 3.72,б), также равна 360°.

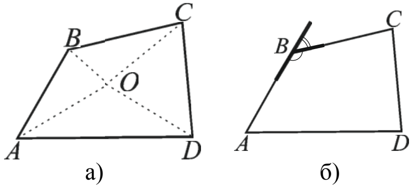


Рис. 3.72

Доказательства. а) Сумма внутренних углов четырехугольника получится, если от суммы углов треугольников разбиения отнимем 360° (сумму углов при вершине O).

б) Сумма внешних углов четырехугольника получится, если от суммы развернутых углов (каждый из которых состоит из внутреннего и внешнего углов) отнять сумму внутренних углов: $4 \cdot 180° - 360° = 360°$.

Угол между биссектрисами треугольника

171. Докажите, что: а) биссектрисы односторонних углов при двух параллельных прямых и секущей перпендикулярны;

б)* Справедливо и обратное: если биссектрисы односторонних углов перпендикулярны, то данные прямые параллельны.

172*. Угол B при вершине равнобедренного треугольника ABC равен 80°. Биссектрисы углов A и C пересекаются в точке O. Точку B соединили отрезком с точкой O. Найдите углы: а) AOC; б) AOB; в) BOC.

Землянин. Ознакомьтесь по учебнику со свойствами равнобедренного треугольника. Необходимо будет применить ещё 1-й признак равенства треугольников.

173. В равностороннем треугольнике ABC биссектрисы углов A и C пересекаются в точке O. Точку B соединили отрезком с точкой O. Найдите углы: а) AOC; б) AOB; в) BOC. См. указание к предыдущей задаче.

174. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $\angle A = 60°$. Биссектрисы углов A и B пересекаются в точке O. Точку C соединили отрезком с точкой O. Найдите углы: а) AOC; б) AOB; в) BOC. **Землянин**. Из точки O проведите перпендикуляры к сторонам треугольника.

175. Угол B при вершине произвольного треугольника ABC равен 80°. Биссектрисы углов A и C пересекаются в точке O. Найдите $\angle AOC$.

176. Угол B при вершине произвольного треугольника ABC равен 60°. Биссектрисы углов A и C пересекаются в точке O. Найдите $\angle AOC$.

177. Угол B при вершине произвольного треугольника ABC равен 40°. Биссектрисы углов A и C пересекаются в точке O. Найдите $\angle AOC$.

178. В произвольном треугольнике ABC биссектрисы углов A и C пересекаются в точке O и $\angle AOC = 140°$. Найдите $\angle B$.

Угол между высотами треугольника

179*. Угол B при вершине равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) равен 40°. Высоты, проведенные из вершин A и C, пересекаются в точке H. Точку B соединили отрезком с точкой H. Найдите угол: а) AHC: б) AHB: в) BHC.

180. В равностороннем треугольнике ABC высоты, проведенные из вершин A и C, пересекаются в точке H. Найдите угол: а) AHC; б) AHB; в) BHC.

Землянин: Какую закономерность вы заметили?

181. Угол B при вершине произвольного треугольника ABC равен 40°. Высоты, проведенные из вершин A и C, пересекаются в точке H. Найдите $\angle AHC$.

182. Угол B при вершине произвольного треугольника ABC равен 80°. Высоты, проведенные из вершин A и C, пересекаются в точке H. Найдите $\angle AHC$.

Задачи повышенной сложности

183*. Угол B при вершине равнобедренного треугольника ABC ($AB=BC$) равен 80°. Из вершины A проведены биссектриса и высота треугольника. Найдите угол между ними.

184*. Докажите, что сумма внутренних углов многоугольника с n сторонами равна $180°(n - 2)$.

Землянин. Доказательство проводится, как и для четырехугольника (см. задачу 170а).

185*. Докажите, что сумма внешних углов многоугольника с n сторонами, взятых по одному при каждой вершине, постоянна (не зависит от n) и равна 360°.

Указание. Доказательство проводится, как и для четырехугольника (см. задачу 170б).

186. Докажите, что четырехугольник является единственным многоугольником, у которого сумма внутренних углов, равна сумме внешних углов.

Доказательство. Для многоугольника с n сторонами запишем суммы внутренних и внешних углов и приравняем их: $180°(n - 2) = 360°$. Отсюда $n = 4$.

187*. В каком многоугольнике сумма внутренних углов в 3 раза больше суммы внешних углов?

188. Звёздчатый многоугольник (пример невыпуклого много-угольника) – многоугольник, у которого все стороны и углы равны, а вершины совпадают с точками деления окружности на равные части, число которых равно числу вершин звездчатого многоугольника. Постройте пятиконечную звезду (рис. 3.73).

Землянин. Для деления окружности на пять равных частей используйте транспортир.

189. Докажите, что в пятиконечной звезде (см. рис. 3.73) сумма углов *A, B, C, D* и *E* равна 180°; каждый из этих углов равен 36°.

Доказательство. Докажем, что сумма углов *A, B, C, D* и *E* данной звезды равна сумме углов треугольника *APQ* (рис. 3.74). Угол *A* входит в этот треугольник. Выясним, каким образом с этим треугольником связаны остальные углы звезды. Для этого рассмотрим углы 1 и 2, равные двум другим углам треугольника *APQ*. В свою очередь, углы 1 и 2 являются внешними углами треугольников *PBD* и *EQC*. Поэтому по свойству внешнего угла треугольника $\angle 1 = \angle B + \angle D$, $\angle 2 = \angle E + \angle C$. Тогда $\angle A + \angle 1 + \angle 2 = \angle A + (\angle B + \angle D) + (\angle E + \angle C) = \angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = 180°$. Отсюда следует, что каждый угол пятиконечной звезды равен 180°:5=36°.

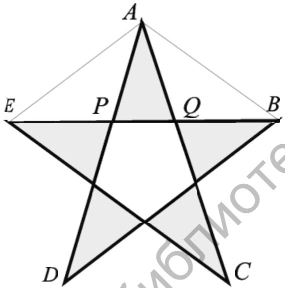


Рис. 3.73

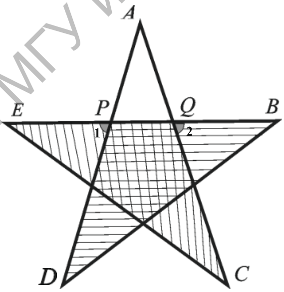


Рис. 3.74

190. а) Найдите углы треугольника *APQ* (см. рис. 3.74).

б) Найдите углы пятиугольника, заштрихованного на рисунке 3.74 двойной штриховкой.

в) На рисунке 3.73 проведены лучи *AB* и *AE*. Докажите, что лучи *AP* и *AQ* делят $\angle BAE$ на три равные части.

191. Внутренний угол треугольника равен разности двух внешних углов, не смежных с ним. Докажите, что треугольник прямоугольный.

Доказательство. Пусть $\alpha = \gamma' - \beta'$. Тогда $\alpha = (180° - \gamma) - (180° - \beta)$, $\alpha - \beta + \gamma = 0$. Сложим последнее равенство с равенством $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, получим $2\alpha + 2\gamma = 180°$, $\alpha + \gamma = 180°$, $\beta = 90°$.

192. Известны отношения двух внутренних и двух внешних углов при тех же вершинах треугольника: $\alpha : \beta = 2 : 3$, $\alpha' : \beta' = 4 : 3$. Докажите, что $\beta = 90°$.

3.3. СИСТЕМА ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ 3 «ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ. ТЕОРЕМА ФАЛЕСА»

Второй признак равенства треугольников
Равнобедренный треугольник
Третий признак равенства треугольников
Равенство прямоугольных треугольников
Теорема Фалеса
Средняя линия треугольника. Точка пересечения медиан треугольника

Основные задачи

Группа 32

Определение равнобедренного треугольника. Свойство медианы, проведенной к основанию

193. а) Боковая сторона равнобедренного треугольника относится к основанию как 3 к 2. Периметр треугольника равен 24 см. Найдите стороны треугольника.

б) Боковая сторона равнобедренного треугольника относится к высоте, проведенной к основанию, как 5 к $\sqrt{21}$. Периметр треугольника равен 28 см. Найдите стороны треугольника. **Землянин**: Без теоремы Пифагора не обойтись. См. п. 2.2.4.

——————————————

в) Боковая сторона равнобедренного треугольника относится к высоте, проведенной к боковой стороне, как 5 к 3. Периметр треугольника равен $2(10+\sqrt{10})$. Найдите стороны треугольника. **Землянин**: Тут тоже нужна теорема Пифагора.

194. а) (устно). Угол *B* равнобедренного треугольника *ABC* (*AB* = = *BC*) равен 40°. Найдите угол между боковой стороной треугольника и проведенной из вершины *B* медианой.

б) Угол *B* при вершине равнобедренного треугольника *ABC* (*AB* = = *BC*) равен 80°. Найдите угол между медианой, проведенной из вершины *B*, и: 1) биссектрисой угла *A*; 2) высотой, проведенной из вершины *A*. (Углы обращены к боковой стороне *AB*).

195. Найдите углы равнобедренного треугольника *ABC* (*AB* = *BC*), если угол между медианой, проведенной из вершины *B*, и биссектрисой угла *A* (обращенный к стороне *AB*) равен 130°.

Группа 33

1-й–3-й признаки равенства треугольников

В задачах 196–211 найдите пары равных треугольников, докажите их равенство и равенство некоторых их элементов. Какие признаки равенства треугольников необходимо применить? Равные отрезки отмечены одинаковым количеством черточек, равные углы – одинаковым количеством дуг. Часть задач решается устно.

196.

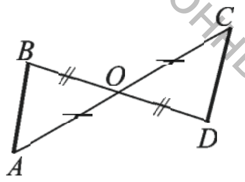


Рис. 3.75

Доказать:
$AB = CD$, $\angle A = \angle C$,
$AB \parallel CD$

197. BM и DN – высоты, $\Delta OAB = \Delta OCD$

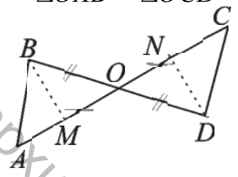


Рис. 3.76

Доказать: $BM = DN$.

198. AE и CF – биссектрисы, $\Delta OAB = \Delta OCD$

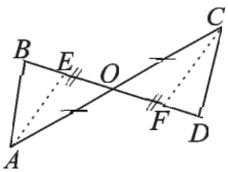


Рис. 3.77

Доказать: $AE = CF$.

199. OG и OH – медианы, $\Delta OAB = \Delta OCD$

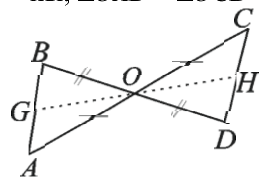


Рис. 3.78

Доказать: $OG = OH$.

200.

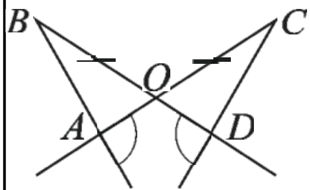


Рис. 3.79

Доказать: $OA = OD$,
$\angle B = \angle C$

201. AM и DN – высоты, $\Delta OAB = \Delta ODC$

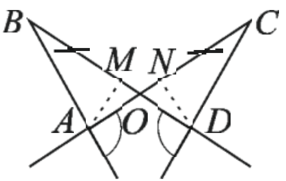


Рис. 3.80

Доказать: $AM = DN$.

202. AE и DF –биссектрисы, $\Delta OAB = \Delta ODC$

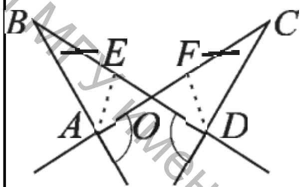


Рис. 3.81

Доказать: $AE = DF$.

203. OG и OH – медианы, $\Delta OAB = \Delta ODC$

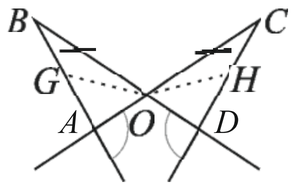


Рис. 3.82

Доказать: $OG = OH$.

204.

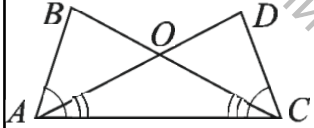


Рис. 3.83

Доказать: $AD = BC$.

205. Дано: CN и AM – высоты, $\Delta ABC = \Delta CAD$

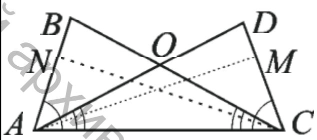


Рис. 3.84

Доказать: $CN = AM$.

206. BE и DF – биссектрисы, $\Delta ABC = \Delta CAD$

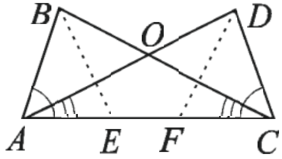


Рис. 3.85

Доказать: $BE = DF$.

207. BG и DG – биссектрисы, $\Delta ABC = \Delta CAD$

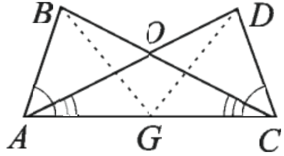


Рис. 3.86

Доказать: $BG = DG$.

208.

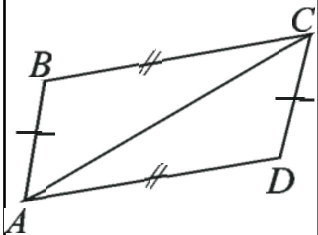


Рис. 3.87

Доказать: $\angle B = \angle D$, $\angle A = \angle C$

209. BM и DN – высоты, $\Delta ABC = \Delta CDA$

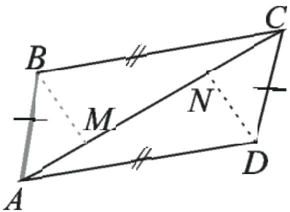


Рис. 3.88

Доказать: $BM = DN$.

210. BE и DF – биссектрисы, $\Delta ABC = \Delta CDA$

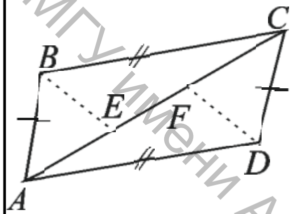


Рис. 3.89

Доказать: $BE = DF$.

211. BG и DG – биссектрисы, $\Delta ABC = \Delta CDA$

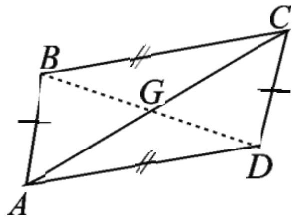


Рис. 3.90

Доказать: $BG=DG$.

Группа 34

Высоты, биссектрисы и медианы, проведенные к боковым сторонам равно-бедренного треугольника

212. Докажите равенство высот, проведенных к боковым сторонам равнобедренного треугольника.

213. Докажите равенство биссектрис, проведенных к боковым сторонам равнобедренного треугольника.

214. Докажите равенство медиан, проведенных к боковым сторонам равнобедренного треугольника.

———————————

215. Биссектриса угла при основании равнобедренного треугольника *ABC* отсекает от него два равнобедренных треугольника. Найдите углы треугольника *ABC*. Сколько равнобедренных треугольников вместе с данным получилось?

Группы 35–36

Признаки равенства прямоугольных треугольников

В задачах 216–235 найдите пары равных прямоугольных треугольников, докажите их равенство и равенство некоторых их элементов.

216 (устно)

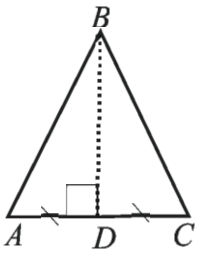


Рис. 3.91

Док.: $AB = BC$.

217 (устно)

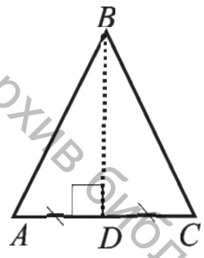


Рис. 3.92

Док.: $\angle A = \angle C$

218 (устно)

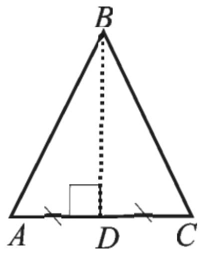


Рис. 3.93

Док.: $\angle ABD = \angle CBD$

219 (устно)

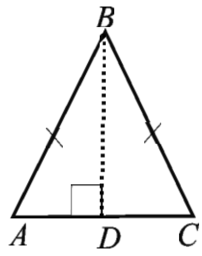


Рис. 3.94

Док.: $AD = DC$.

220 (письменно)

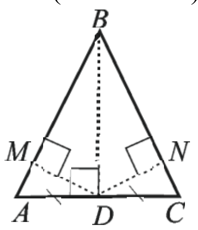


Рис. 3.95

Док.: $DM = DN$.

221.

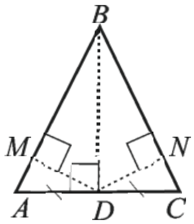


Рис. 3.96

Док.: $AM = CN$.

222.

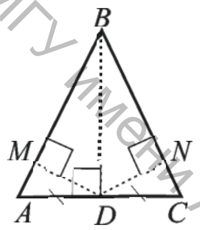


Рис. 3.97

Док.: $BM = BN$.

223.

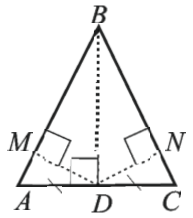


Рис. 3.98

Док.: $\angle ADM = \angle CDN$

224.

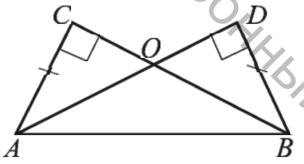


Рис. 3.99
Док.: $AO = OB$.

225.

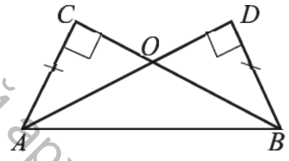


Рис. 3.100
Док.: $CO = OD$.

226.

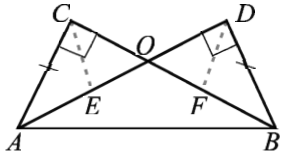


Рис. 3.101
Док.: $CE = DF$.

227.

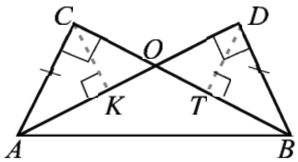


Рис. 3.102
Док.: $CK = DT$.

228. OC – биссектриса $\angle AOB$

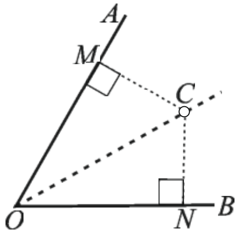


Рис. 3.103
Док.: $CM = CN$.

229. $CM = CN$.

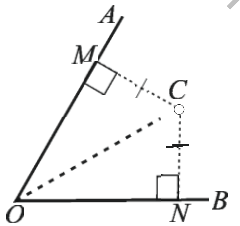


Рис. 3.104
Док.: OC – биссектриса $\angle AOB$

230. OC – биссектриса $\angle AOB$

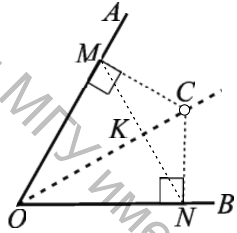


Рис. 3.105
Док.: $OC \perp MN$.

231. OC – биссектриса $\angle AOB$

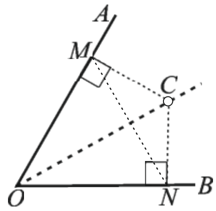
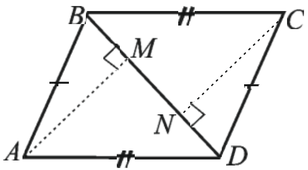
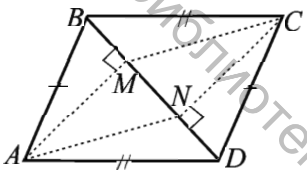
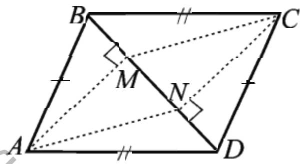
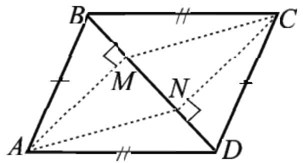


Рис. 3.106
Док.: $\angle CMN = \angle CNM$

232.  Рис. 3.107 Док.: $CM = CN$.	**233.**  Рис. 3.108 Док.: $BM = DN$.	**234.**  Рис. 3.109 Док.: $CM = AN$.	**235.**  Рис. 3.110 Док.: $\angle CMB = \angle AND$

Группа 37

236. Будут ли равны прямоугольные треугольники, если: а) катеты одного треугольника равны катетам другого; б) острые углы одного из них равны острым углам другого; в) гипотенузы треугольников равны?

——————————————

237. На рисунке 3.111 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle D = \angle E = 90°$, $BD = CE$. Нет ли ошибки на этом рисунке? (Опровержение ошибки – это тоже доказательство.)

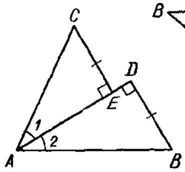


Рис. 3.111

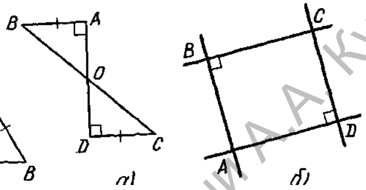


Рис. 3.112

238*. а) На рисунке 3.112, а $\angle A = \angle D = 90°$, $BA = CD$. Какие задачи можно составить по этому рисунку?

б) На рисунке 3.112,б $BC \parallel AD$, $AB \perp BC$, $CD \perp AD$. Составьте задачи, в которых требовалось бы доказать перпендикулярность и параллельность прямых, равенство отрезков и углов.

Группа 38

239. а) Точка K (рис. 3.113) лежит на биссектрисе угла AOB, $KA \perp OA$, $KB \perp OB$. Какие из следующих утверждений можно доказать на основании этих данных, а какие нельзя:

1) $\Delta OKA = \Delta OKB$; 2) $KA = KB$;
3) $OA = OB$; 4) $\angle OKA = \angle OKB$;
5) $\angle AKB = 50°$; 6) $\angle AKB = 180° - \angle AOB$;

——————————————

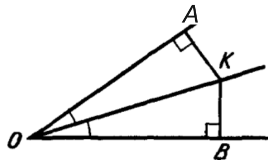


Рис. 3.113

б) Перпендикуляры, проведенные из внутренней точки K данного угла к его сторонам, равны. Можно ли доказать, что точка K лежит на биссектрисе этого угла? Как?

Группы 39–40

Построение прямоугольных треугольников

Землянин. Не забывайте чертежные инструменты!

240. а) Постройте прямоугольный треугольник по двум катетам. б) Постройте равнобедренный треугольник по основанию и высоте, проведенной к основанию.

в) Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и катету.

г) Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и острому углу.

д) Постройте прямоугольный треугольник по катету и прилежащему углу.

е) Как построить серединный перпендикуляр к отрезку, середина которого недоступна?

Нельзя ли сформулировать другие признаки равенства прямоугольных треугольников, используя медианы и биссектрисы?

241. а) Постройте прямоугольный треугольник по катету и медиане, проведенной к этому катету.

б)* Постройте прямоугольный треугольник по катету и медиане, проведенной к другому катету. **Землянин**. Без циркуля не обойтись.

в)* Постройте прямоугольный треугольник по острому углу и биссектрисе этого угла.

Землянин. Можно пользоваться всеми инструментами.

Группа 41

242. Будут ли равны прямоугольные треугольники по: а) катету и медиане, проведенной к этому катету; б) катету и медиане, проведенной к другому катету; в) острому углу и биссектрисе этого угла?

——————————————

243. а) Составьте план построения прямоугольного треугольника по: 1) катету и биссектрисе острого угла, прилежащего к этому катету; 2) острому углу и биссектрисе другого острого угла.

б) Будут ли равны прямоугольные треугольники по: 1) катету и биссектрисе острого угла, прилежащего к этому катету; 2) острому углу и биссектрисе другого острого угла?

в) Внутри угла AOB проведен луч OC, $\angle AOB = 120°$, $\angle AOC = 50$ (углы построены с помощью транспортира). Далее, пользуясь только циркулем и линейкой, разделите $\angle AOB$ на шесть равных углов. **Землянин**. Воспользуйтесь окружностью с центром в точке O.

Группа 42

244. а) Обратимся к доказательству теоремы Фалеса:

«Если на стороне угла отложим от его вершины равные отрезки и через точки деления проведём параллельные прямые, пересекаю-

щие другую сторону угла, то и на этой стороне угла отсекутся равные между собой отрезки» (рис. 3.114).

Что дано в этой теореме? Что нужно доказать? Какой признак равенства треугольников применяется при доказательстве теоремы?

——————————————

б) Обратимся к доказательству теоремы, обратной теореме Фалеса: **«Если на одной стороне угла отложим от его вершины равные отрезки и на другой стороне угла отложим равные между собой отрезки, то прямые, проходящие через соответственные концы отрезков, параллельны»** (рис. 3.115).

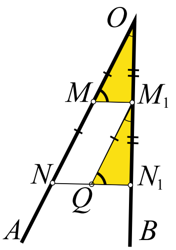


Рис. 3.114

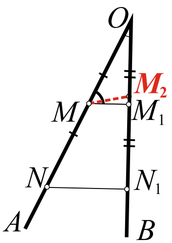


Рис. 3.115

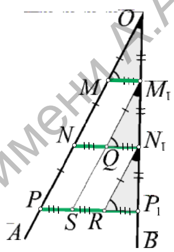


Рис. 3.116

Какое предположение делается при доказательстве обратной теоремы методом от противного? К какому противоречию приводит метод от противного? (см. рис. 3.115).

Группа 43

Теорема Фалеса и отношение отрезков, лежащих на сторонах угла. Средняя линия треугольника

245. Под **отношением отрезков** понимается отношение длин этих отрезков. Например, если на рисунке 3.114 $OM = 5$ см и $ON = 10$ см, то $OM : ON = 1 : 2$. Убедитесь в том, что на рисунке 3.114 $\frac{OM}{ON} = \frac{O_1M_1}{O_1N_1}$. Чему равны эти отношения?

246 (устно). Чему равны эти отношения $\frac{ON}{OM} = \frac{O_1N_1}{O_1M_1}$ (см. рис. 3.14)?

247 (устно). Сделайте общий вывод: **отношение любых двух отрезков, лежащих на одной стороне угла в теореме Фалеса равно …** .

——————————————

248*. Отношение отрезков, лежащих на сторонах угла в теореме Фалеса, равно отношению отрезков, лежащих на параллельных прямых, пересекающих стороны угла. Докажите, пользуясь рисунком 3.116, что

$$\frac{OP}{OM}=\frac{O_1P_1}{O_1M_1}=\frac{PP_1}{MM_1};\quad \frac{ON}{OM}=\frac{O_1N_1}{O_1M_1}=\frac{NN_1}{MM_1}.$$

Землянин. Задача, имеющая теоретическое значение! Учтите равенство отрезков!

249. Докажите, что средняя линия треугольника, соединяющая середины двух сторон, параллельна третьей стороне и равна её половине.

Группа 44

Средняя линия треугольника в задачах на вычисление. Катет, лежащий против угла в 30°

250. Стороны треугольника равны 8 см, 10 см и 12 см. Найдите периметр треугольника, вершинами которого служат середины сторон данного.

251. Средняя линия равнобедренного треугольника, параллельная основанию, равна 3 см. Найдите стороны треугольника, если его периметр равен 16 см.

————————————

252*. Боковая сторона равнобедренного треугольника относится к основанию как 5:6. Найдите средние линии треугольника, если его периметр равен 96 см.

253. Боковая сторона равнобедренного треугольника относится к основанию как 3:5 и меньше основания на 16 см. Найдите средние линии треугольника.

254. Стороны треугольника относятся как 4:5:6. Как относятся его средние линии?

255. Сравните углы данного треугольника и треугольника, образованного его средними линиями.

256. Средняя линия треугольника перпендикулярна к одной из его сторон. Имеется ли в этом треугольнике прямой угол?

Группа 45

257. а) Параллельные прямые пересекают стороны угла AOB (рис. 3.117,а). Найдите M_1N_1, если $ON = 5$ см, $ON_1 = 3$ см, $MM_1 = 6$ см, $NN_1 = 3$ см.

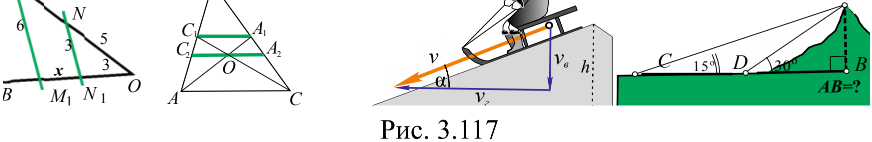


Рис. 3.117

б) Дан ΔABC (рис. 3.117,б), точка O – точка пересечения его медиан AA_1 и CC_1. Отрезок A_2C_2 проходит через точку O и параллелен отрезку A_1C_1. Найдите длины отрезков A_1C_1 и A_2C_2, если $AC = 12$.

————————————

258 (**Землянин**. Задачи решаются с одного взгляда!)

а) Санки скользят по ледяной горке (рис. 3.117в). Угол наклона траектории санок к горизонтальной плоскости $\alpha = 30°$, а скорость движения $v = 1$ м/с. Вычислите вертикальную скорость санок ($v_в$). Какой высоты горка, если санки съехали с нее за 20 с?

Землянин. Вертикальная скорость – скорость, с которой санки «снижаются» в вертикальном направлении.

Решение. $v_в = \dfrac{1}{2}v = \dfrac{1}{2}\cdot 1 = \dfrac{1}{2}$ (м/с), $h = v_в t = \dfrac{1}{2}\cdot 20 = 10$ (м).

б) Для измерения высоты холма (рис. 3.17г) отошли от него по прямой и отметили точку D, из которой вершина холма видна под $\angle ADB =$ $= 30°$, и точку C, из которой вершина холма видна под $\angle ACB = 15°$. Какое расстояние осталось измерить, чтобы найти высоту холма?

Дополнительные задачи

Деление отрезка на равные части. Средняя линия треугольника в задачах на построение

259. а) На рисунке 3.118а показано как с помощью линейки, циркуля и чертежного треугольника разделить данный. отрезок AB на 5 равных частей. Выполните эти построения.

б) После того как на отрезке AB построили первый отрезок, равный 1/5 AB остальные отрезки можно построить одним только циркулем. Выполните эти построения.

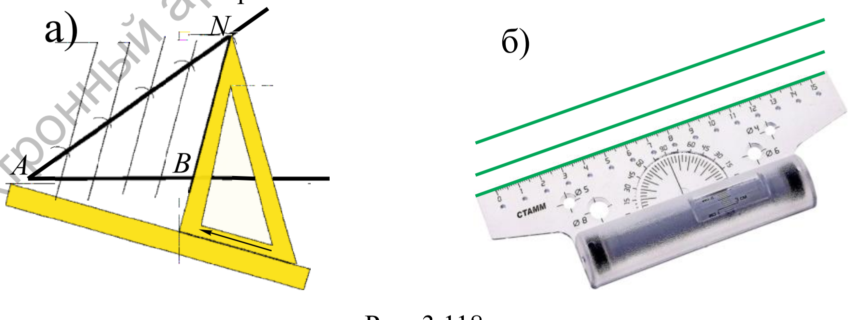


Рис. 3.118

в) Начертите некоторый отрезок AB и разделите его на 3 равные части.

г) Постройте другой отрезок и на нём точку X такую, что $AX:XB = 2:3$.

д) Существует целый ряд профессиональных чертежных инструментов. Один из них показан рисунке 3.118б – линейка на роликах. На этих роликах ее можно катить, при этом край линейки перемещается параллельно самому себе. Расскажите, каким образом ею можно воспользоваться, например, при решении задачи а).

260. Через внутреннюю точку угла проведите прямую так, чтобы отрезок ее, заключенный между сторонами угла, делился данной точкой: а) пополам; б) в отношении 1 : 2, считая от точки, лежащей на первой стороне угла.

261*. Построение равнобедренного треугольника ABC по основанию и медиане, проведенной к боковой стороне, показано на рисунке 3.119а. В какой последовательности выполняются эти построения? Как по имеющимся данным построить ΔAND ? Как с его помощью построить искомый ΔABC ?

262. а) Даны три точки P, H и M, которые являются серединами сторон искомого треугольника ABC. Постройте ΔABC.

б) На плоскости даны три точки A, M и K: точка A – вершина искомого треугольника ABC, MK – средняя линия треугольника ABC, параллельная AC. Постройте ΔABC. Задача имеет два решения, найдите их.

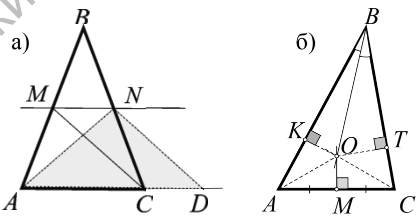


Рис. 3.119

263* (*геометрический софизм*). Софизм – это «доказательство» ложного утверждения, причем ошибка в доказательстве тщательно замаскирована. Отыскание ошибок в софизмах – весьма поучительный вид математических задач, развивающих математическую «зоркость», критичность мышления. «Докажем», что все треугольники являются равнобедренными (рис. 3.119б). Найдите ошибку!

«Доказательство». Пусть ΔABC – произвольный треугольник. Проведем в нем биссектрису $\angle B$ и серединный перпендикуляр к стороне AC, построим точку O – точку их пересечения. Из точки O проведем перпендикуляры OK и OT соответственно к сторонам AB и BC. Точку O соединим еще с вершинами A и C. По свойству точек биссектрисы угла $OK = OT$. По свойству серединного перпендикуляра к отрезку $OA = OC$. Тогда $\Delta OAK = \Delta OCT$ по катету и гипотенузе. Из их равенства следует, что $\angle KAO = \angle TCO$. Кроме того, $\angle OAM = \angle OCM$ (в силу равенства: $\Delta OAM = \Delta OCM$). Тогда $\angle BAC = \angle BCA$ (они состоят из равных углов). Если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный. Итак, «доказано», что все треугольники являются равнобедренными. Это утверждение, разумеется, ложное. Где ошибка?

264. Докажите, что если в треугольнике две медианы равны, то треугольник равнобедренный. (Воспользуйтесь рисунком 3.119а.)

265. Вершины прямоугольного треугольника ABC лежат на окружности с центром O, AB является ее диаметром. Из точки O проведен перпендикуляр OM к стороне AC. Докажите, что OM – средняя линия треугольника ABC.

266 Землянин: Мои самые любимые задачи на вычисление!

а) По разные стороны от прямой даны две точки A и B. Перпендикуляры, проведенные из этих точек на прямую, соответственно равны 10 см и 4 см. Найдите длину перпендикуляра, проведенного из середины O отрезка AB к данной прямой.

б) По разные стороны от прямой даны две точки A и B. Перпендикуляры, проведенные из этих точек на прямую, соответственно равны a и b ($a \geq b$). Найдите длину перпендикуляра, проведенного из середины O отрезка AB к данной прямой.

в) По одну сторону от прямой даны две точки A и B. Перпендикуляры, проведенные из этих точек на прямую, соответственно равны 10 см и 4 см. Найдите длину перпендикуляра, проведенного из середины O отрезка AB к данной прямой.

г) По одну сторону от прямой даны две точки A и B. Перпендикуляры, проведенные из этих точек на прямую, соответственно равны a и b. Найдите длину перпендикуляра, проведенного из середины O отрезка AB к данной прямой.

д) По одну сторону от прямой даны две точки A и B, лежащие на одном перпендикуляре к данной прямой, которые равны соответственно a и b ($a > b$). Найдите длину перпендикуляра, проведенного из середины O отрезка AB к данной прямой.

3.4. СИСТЕМА ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ 4 «ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ ЦИРКУЛЕМ И ЛИНЕЙКОЙ»

Построение отрезков и углов
Построение прямоугольного треугольника
Построение равнобедренного треугольника
Построение произвольного треугольника

Решение задачи на построение включает в себя следующие этапы: *поиск решения задачи, построение, доказательство и исследование.* Особенно трудоемким является исследование, из-за чего его не всегда рекомендуют проводить в средней школе. В данной работе исследование выделяется иногда отдельной задачей, сопровождающей задачу на построение, помещаемой в дополнительном отделе в качестве задачи повышенной сложности.

Задача считается правильно решенной, если правильно указана последовательность построений со ссылками на основные построения. В связи с этим в формулировке задачи иногда говориться не «построить фигуру», а «составить план построений». Если задача сводится к ранее решенным основным задачам на построение, то заново их выполнять не нужно. Запись построений выполняется кратко, без дублирования построений, входящих в основные построения.

В современной инженерной практике обычный циркуль и линейка уже не используются, **все построения выполняются на компьютере.** Поэтому построения рекомендуется выполнять (по возможности) с помощью простых и достаточно эффективных компьютерных программ CorelDraw-2017 или «Живая геометрия».

Чертеж для анализа может выполняться в основном или частично от руки. Вместе с этим необходимо иметь в виду, что чем точнее рисунок для анализа, тем легче найти решение задачи. Если стороны и углы треугольника на рисунке вместе с задачей не приводятся, то угол можно построить при помощи линейки, прямой угол с помощью чертежного треугольника или с помощью линий клетчатой тетрадной страницы. Окружность, разумеется, надо строить с помощью циркуля. Иногда достаточно ограничиться только поиском решения задачи и записью плана построений, приводя лишь схематичный рисунок. В большей части задач все этапы решения, кроме исследования, являются общедоступными. В этом случае исследование сообщается в готовом виде в разделе «Ответы», его рекомендуется разбирать непосредственно на уроке, коллективно, под руководством учителя. Необходимо иметь в виду, что при решении задач на построение достаточно активно происходит повторение теоретического материала.

Основные задачи

Группа 46

Построение отрезков и углов Не забывайте чертежные инструменты!

267. Даны отрезки AB и CD ($AB > CD$) Постройте их: а) сумму; б) разность; в) половину сумму построенных двух предыдущих отрезков.

268. Дан отрезок AB. Постройте точку X, которая делила бы отрезок AB, считая от точки A, в отношении: а) 1:2; б) 2:3; в) $\frac{1}{3}:\frac{3}{4}$.

—————————————

269. а) Разделите отрезок AB, точкой X в отношении $AX{:}AB = \sqrt{2}:1$.

б) Дан равносторонний треугольник. Постройте отрезок, равный периметру этого треугольника.

в) Дан отрезок, равный периметру равностороннего треугольника. Постройте отрезок, равный стороне этого треугольника. **Землянин**. Не забыли ли Вы теорему Фалеса?

Группа 47

270. Постройте квадрат, сторона которого равна 1, и отрезки, равные: а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{2}/2$; в) $2\sqrt{2}$; г) $1+\sqrt{2}$;

—————————————

271. а) Дан прямой угол. Постройте луч, который бы делил этот угол: 1) на два равных угла; 2) на углы, равные 60° и 30°; 3) на три равных угла.

б) Дан развернутый угол. Разделите его: 1) на 3 равных угла; 2) на 4 равных угла; 3) на 6 равных углов.

272. Даны два угла. Постройте: а) их сумму; б) их разность.

273. Дан угол, равный 1/4 одного из смежных углов. Постройте смежные углы.

Группа 48

274. Даны два угла треугольника. Постройте третий угол этого треугольника.

———————————

275. Дан острый угол прямоугольного треугольника. Постройте другой острый угол этого треугольника.

276. Постройте серединный перпендикуляр к данному отрезку, расположенному наклонно.

277. Постройте серединный перпендикуляр к данному отрезку, расположенному вертикально.

278. Даны отрезок AB и прямая a. На прямой a постройте точку X, которая бы была равноудалена от концов отрезка AB.

Группа 49

279. Даны прямая a и два отрезка, равные m и n. В одной полуплоскости от прямой a постройте две точки A и B, такие, что перпендикуляр, проведенный из точки A к прямой a, равнялся бы m, а перпендикуляр, проведенный из точки B к прямой a, равнялся бы n.

———————————

280. Даны прямая a, точки A и B, расположенные по одну сторону от прямой a, точка A_1, симметричная точке A относительно прямой a. Пользуясь только линейкой, постройте точку B_1, симметричную точке B относительно прямой a.

281. Даны три точки A, B и точка A_1, симметричная точке A относительно некоторой не данной в условии задачи точки. Постройте точку B_1, симметричную относительно этой неизвестной точки.

282. Постройте угол, равный: 60°: 30°, 15°.

Группа 50

Построение прямоугольного треугольника

283. а) Составьте план построения прямоугольного треугольника по острому углу и прилежащему катету. Приведите схематичный рисунок.

———————————

б) Постройте прямоугольный треугольник по углу, равному 30°, и прилежащему катету.

в) Постройте прямоугольный треугольник по углу, равному 30°, и противолежащему катету.

284. а) Постройте прямоугольный треугольник по данному катету a и гипотенузе c.

б) Проведите исследование решения задачи 284а.

Группа 51

285. а) Можно ли указанные в предыдущей задаче построения применить к построению тупоугольного треугольника ABC, в котором даны тупой угол C и стороны a и c?

—————————————

б) Проведите исследование решения задачи 285а.

286. Составьте план построения прямоугольного треугольника по катету и медиане, проведенной к этому катету (достаточно привести схематичный рисунок).

287. Составьте план построения прямоугольного треугольника по катету и медиане, проведенной к другому катету.

288. а) Постройте прямоугольный треугольник по катету и медиане, проведенной к гипотенузе.

б) Постройте прямоугольный треугольник по катету и радиусу описанной окружности.

Группа 52

289. Составьте план построения прямоугольного треугольника по катету и биссектрисе прилежащего острого угла.

—————————————

290. Постройте прямоугольный треугольник по катету и высоте, проведенной к гипотенузе.

291. Постройте прямоугольный треугольник по острому углу и биссектрисе, проведенной из вершины прямого угла.

292. Постройте прямоугольный треугольник по острому углу и медиане, проведенной к гипотенузе.

293. Постройте прямоугольный треугольник по острому углу и высоте, проведенной к гипотенузе.

Группа 53

Построение равнобедренного треугольника

294. Постройте равнобедренный ΔABC ($AB = BC$) по основанию b и высоте h_b

—————————————

295. Постройте равнобедренный ΔABC ($AB = BC$) по основанию b и углу A.

296. Постройте равнобедренный ΔABC ($AB = BC$) по основанию b и высоте h_a.

297. а) Постройте равнобедренный ΔABC ($AB = BC$) по боковой стороне c и высоте h_c, проведенной к этой стороне.

б) Проведите исследование решения задачи 297а.

298. Постройте ΔABC по острому углу A, стороне c и биссектрисе $l_ь$.

Дополнительные задачи

299. а) Даны три точки: точка A – вершина треугольника, точки K и P – середины двух сторон. Постройте ΔABC и его средние линии (два решения).

б) Дан ΔABC, у которого недоступна только вершина B, но именно через эту вершину необходимо провести медиану. Как это сделать?

300. а) Постройте ΔABC двум углам A и B и стороне c.

б) Постройте ΔABC по двум углам A и B и стороне b.

301. Постройте ΔABC двум углам A и B и высоте h_c.

302. Постройте равнобедренный треугольник по боковой стороне и медиане, проведенной к этой стороне.

203. Постройте равнобедренный треугольник по основанию и медиане, проведенной к боковой стороне.

304. Постройте равнобедренный прямоугольный треугольник по гипотенузе.

305. Постройте равнобедренный прямоугольный треугольник по радиусу описанной окружности.

306. Составьте план построения равнобедренного треугольника по углу при основании и биссектрисе, проведенной к боковой стороне.

307. Постройте ΔABC по стороне a, высоте h_c и углу A.

308. Постройте ΔABC по стороне c, высоте h_c и углу B.

309. Постройте ΔABC по сторонам a и b и высоте h_c.

310. Постройте ΔABC по стороне c, медиане m_c и высоте h_c.

311. Постройте ΔABC по двум сторонам b и c и радиусу R описанной окружности.

312. Постройте ΔABC по стороне c, высоте h_c и радиусу R описанной окружности.

3.5. ОТВЕТЫ И ПОМОЩЬ

Первые геометрические понятия и аксиомы

1. Какими, например, множествами (конечными или бесконечными) являются множество точек окружности и множество её центров. **2**. Пересечение двух геометрических фигур является геометрической фигурой.

В качестве примера фигуры, не имеющей ни одной точки, можно нарисовать, например, два отрезка, пересечение которых есть пустое множество, т.е. пересечение отрезков не содержит ни одной общей точки. **3а.** Это понятия «точка принадлежит плоскости», «точка принадлежит прямой». **4а**. Обратите внимание, сколько кривых линий можно провести через две точки, а сколько прямых? **5а.** Нет, не делит. Объясните почему? **5б**. Окружность делит плоскость на две части, но прямой не только визуально (внешне), но и по признакам не является. Проверьте, например, выполняется ли для окружности утверждение «Если две точки принадлежат одной части плоскости, то отрезок, соединяющий их, не пересекает окружность». **5в**. На две. **7**. Если отрезок «потерял» хотя бы одну свою точку, отрезком уже не является. **8б**. Несправедливо. Приведите пример. **9.** Например, морская миля, равная 1852 м. **10а.** Потому что длина зависит от выбора единицы измерения. Единственность её имеет место только для выбранной единицы измерения. **10б**. При переводе сантиметров в миллиметры учтите, что сантиметр в 10 раз больше миллиметра. Поэтому сантиметры нужно умножить на 10. **11а.** Не лежат. Почему? Проверьте, равна ли сумма двух меньших расстояний большему расстоянию. **11б.** Точка C. **11в**. Для этого вначале найдите длину отрезка AM. **11д**. Постройте вначале данные точки A и M, затем учтите, во сколько раз $AB > AM$. **11е.** 6. Вначале сократите дробь в правой части пропорции. **13а.** 5 см и 9 см. **13б.** 3 см и 12 см. **13в.** 12 см и 4 см. **13г**. 18; 6. **14а.** 12 см, 16 см, 20 см. **14б.** Обозначьте длины сторон исходного треугольника через a, b, c. **15б.** Приведите рисунок. Выясните, сколько см приходится на одну третью часть всего отрезка и сколько см на две половинки этой одной третьей части. **16в.** $6\frac{2}{3}$ см. **16г**. 1) 6; 2) 2,5. **17а.** 1) 1. **17б.** 1) 2. **17в**. Воспользуйтесь таблицей квадратов и квадратных корней. **17г.** 1) 13. **17д.** 1) 5. **17е.** 1) 2. **18а**. Единица измерения – угол в 1° задается аксиомой IV.2 (это угол в 180 раз меньший развернутого угла). **18б**. 1) 20°. **18в**. $\left(32\frac{2}{3}\right)^\circ$ **19б**. 90°. **20а.** Повторите определение биссектрисы угла. **20д.** $\frac{1}{9}$. **23.** 4 пары. Приведите рисунок. Обозначьте углы и запишите их. **24б.** Вспомните, как решаются задачи по сумме и разности величин. **24г.** 50°. **24д.** 10°. **25.** Приведите рисунок. Обозначьте углы. Угол между биссектрисами запишите как сумму двух углов. Каких? **26а.** 30°.**26в.**

Нельзя ли воспользоваться вертикальными углами? **27а.** Обозначьте смежные углы буквами α и 180°– α. Воспользуйтесь тем, что угол между биссектрисами этих углов равен 90°.**28в.** Нисколько. Объясните ответ. **30.** Примените 1-й признак равенства треугольников. **32.** Примените вначале определение равных треугольников, затем 1-й признак равенства треугольников. **33а.** 4 пары. **33б.** 8 пар. **33в.** 5 пар. **33г.** Никто не прав. Ответ: 9 пар. **34**. 13. **35.** Докажите равенство треугольников. Сколько пар равных треугольников на этом рисунке? **39а.** На 3. **39б.** Прав первый ученик: на 6 частей. **40.** Проверьте, лежит ли точка *C* между точками *A* и *B*. **42.** 1) 148 616 000 км. 2) 149 384 000 км. **46.** Подсказка имеется на рисунке 3.15. Достаточно провести одну прямую. **47.** Удовлетворяет. **49.** 12. Нарисуйте трехцветный рисунок. **51.** Надо на одной прямой поставить две вехи и перемещаться затем по другой прямой с третьей вехой до тех пор, пока все три вехи не окажутся на одной прямой. Приведите рисунок. **55.** 90°. **56а.** 50 см. Построения проще выполнить так: на прямой от точки *A* последовательно отложить 10 равных маленьких отрезков, получится отрезок *AB*, разбитый на 10 частей. Постройте на рисунке точки, расстояние между которыми равно 15 см. **56б.** 36 см. Самый маленький отрезок обозначьте буквой x. **57а.** Постройте вначале отрезок, равный 2 см. Обратите внимание на то, что отрезок *CB* = 12 см. **57б**. Постройте вначале отрезок, равный 4 см. Обратите внимание на то, что на рисунке имеются отрезки, равные 5 см и 4 см. **57в.** Воспользуйтесь последовательным откладыванием угла, равного 27°Угол, равный 45°, получится при откладывании угла в 27° 5 раз. А не повторить ли аналогичные откладывания в противоположном направлении? **58.** Приведите рисунок. **59.** Составьте таблицу для n = 5; 6; … , n. **60.** На 7 частей. **61**. Составьте таблицу для n =1; 2; 3; …, n. **62.** Приведите рисунок. Построения начните с построения данного угла. **64г.** $a + b + c + d$ (см).

Внешний угол треугольника. Перпендикулярные и параллельные прямые. Сумма углов треугольника

73а. Например, ∠8 **75а.** Не всегда. Приведите пример. **76.** 540°. **77.** 90°. Какую ранее решенную задачу надо применить? **78а.** 72°, 108°. **78г.** 60° и 20°. **79а.** 60°. **79б**. 180°, 360°. **79в**. Не может. Почему? **79г**. 7:6:5; 60°, 80°; 140°, 120°, 100°. **80а.** 180°, 360°. **80б**. 180°, 360°. **81а.** Докажите вначале равенство треугольников. **81б.** 135°. **82.** 130°. Обратите внимание, что медиана проводится из вершины *A*. **83.** 110°. Аналогично предыдущей задаче. **84.** Возможно. **85.** Воспользуйтесь неравенством внешнего угла треугольника. **86.** Не могут. Какой больше? **87.** Не может. **88.** Воспользуйтесь неравенством внешнего угла треугольника. **89.** Докажите вначале, что $\angle 1 > \angle AED$. **90.** Пусть α, β, γ – внутренние углы треугольника, α', β', γ' – внешние углы треугольника. Запишите неравенства, в которых левая часть состоит из внешних углов, а правая из внутренних углов треугольника, и почленно сложите их, т.е. вначале сложите левые части, затем правые части. Убедитесь в том, что левая сумма будет больше правой суммы: $\alpha' > \beta$, $\alpha' > \gamma$, $\beta' > \alpha$, $\beta' > \gamma$, $\gamma' > \alpha$, $\gamma' > \beta$. Завершите решение задачи. **92.** Пусть α, β, γ – внутренние углы треугольника, α', β', γ' – внешние углы треугольника. Запишите равенство $(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha'+\beta'+\gamma')=180°\cdot 3$. Далее воспользуйтесь задачей 90. От этого равенства перейдите вначале к неравенству, содержащему только внешние углы ($2(\alpha'+\beta'+\gamma') > 180°\cdot 3...$), другой раз – только внутренние углы ($2(\alpha+\beta+\gamma) < 180°\cdot 3...$). Как это сделать? **94**. Примените 1-й признак равенства треугольников. **96.** Выполните рисунок 3.120а. Примените 1-й признак равенства треугольников. **97.** Выполните рисунок 3.120б. **98.** Выполните рисунок 3.120в. **99.** Обратите внимание на то, из каких углов состоит данный прямой угол. **100.** Выразите углы *COE* и *DOB* через равные углы. **102**. $\angle BOM = 55°$, $\angle BOA = 90°$, $\angle BOC = 110°$, $\angle DOM = 35°$, $\angle DOA = 70°$, $\angle DOC = 90°$, $\angle MOA = 35°$, $\angle MOC = 55°$, $\angle AOC = 20°$. Ответы обоснуйте. **105.** Выполните рисунок. Примените свойство то-

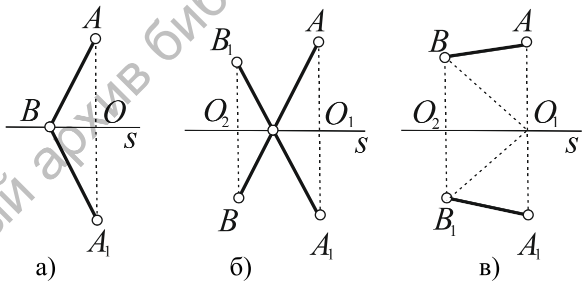


Рис. 3.120

чек, принадлежащих серединному перпендикуляру. **106.** Постройте вначале прозвольную прямую, перпендикулярную прямой *a* (с помощью транспортира или чертежного треугольника). Задача имеет сколько угодно решений (бесконечное множество). **107.** Постройте вначале отрезок AB, равный отрезку MN. Задача имеет бесконечное множество решений. **108.** Примените свойство точек, принадлежащих серединному перпендикуляру. **109.** Пройдет. Почему? **112.** Начните с построения секущей. **113.** Пример: добавление косой планки в калитке приводит к образованию треугольников, которые обладают жесткостью, придавая это свойство всей калитке. **118.** Величины накрест лежащих углов задайте с помощью транспортира. **121.** Примените свойство смежных углов. **125.** Не могут. **126**. Всегда. **127**. Могут, если углы односторонние. Уточните второй рисунок. **128**. Прямые окажутся параллельными, если углы будут односторонними. **129.** Прямые будут параллельны, если эти углы односторонние. Они будут также параллельными, если углы окажутся равными накрест лежащими углами в случае, если $\alpha = 90°$. **131.** Так как $\alpha + \left(180° - \frac{\alpha}{2}\right) \neq 180°$ (убедитесь в этом!), то прямые всегда не параллельны. **132**. Примените один из признаков параллельности прямых. **133.** Докажите равенство накрест лежащих углов. **138.** Примените 1-й признак равенства треугольников. **139а.** Дважды примените 1-й признак равенства треугольников. **146.** 55°. **147.** 70°. **148.** 110°. **149.** 115°. **150.** 110°. **151.** 105°. **152.** 45°. **153.** 90°. **154**. 90°. **155.** 90°. **156.** 90°. **157.** 90°. **158.** 90°. **159.** 45°. **160.** 90°. Решается так же, как задача 149. Можно обойтись одной параллельной прямой, проходящей через точку пересечения гипотенуз. Несколько проще решить задачу, если использовать еще одну параллельную прямую, проходящую через вершину A. Еще более простое решение получается, если использовать и третью параллельную прямую, проходящую через вершину E. **162**. На рис. 3.68аб – допущена ошибка, на рис. 3.68в ошибки нет. **163в.** Нет, не может. В противном случае бы сумма углов треугольника была бы меньше 180°. А этого быть не может. **163з.** 22,5°, 67,5°, 90°. **163и.** Доказательство проведите с помощью вычислений. Обозначьте один из равных углов буквой x. **163л.** 30°, 70°, 80°. **163м.** Не могут, так как сумма этих углов оказывается больше 180°. **163н.** 45°; 67,5°; 67,5°. **164а**. Нельзя утверждения 5 и 7. **166б.** α, β, $180° - (\alpha + \beta)$, $180° - (\alpha + \beta)$. **167.** 35°, 30°, 115°. Один из углов треугольника ABC лишний, достаточно указать только два угла. **168.** Используйте рисунок 3.121. **169.** Обратитесь к рисунку 3.122. Сложите пары смежных углов: $(\angle 1 + \angle 4) + (\angle 2 + \angle 5) + (\angle 3 + \angle 6) = 180° \cdot 3 = 540°$, $(\angle 4 + \angle 5 + \angle 6) + (\angle 1 + \angle 2 + \angle 3) = 540°$ и т. д.

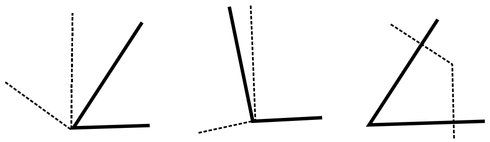


Рис. 3.121

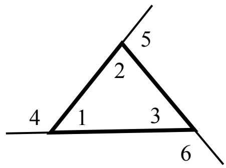


Рис. 3.122

172а. 130°. **172бв.** 115°, 115°. **173.** 120°. **174.** 135°, 120°, 105°. **175.** 130°. **176.** 120°. **177.** 110°. **178.** 100°. **179.** 140°,110°, 110°. **180.** 120°. **181.** 140°. Воспользуйтесь тем, что сумма углов четырехугольника равна... . **182.** 100°. **183.** 15°. Обратите внимание на расположение высоты и биссектрисы относительно друг друга. **184–185.** См. указания, приводимые с текстом задач. **187.** n = 8. **190а.** 36°, 72°, 72°. **190б.** Все по 108°. **190в**. Каждый из углов равен 36°.

Признаки равенства треугольников. Теорема Фалеса

193а. 9 см, 9 см, 6 см. **193б.** 10 см, 10 см, 8 см. **193в.** 10 см, 10 см, $2\sqrt{10}$ см. **194а.** 1) 20°. **194б.** 1) 115°. **194б.** 2) 130°. **195.** 80°, 80°, 20°. **196.** Примените 1-й признак равенства треугольников. **197.** Примените 2-й признак равенства треугольников. **198.** Примените 1–2-й признаки равенства треугольников. **199.** Примените дважды 1-й признак равенства треугольников. **200.** Сведите к применению 2-го признака равенства треугольников. **201–203.** Примените результат задачи 200. **204–206**. Примените 2-й признак равенства треугольников. **207.** Примените результат задачи 204, затем 1-й признак равенства треугольников. **208.** Примените 3-й признак равенства треугольников. **209–210.** Сведите к применению 2-го признака равенства треугольников. **211.** Примените 1-й признак равенства треугольников. **215.** 72°, 72°, 36°. В обозначениях рисунка 3.123а $\angle A = \angle C = \alpha$, $\angle B = \alpha/2$. Составьте уравнение. **216–218.** Сведите к применению признака равенства треугольников по двум катетам. **219.** Примените признак равенства треугольников по гипотенузе и катету. **220.** Сведите к применению признака равенства треугольников по гипотенузе и острому углу. **221.** Сведите к задаче 220. **222.** Примените признак равенства треугольников по гипотенузе и катету. **223**. Сведите к задаче 220. **224**. Сведите к применению признака равенства треугольников по катету и острому углу. **225.** Сведите к задаче 224. **226.** Примените 2-й признак равенства треугольников (по стороне и двум прилежащим углам). **227–228.** Примените признак равенства треугольников по гипотенузе и острому углу. **229.** Примените признак равенства треугольников по гипотенузе и катету. **230.** Докажите, что $OK \perp MN$, или $CK \perp MN$. **231.** Примените свойство углов при основании равнобедренного треугольника. **232.** Вначале примените признак равенства треугольников по трем сторонам. В последнем шаге решения примените признак равенства треугольников по гипотенузе и острому углу. **233.** Свести к задаче 232. **234.** Примените признак равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними. **235.** Примените результат предыдущей задачи. **236а.** Будут. **236б–в.** Не будут. **237.** Ошибка допущена. Какая? **238а.** О равенстве треугольников, их сторон и углов. **239б.** Можно. Надо применить один из признаков равенства прямоугольных треугольников. Какой? **240б.** Задача сводится к построению прямоугольного треугольника по двум катетам. **240е**. См. рис. 3.123б. **241а–в.** Постройте вспомогательный прямоугольный треугольник. **242а.** Пусть $BC = B_1C_1$ (соответственные катеты), $AM = A_1M_1$ (соответственные медианы). Докажите, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ (рис. 3.123,в). Для этого докажите, что $AC = A_1C_1$ (тогда данные треугольники будут

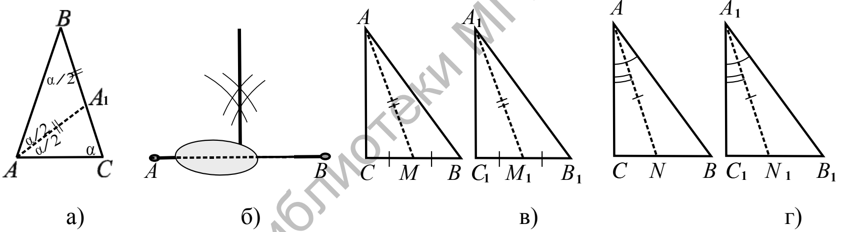


Рис. 3.123

равны по двум катетам). Рассмотрите треугольники AMC и $A_1M_1C_1$. Так как $BC = B_1C_1$, то и их половины также равны: $CM = C_1M_1$. Тогда $\Delta AMC = \Delta A_1M_1C_1$ (по гипотенузе и катету). Из равенства этих треугольников следует….Завершите доказательство. **242б.** Решение задачи сведите к доказательству равенства катетов. **242в.** Пусть $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$ (соответственные острые углы), $AN = A_1N_1$ (соответственные биссектрисы,). Докажите, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ (рис. 3.123г). Для этого докажите, что $AC = A_1C_1$ (тогда данные треугольники будут равны по катету и острому углу). Рассмотрите треугольники ANC и $A_1N_1C_1$. Так как $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, то и их половины также равны: $\angle NAC = \angle N_1A_1C_1$. Тогда $\Delta ANC = \Delta A_1N_1C_1$ (по гипотенузе и острому углу). Из равенства этих треугольников следует….Завершите доказательство. **243а.** 1) Вначале постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе, равной данной биссектрисе, и острому углу, равному половине данного острого угла.

243а. 2) Вначале выясните, как построить угол, прилежащий к биссектрисе, а затем прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной биссектрисе. **243б.** 1–2) Будут. При доказательстве воспользуйтесь одним из признаков равенства прямоугольных треугольников. **243в.** Построения показаны на рисунке 3.124. Вначале строим $\angle COD = \angle AOC$. Получаем $\angle BOD = 20°$. Затем строим дугу окружности с центром в точке O и т.д. **244б.** Делается допущение, что на второй стороне угла могут получиться не равные между собой отрезки. **248**. Равенства $\frac{OP}{OM} = \frac{O_1P_1}{O_1M_1} = \frac{PP_1}{MM_1}$ справедливы, так как каждое из отношений равно 3. Аналогично доказываются вторые равенства. **249.** Примените теорему, обратную теореме Фалеса, и результат предыдущей задачи. **250.** 15 см.**251.** 6 см, 5 см, 5 см. **252.** 15 см, 15 см, 18 см. **253.** 12 см, 12 см, 20 см. **254.** Средние линии треугольника относятся так же, как и стороны треугольника. **255.** Соответственные углы этих треугольников равны. **256.** В данном треугольнике имеется прямой угол. Объясните этот ответ. **257а.** Составьте уравнение: $\frac{x+3}{3} = \frac{6}{3}$, $x = 3$. **259а.** Постройте линейкой некоторый луч, на этом луче циркулем отложите пять равных между собой отрезков, пусть N – второй конец пятого отрезка, построим линейкой прямую NB, приложим линейку и чертежный треугольник друг к другу как показано на рисунке и далее с помощью чер-

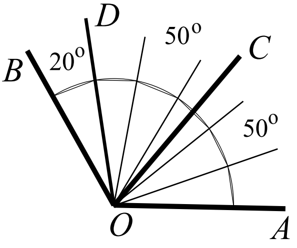
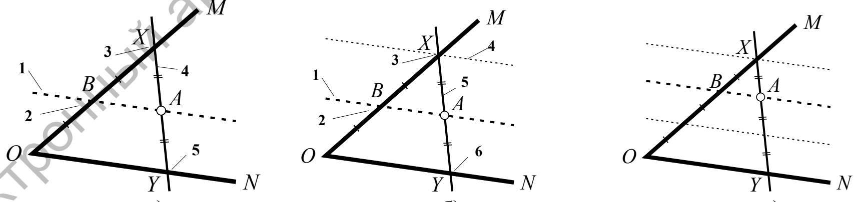


Рис. 3.124



а) б) в)

Рис. 3.125

тежного треугольника построим параллельные прямые (сохраняем при этом положение линейки неизменным). В результате отрезок AB будет разделен на пять равных частей. **259г.** Вначале разделите данный отрезок на 5 равных частей. **260а.** Необходимо применить свойство средней линии треугольника (рис. 3.125а), или теорему Фалеса (рис. 3.125б). Построения указаны на рисунке. **260б.** Построения выполняются аналогично, что и в предыдущей задаче (см. рис. 3.125в). **265.** Приведите рисунок. **266а.** 3. **266б.** $\frac{a-b}{2}$. **266в.** 7. **266г.** $\frac{a+b}{2}$. **266д.** $\frac{a+b}{2}$.

Геометрические построения

267в. Для построения половины суммы двух отрезков примените построения серединного перпендикуляра. **368в.** 1-й способ. Решайте точно так же как и в случае, когда отношение задается отношением натуральных чисел. 2-й способ. Данное отношение замените отношением натуральных чисел. **269а.** Воспользуйтесь квадратом, со стороной, равной 1. **269в.** Воспользуйтесь теоремой Фалеса. **269б.** Воспользуйтесь данным равносторонним треугольником. **271а.** 2) Воспользуйтесь равносторонним треугольником. **273.** Вначале постройте смежный угол, о котором говорится в условии задачи. **274.** Вначале постройте суммы двух углов. **275.** Вначале постройте прямой угол. **276–278.** Воспользуйтесь серединным перпендикуляром к отрезку AB. **279.** Постройте два перпендикуляра к прямой a. **280.** Постройте вначале отрезок BA_1. **281.** Постройте вначале центр симметрии точек A и A_1. **282**. Начните

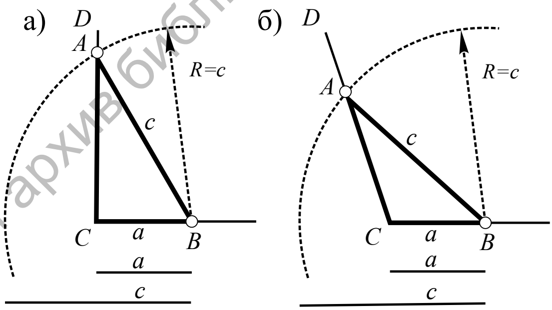


Рис. 3.126

с построения равностороннего треугольника. **283.** Ограничьтесь схематичным рисунком, перечислением и записью основных построений. **284а**. Начните с построения прямого угла. Какой окружностью надо воспользоваться? **284б.** Исследование решения задачи 284а (рис. 3.126а):

чтобы задача имела решение необходимо выполнение неравенства $c > a$ (гипотенуза должна быть больше катета). В противном случае задача решения не имеет. Когда задача имеет решение, то оно единственное, так как все прямоугольные треугольники с данным катетом и гипотенузой равны. **285а.** Задача решается аналогично предыдущей (рис. 3.126,б). **285б.** Чтобы задача имела решение необходимо выполнение неравенства $c > a$ (так как при этом условии окружность (B, c) пересекает луч CD). В противном случае задача решения не имеет. Когда задача имеет решение, то оно единственное, так как окружность (B, c) и луч CD имеют единственную общую точку. **286**. Задача сводится к построению прямоугольного треугольника по гипотенузе и катету. Запись построений: Даны катет AC и медиана BB_1. Построить ΔABC (приводится схематичный рисунок).

Построения. Строим:

1) ΔB_1BC по гипотенузе BB_1 и катету B_1C (задача 284а);

2) на продолжении отрезка CB_1 отрезок $B_1A = CB_1$;

3) отрезок AB. ΔABC – искомый.

287. Задача аналогична предыдущей задачи. **288а.** Воспользуйтесь тем, что гипотенуза равна удвоенной медиане. **288б.** Постройте вначале окружность и её диаметр. **289.** Постройте вначале прямоугольный треугольник по катету и гипотенузе, затем воспользуйтесь равенством углов. Каких? **290**. Вначале постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и катету. Какой? **291.** Вначале постройте треугольник по стороне и двум прилежащим углам. Какой? Какая сторона имеется в виду, Какие углы, прилежащие к этой стороне? Как их построить? **292.** Возможны различные способы решения. Например, постройте вначале равнобедренный треугольник. Какой? **293.** Задача сводится к построению прямоугольного треугольника по катету и острому углу. **294.** Построения сводятся к построению прямоугольного треугольника по двум катетам. При проведении исследования необходимо учесть, что выбор отрезков для b и h_b может быть любым, без каких-либо ограничений. При каждом конкретном выборе этих отрезков задача имеет единственное решение. **295.** Сведите к построению искомого треугольника по стороне и двум прилежащим углам. **296.** Начни-

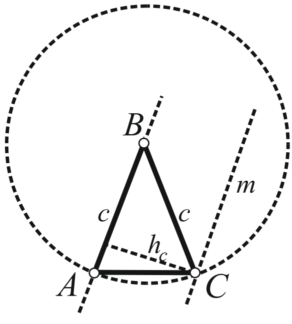


Рис. 3.127

те с построения прямоугольного треугольника по гипотенузе и катету. Далее воспользоваться серединным перпендикуляром к основанию AC. **297а.** *Поиск решения.* Пусть ΔABC (рис. 3.127) является равнобедренным: $AB = BC = c$ и h_c – высота, проведенная к его боковой стороне. Сразу может быть построена сторона $AB = c$ искомого треугольника. Выясним далее, каким образом может быть построена вершина C. Для этого учтем, что вершина C удалена от вершины B на известное расстояние c. Поэтому вершина C находится на окружности (B, c). Кроме того, вершина C лежит на прямой m, параллельной AB и такой, что общий перпендикуляр, заключенный между прямыми AB и m, равен h_c. Итак, вершина C находится как точка пересечения окружности (B, c) и прямой m. Построение треугольника ABC найдено. *Построение.* Строим (см. рис. 3.128): отрезок $AB = c$; окружность (B, c); прямую m: $m \parallel AB$, общий перпендикуляр между прямыми m и AB равен h_c; точку C – точку пересечения окружности (B, c) и прямой m. ΔABC – искомый.

Доказательство. ΔABC – равнобедренный: $BA = BC$ как радиусы одной и той же окружности. Кроме того, $BA = BC = c$ (по построению). Так как общий перпендикуляр между параллельными прямыми AB и m равен h_c, то высота треугольника ABC, проведенная к стороне AB, равна h_c. Значит, ΔABC удовлетворяет всем условиям задачи. **297б.** Если $h_c < c$ (h_c меньше радиуса окружности), то задача имеет два решения

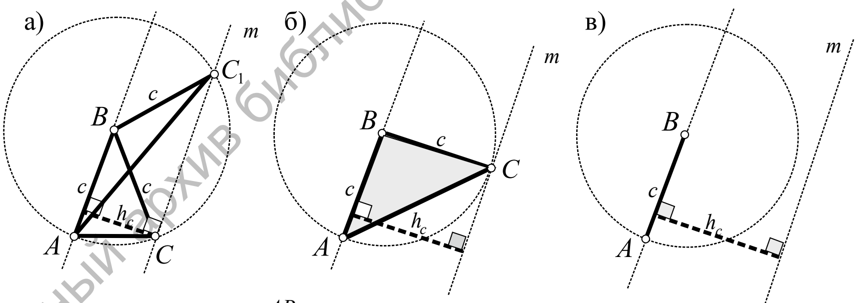


Рис. 3.128

(см. рис. 3.128а: треугольники ABC и ABC_1). Если $h_c = c$ (рис. 3.128б), то окружность (B, c) и прямая m имеют одну общую точку C, поэтому задача имеет единственное решение. Если $h_c > c$ (рис. 3.128в), то прямая m и окружность (B, c) общих точек не имеют. В этом случае точка C не существует и задача не имеет решения. Других случаев нет. **298.** *Построения*. Строим: 1) $\angle A$, равный данному; 2) отрезок $AB=c$ (на стороне угла A); 3) окружность (B, l_b); 4) точку L – точку пересечения окружности (B, l_b) со второй стороной угла A; 5) $\angle LBC = \angle LBA$; 6) точку C – пересечение стороны угла LBC с лучом AL. ΔABC построен.

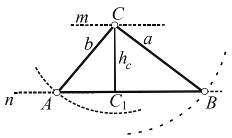


Рис 3.129

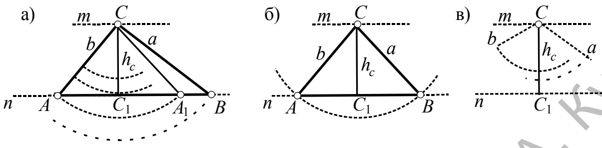


Рис. 3.130

Исследование. $\angle A$ и сторону c считаем постоянными, а биссектрису l_b – изменяющейся. В зависимости от длины l_b задача может иметь то или иное число решений, или не иметь решения (установите это). **299б**. Препятствий для построения двух других медиан нет. **301.** Вначале постройте прямоугольный треугольник по катету и острому углу. **302**. Задача сводится к построению треугольника по трем сторонам. **305**. Задача сводится к построению треугольника по стороне и двум прилежащим углам. **306–307.** Постройте вначале прямоугольный треугольник по катету и острому углу. **308а.** *Поиск решения.* Допустим, что ΔABC (рис. 3.129) удовлетворяет условиям задачи. В нем $BC = a$, $AC = b$ и $CC_1 = h_c$ – высота. Начнем с построения параллельных прямых m и n, отстоящих друг от друга на расстояние, равное h_c. Представим, что вершина C лежит на прямой m, вершины A и B – на прямой n, причем $m \parallel n$ (общий перпендикуляр к этим двум прямым равен h_c). Осталось учесть, что точка A лежит на прямой n и окружности (C, b), а точка B на прямой n и окружности (C, a). Запись построений и доказательство проведите самостоятельно. **308б.** Если a и b больше h_c, то задача имеет решение, причем при $a \neq b$ существует два треугольника ABC и A_1BC (рис. 3.130а), удовлетворяющие условию задачи. При a и b больше h_c и $a = b$ задача имеет одно решение (ΔABC, рис. 3.130б). Если a или b меньше h_c, то задача решения не имеет (рис. 3.130в). **309.** Постройте вначале прямоугольный треугольник по гипотенузе и катету. **310.** Задача сводится к построению окружности и её хорд. **311.** Начните с построения окружности и её хорды.

3.6. ПОВТОРЕНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА ГЕОМЕТРИИ 7 КЛАССА

Тема 1 **«Первые геометрические понятия и аксиомы»**

Вопросы теории

1. Что такое планиметрия и стереометрия.
2. Сформулируйте аксиомы принадлежности.
3. Сформулируйте аксиомы порядка на прямой и на плоскости.
4. Сформулируйте аксиомы измерения и откладывания отрезков.
5. Что мы знаем о теореме Пифагора.
6. Сформулируйте аксиомы измерения и откладывания углов.
7. Сформулируйте теоремы о смежных и вертикальных углах.
8. Сформулируйте определения медианы, биссектрисы и высоты треугольника.
9. Сформулируйте аксиому равенства треугольников (1-й признак).

Задачи

(В каждой теме разрешается пользоваться сведениями из любой темы)

1. Расстояние между городами 220 км. Между ними находится аэроклуб, который удален от этих городов на расстояния, которые относятся как $\frac{2}{3}:\frac{1}{4}$. На каком расстоянии находится аэроклуб от данных городов?

2. Биссектриса угла делит угол на две части, одна такая часть равна $\frac{1}{4}$ прямого угла. Чему равен угол?

3. Один из смежных углов равен α. Чему равен угол между их биссектрисами.

4. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, BM и B_1M_1 – их медианы. Докажите, что $BM = B_1M_1$.

5. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ построены медианы BM и B_1M_1. Докажите, что $\Delta\ ABC = \Delta A_1B_1C_1$, если $AB = A_1B_1$, $BM = B_1M_1$, $\angle ABM = \angle A_1B_1M_1$.

6. Даны две окружности с общим центром, который на рисунке не отмечен, построены хорда AB большей окружности и не параллельная ей хорда CD меньшей окружности. Постройте центр этих окружностей.

7. а) Найдите длину отрезка, если квадрат длины равен 64 см.

б) Сторона квадрата равна $\sqrt{2}$. Чему равна диагональ квадрата?

8. Постройте с помощью линейки и транспортира две прямые, пересекающиеся под углов в 60°.

9. Дан острый угол и точка, не принадлежащая внутренней области угла. С помощью чертежного треугольника постройте острый угол, стороны которого перпендикулярны к сторонам данного угла.

10. а) Дан некоторый угол. С помощью одной только линейки постройте угол, равный данному.

б) Дан некоторый угол. С помощью одной только линейки постройте биссектрису этого угла.

Тема 2 **«Внешний угол треугольника. Перпендикулярные и параллельные прямые. Сумма углов треугольника»**

Вопросы теории

10. Сформулируйте определение внешнего угла треугольника.

11. Докажите, что внешний угол треугольника больше внутреннего угла, не смежного с ним.

12. Сформулируйте определение накрест лежащих и односторонних углов.

13. Докажите единственность перпендикулярной прямой.

14. Сформулируйте признаки параллельности прямых.

15. Докажите признак параллельности прямых с помощью накрест лежащих углов.

16 Сформулируйте аксиому параллельных прямых.

17.Сформулируйте свойства параллельных прямых.

18. Докажите одно из свойств параллельных прямых.

19. Докажите теорему о сумме углов треугольника.

Задачи

11. Внешний угол треугольника меньше смежного с ним внутреннего угла на 40°. Найдите внешний угол.

12. Отрезки BC и AD пересекаются и в точке пересечения O делятся пополам. Докажите, что внешний угол при вершине A треугольника ABO равен внешнем углу при вершине D треугольника DCO.

13. Докажите, что если точка принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку, то она равноудалена от концов отрезка.

14. К сторонам AB и BC треугольника ABC проведены серединные перпендикуляры, которые пересекаются в точке O. Докажите, что $OA = OB = OC$.

15. а) Накрест лежащие углы при прямых a и b и секущей c равны α и $180° - \alpha$.

Могут ли прямые a и b быть параллельными? Ответ обоснуйте.

б) Односторонние углы при прямых a и b и секущей c равны α и $180° - \alpha$. Могут ли прямые a и b быть параллельными? Ответ обоснуйте.

16. Докажите, что если в треугольнике один угол прямой, то два других острые. Чему равна сумма острых углов? Если один из острых углов равен α, то чему равен другой острый угол?

17. а) Углы треугольника относятся как 1:3:4. Найдите их.

б) Один из углов треугольника равен $\frac{3}{4}$ от суммы всех трех его углов. Два других угла равны. Найдите углы треугольника.

18. Докажите, что два угла, с соответственно перпендикулярными сторонами равны, если они оба острые или тупые.

Тема 3 **«Признаки равенства треугольников. Теорема Фалеса»**

Вопросы теории

20. Сформулируйте 2-й признак равенства треугольников.

21. Сформулируйте определение равнобедренного треугольника. Является ли равносторонний треугольник равнобедренным?

22. Сформулируйте 3-й признак равенства треугольников.

23. Докажите один из признаков равенства для произвольных треугольников.

24. Сформулируйте признаки равенства прямоугольных треугольников.

25. Докажите один из признаков равенства прямоугольных треугольников.

26. Сформулируйте теорему Фалеса.

27. Докажите теорему Фалеса.

28. Сформулируйте теорему, обратную теореме Фалеса.

29. Сформулируйте определение средней линии треугольника.

30. Докажите теорему о средней линии треугольника.

31. Сформулируйте теорему о точке пересечения медиан треугольника.

Задачи

19. Биссектриса угла при основании равнобедренного треугольника *ABC* отсекает от него два равнобедренных треугольника. Найдите углы треугольника *ABC*. Сколько равнобедренных треугольников вместе с данным получилось?

20. Докажите равенство медиан, проведенных к боковым сторонам равнобедренного треугольника.

21. Будут ли равны прямоугольные треугольники по катету и медиане, проведенной к этому катету?

22. Средняя линия равнобедренного треугольника, параллельная основанию, равна 3 см. Найдите стороны треугольника, если его периметр равен 16 см.

23. Стороны треугольника относятся как 4:5:6. Как относятся его средние линии?

24. Постройте отрезок и на нём точку X такую, что $AX:XB = 2:3$.

25. Вершины прямоугольного треугольника ABC лежат на окружности с центром O, AB является ее диаметром. Из точки O проведен перпендикуляр OM к стороне AC. Докажите, что OM – средняя линия треугольника ABC.

26. По разные стороны от прямой a даны две точки A и B. Перпендикуляры, проведенные из этих точек на прямую, соответственно равны 10 см и 4 см. Найдите длину перпендикуляра, проведенного из середины O отрезка AB к данной прямой.

27. Средняя линия треугольника перпендикулярна к одной из его сторон. Имеется ли в этом треугольнике прямой угол?

28. Дан треугольник и его медианы. Докажите, что медианы треугольника, образованного средними линиями данного треугольника, лежит на медианах данного треугольника, а точки пересечения медиан этих треугольников совпадают.

Тема 4 **«Геометрические построения»**

Вопросы теории

32. Расскажите план *построения треугольника по трём данным сторонам*.

33. Расскажите план построения угла, равного данному углу.

34. Расскажите план построения серединного перпендикуляра к отрезку.

35. Расскажите план построения биссектрисы данного угла.

36. Расскажите план построения прямой b, проходящую через данную точку A и перпендикулярной к данной прямой a.

37. Расскажите план построения прямой b, проходящей через данную точку A и параллельной данной прямой a.

Задачи

29. Даны два отрезка a и b. Постройте отрезок $x = \frac{2a+b}{3}$.

30. Даны два угла α и β. Постройте биссектрису угла, равного $\alpha + \beta$.

31. Составьте план построения треугольника по трем его средним линиям.

32. Постройте треугольник по двум углам и медиане, проведенной из вершины третьего угла.

33. Постройте треугольник по двум углам и высоте, проведенной из вершины третьего угла.

34. Постройте окружность, проходящую через данные три точки, не лежащие на одной прямой.

35. Постройте окружность, которая бы проходила через вершины данного треугольника.

36. Дана окружность, центр которой не отмечен. Постройте этот центр.

37. Постройте хорду окружности, которая видна из центра под углом в 60°.

38. Постройте равнобедренный треугольник по основанию b и углу A.

39. Постройте равнобедренный треугольник по основанию b и высоте h_a.

3.7. ЗАДАНИЯ ДЛЯ УЧЕБНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЫ УЧАЩИХСЯ 7 КЛАССА

Тема 1 **«Задачи на построение с проведением исследования»**

Цель работы: приобрести навыки проведения исследования при решении задач на построение. Практическая часть исследования состоит в разработке системы задач на построение по полной схеме (с приведением исследования решения задач). Некоторые тренировочные задачи решения задач на построение с приведением исследования приводятся ниже.

Пример 1. Постройте равнобедренный треугольник по боковой стороне a (рис. 3.131) и медиане, проведенной к боковой стороне m.

Решение. 1. *Поиск решения.* Нетрудно найти треугольник, у которого все стороны известны. Это ΔABD. В этом треугольнике $AB = a$, $BD = a/2$, $AD = m$. Этот треугольник можно построить (по трем сторонам). Вершину C можно построить, отложив на продолжении отрезка BD отрезок $DC = BD$. Проведя отрезок AC, построим ΔABC.

2. *Построение* (рис. 3.131б). Строим:

а) ΔABD (по трем сторонам);

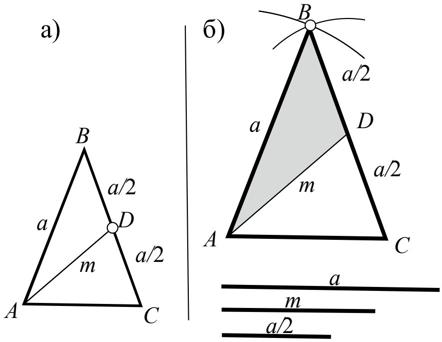


Рис. 3.131

б) вершину C (отложив на продолжении отрезка BD отрезок $DC =$
$= BD$);

в) отрезок AC. ΔABC – искомый.

3. *Доказательство.* По построению ΔABC – равнобедренный, так как $AB = BC = a$. Кроме того, по построению AD является медианой, причем $AD = m$. Следовательно, ΔABC полностью удовлетворяет условию задачи.

4. *Исследование.* Задача имеет решение при условии, если для треугольника ABD выполняются неравенства:

$$a - \frac{a}{2} < m < a + \frac{a}{2}, \quad \text{или} \quad \frac{a}{2} < m < \frac{3a}{2}.$$

Это решение единственное.

Пример 2. Постройте прямоугольный ΔABC по высоте h_c и медиане m_c ($m_c \neq h$), проведенных к гипотенузе AB.

Решение. 1. *Поиск решения.* Допустим, что прямоугольный ΔABC построен, в нем высота $CD = h$, медиана $CE = m$ (рис. 3.132а). Нельзя ли вначале построить вспомогательный треугольник? Зная катет CD и гипотенузу CE, можно построить прямоугольный ΔCDE. Тем самым будет построена вершина C и часть DE гипотенузы AB. Осталось построить вершины A и B искомого треугольника ABC. Для этого на прямой DE по разные стороны от точки E отложим отрезки EA и BE, равные медиане CE (воспользуемся тем, что в прямоугольном треугольнике ABC медиана равна половине гипотенузы). Проведя AC и BC, построим искомый ΔABC.

2. *Построение* (рис. 3.132б). Строим:

а) ΔCDE (по катету и гипотенузе);

б) прямую DE;

в) отрезки $EA = BE = m$;

г) AC и BC; ΔABC – искомый.

3. *Доказательство.* ΔABC – искомый. Он является прямоугольным, так как в нем медиана равна половине стороны, к которой она проведена. По построению высота $CD = h$, а медиана $CE = m$.

4. *Исследование.* Задача имеет решение при условии, если для треугольника ABC выполняется неравенство $m > h$. Это решение единственное. Единственность следует из того, что медиана единственным образом определяет гипотенузу AB. Кроме этого, единственным образом определяется катет DE прямоугольного треугольника CDE и, значит, отрезки AD и DB. В силу этого единственным образом определяются катеты AC и BC искомого треугольника (на основании теоремы Пифагора). Прямоугольные треугольники, имея одни и те же катеты (или гипотенузу и катет) равны. Это и означает единственность решения задачи на построение.

Пример 3. В произвольном треугольнике ABC известны две стороны и медиана, выходящие из вершины B: $AB = c$, $BC = a$, $BD = m$. Постройте этот треугольник.

Решение. 1. *Поиск решения* (рис. 3.133). Допустим, что ΔABC построен. Сразу не ясно, как построить этот треугольник. Необходимо поискать вспомогательный треугольник, дополнительные построения. Они показаны на рисунке 3.133: медиану AD продолжим на отрезок $DE = m$, получим ΔABE, в котором известны все три его стороны. Построив этот треугольник, нетрудно построить искомый ΔABC.

Завершите решение задачи. При проведении исследования воспользуйтесь неравенствами треугольника (для определенности положим, что $a > c$). Задача имеет решение при условии:

$$\frac{a-c}{2} < m < \frac{a+c}{2}.$$

Тема 2 **«Инструменты выполнения точных чертежей при решении геометрических задач»**

Цель работы: приобрести навыки применения компьютерно-программных средств «Живая геометрия» или «CorelDraw» при решении задач на построение. Практическая часть исследования состоит в разработке системы задач на построение с использованием средств точного выполнения чертежей (в определенном масштабе). Примеры задач.

40. Даны два отрезка a и b. Постройте отрезок $x = \frac{3a+b}{3}$.

41. Даны два угла α и β. Постройте биссектрису угла, равного α + β.

42. Постройте ΔABC по стороне *c,* углу *A* и биссектрисе l_a.

43. Постройте ΔABC по стороне *b,* углу *A* и биссектрисе l_a.

44. Постройте ΔABC, если $AC = b$, $AB = c$ и известно, что точка *M* – середина стороны *AB* –равноудалена от вершин *A* и *C.*

45. Постройте треугольник по двум сторонам и высоте, проведенной к третьей стороне.

46. Постройте треугольник по стороне *a* и высотам h_b и h_c.

47. Постройте треугольник по двум сторонам *a, b* и углу *A*.

48. Постройте треугольник по двум углам и медиане, проведенной из вершины третьего угла.

49. Постройте треугольник по двум углам и высоте, проведенной из вершины третьего угла.

50. Постройте треугольник по двум углам и биссектрисе, проведенной из вершины третьего угла.

51. Постройте параллелограмм по двум данным сторонам *a* и *b* и диагонали *d*, выходящим из одной вершины.

52. Постройте ΔABC по острому углу *A,* стороне *c* и стороне *a*, противолежащей данному углу.

53. Постройте ΔABC по острому углу *A,* стороне *c* и медиане m_b.

54. Постройте ΔABC по сторонам *b* и *c* и высоте h_c.

ВЫВОДЫ И ПРАКТИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

1. Как отмечалось в Предисловии, с развитием математики возникли различные построения евклидовой геометрии, на различных логических основаниях. Имевшая место определенность и однозначность построения геометрии безвозвратно исчезла (Ф. Клейн), и в преподавании геометрии возникла труднейшая проблема – проблема выбора оптимального варианта. В работе показана недостаточность описательных методов достижения современных образовательных целей и необходимость дополнения их строгими математическими методами. К числу таких математических методов в данной работе отнесены:

- **оптимизация по В. Парето,**
- **сокращение энтропии учебного материала на основе теории энтропии К. Шеннона и аксиоматической теории вероятностей А. Н. Колмогорова,**
- **эффективная организация системы задач на основе фрактальных идей повторения и самоподобия Б. Мандельброта,**
- **актуальным является также положение Антуана де Сент-**

Экзюпери, в котором сказано, что «совершенство – это не тогда, когда нечего добавить, а тогда, когда нечего убрать». Если бы при создании учебников придерживались этого положения, то учебники по всем предметам были бы намного лучше.

Несмотря на то, что названные математические теории были созданы сравнительно давно, **практические применения их в дидактике отсутствовали до сих пор**. Это происходило на фоне широкого их применения в других областях науки и практики. Непочатый край для применения этого наследия составляют методики преподавания и педагогическая наука в целом. Не менее актуально это наследие для развития и совершенствования теории и практики школьного учебника. Предлагаемая работа предлагает новое направление применения математических методов при построении школьного учебника, ограничивая при этом неэффективность традиционных описательных дидактических методов.

2. Невозможность прямого применения названных выше математических методов в их **классической форме** (чем и объясняется их отсутствие в дидактике) оказалось возможным при определенной их **прикладной модификации:**

- использование конечных дискретных вероятностных пространств;
- сокращение количества вероятностных событий;
- распределение вероятностей с учетом того, что менее трудные события имеют большую вероятность реализации, а более трудные события – меньшую вероятность.

За счет этого упростилось применение классической (общей) теории энтропии К. Шеннона и аксиоматики А. Н. Колмогорова, что в свою очередь позволило **расширить прикладные функции вероятности и энтропии и отразить в них такие критерии, как объем, сложность и трудность учебного материала**. Так как эти критерии в своей совокупности определяют доступность учебного материала, то названные математические методы представляют собой не только некоторый полезный набор математических методов, а **основу для дальнейшего развития нового направления**. В этом же ключе исследуется и фрактальная организация учебного материала, которая использует общие признаки фракталов (повторение и самоподобие), при этом изучение учащимися какой-либо теории фракталов не предусматривается. Если повторение традиционно рассматривалось как «**мать учения**», то совместный учет повторения и самоподобия означает, что учение обрело обоих «**родителей учения – и мать и отца учения**».

3. Особое место среди названной выше группы математических методов занимает **оптимизация по В. Парето**. Для двухкритериального случая рассмотрен графический и табличный способы построения множества Парето,

для большего количества критериев – табличный способ. Оптимизация по В. Парето позволяет сравнивать десятки альтернатив и выбирать из них в соответствии с теми или иными предпочтениями оптимальные. Множество Парето может содержать некоторое конечное число компромиссных альтернатив, которые не хуже и не лучше друг друга. В последнем случае возможно применение аддитивного или мультипликативного критериев, позволяющих определить **единственную оптимальную альтернативу**. Сравнение альтернатив с помощью оптимизации по Парето позволяет выявить особенности новой альтернативы, возможности её улучшения и гарантированного обеспечения её преимуществ перед существующими.

4. В работе вкладывается новый смысл в понятия **совершенства и оптимизации**. Эти понятия, скомпрометированные в описательной педагогике, на основе математических методов снова обретают свой истинный смысл, содержание и получают дальнейшее развитие. Оба эти понятия мы относим к числу наиболее достойных в методике преподавания математики и педагогики в целом. Они не просто дополняют друг друга, но и друг без друга не могут быть эффективными. Этот новый смысл данные понятия приобретают за счет применения математических методов в процессах совершенствования и оптимизации, в том числе и школьного учебника.

5. Выяснены возможности применения математических методов **на этапе построения учебника**:

а) в выявлении на их основе основных логико-математических особенностей построения школьного учебника геометрии, анализе их достоинств и недостатков, реальном упрощении ЛМС без потери содержания (тезис А. П. Киселева – автора школьных учебников математики, действовавших более 60 лет);

б) в оценивании роли традиций и новаций на современное состояние школьного учебника, оценивая как позитивные, так и возможное негативные влияние, особенно в вначале систематического курса геометрии;

в) в оценивании роли тех или иных теорем в построении ЛМС учебника и нахождении их оптимального расположения в общей системе, приводящему к более простому, краткому и доступному построению.

6. Рекомендуемая схема применения математических методов при построении школьного учебника такова:

Анализ существующих
альтернатив с точки зрения
оптимизации по Парето
(выявление направлений
совершенствования)

↓

Построение новой альтернативы
с улучшенными энтропийными
качествами ($I > H$)

↓

Построение новой альтернативы
на основе фрактальной организации
учебного материала

↓

Анализ новой совокупности
альтернатив с точки зрения
оптимизации по Парето
(дополнительные
коррекции)

↓

Окончательное построение новой
альтернативы

7. Сформулированы рекомендации **для построения альтернативы с улучшенными энтропийными качествами и фрактальной организацией:**

- учебный материал (теорию, задачи) рекомендуется разбивать на малые группы, применяя соответствующие выделения в тексте учебника (нумерацию, заголовки), что позволяет улучшить системные качества учебного материала и помогает учащимся осознать логику его развертывания);
- малый фрагмент теоретического материала, малая группа задач должны состоять из не более, чем 5–6-ти единиц – из комбинаций аксиом, определений, теорем, доказательств, или задач. Уже в этом случае соотношение между энтропией и информацией оказывается приемлемым. Многократное нарушение этой рекомендации ведет к накапливанию энтропии и значительному повышению сложности учебного материала. Небольшое исключение может составить простой учебный материал, задачи для устного решения;
- Малую группу задач рекомендуется разбивать на две части: первая часть – менее трудные задачи, вторая часть – более трудные задачи, ограничивая малую группу одним скачком трудности. При этом все аксиомы вероятности А. Н. Колмогорова оказываются выполненными и вероятностями этих двух частей (событий) являются числа, сумма которых равна 1. Однозначность выбора вероятности событий устанавливается, исходя из самой практической ситуации и общего положения, согласующегося с ней – **вероятность решения более легкой части задач больше, чем вероят-**

ность решения трудной части задач. Конкретное соотношение между вероятностями устанавливается по факту свершившихся событий, или исходя из предыдущего многократного опыта. В итоге предложено пять способов вычисления вероятности событий и соответствующих им энтропии и информации. Одним из таких способов является нахождение вероятности с помощью учета затрат времени на решение каждой части малой группы задач. Совокупность этих способов составляет основу предложенной **прикладной теории вероятностей и энтропии**, ориентированную на решение дидактических задач.

Этот же подход, отталкивающий от понятия малой группы учебного материала, положен в основу фрактальной организации учебного материала.

8. Один из первых результатов **применения оптимизации по Парето состоит в сокращении традиционной ЛМС**, которой по инерции придерживается большинство учебников. Прежде всего, в сокращении ЛМС традиционной громоздкой системы построения элементарной геометрии, заложенной более 2000 лет тому назад в «Началах» Евклида. Такая громоздкость часто вызывается излишней детализацией и дублированием второстепенного учебного материала, устаревшими доказательствами, потерявшими научную ценность.

К примеру, в 7 классе равенство и сравнение отрезков вначале проводится с помощью наложения, а потом с помощью понятия дины отрезка. Это же повторяется во многих учебниках по отношению к равенству и сравнению углов. Проще же обойтись без дублирования.

Другой пример: принятие 1-го признака равенства треугольников в качестве аксиомы (в международной практике иногда все три признака принимаются в качестве аксиомы) упрощает изложение не только самих признаков равенства треугольников, но и доказательство целой группы фундаментальных теорем (свойство внешнего угла треугольника, единственность прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данной прямой, признака параллельности прямых и др.). В школьных же учебниках по-прежнему преобладает устаревшее в научном плане «наложение», не подкрепленное никаким математическим смыслом.

Третий пример: школьные учебники, как и «Начала» Евклида, содержат обоснования вопросов измерения геометрических величин, в немалой степени, привлекают сведения по действительным числам, числовым вычислениям, слабость навыков которых у учащихся остро ощущается на уровне приложений, в том числе и в геометрии. В «Началах» это выглядело вполне естественно. «Начала» содержали всю математику того времени, вся математика тогда была геометрией. В современных учебниках геометрии подобная ситуация вызывает определенные сомнения, так как давно существует как отдельный предмет школьная алгебра, в которой эти вопросы могут занять свое законное место, не игнорируя при этом практическую сторону вычислений.

Оптимизация по Парето позволяет сравнивать десятки школьных учебников, сравнивать новейшие альтернативы с существующими и выбрать оптимальный вариант или равноценные компромиссные варианты. Существенно, что такое сравнение подсказывает оптимальный вариант уже на стадии подготовки учебника.

Оптимизация ЛМС учебника геометрии обеспечивалась на пути перестройки традиционного геометрического содержания, при **сохранении его традиционной основы**. При этом учитывалась глубокая мысль Антуана де Сент-Экзюпери **о достижении совершенства, когда нет ничего лишнего**. Оптимизация традиционной ЛМС подчеркивается в данной работе традиционным составом учебных тем и инновациями, которые улучшают эту основу:

- Введением к учебнику геометрии – неформальным по содержанию.
- Кратким изложением темы «Первые геометрические понятия и аксиомы».
- Существенным упрощением доказательств в теме «Внешний угол треугольника. Перпендикулярные и параллельные прямые. Сумма углов треугольника», вносящей наибольший вклад в упрощении ЛМС геометрии. Упрощение достигнуто за счет своевременного введения и последующего применения неравенства внешнего угла треугольника.
- Изложением признаков равенства треугольников – без «наложений» и «приложений» (рецидивов ученых Древней Греции, выдаваемый за «отечественную традицию»).
- Изложением теоремы Фалеса в 7 классе, являющимся своего рода демонстрацией максимальных применений равенства треугольников и подготовкой к последующему введению в 8 классе обобщенной теоремы Фалеса. Этот момент играет особое стратегическое значение, так как на основе обобщенной теоремы Фалеса возможно оптимально простое и краткое построение всей основной части школьной планиметрии (подобия треугольников, метрических соотношений в прямоугольном треугольнике, элементов тригонометрии, решении произвольных треугольников).
- Кратким изложением геометрических построений, играющих важную роль в **инженерной подготовке учащихся**, а также при повторении, закреплении и углублении учебного материала 7 класса, в формировании конструктивных навыков. Исследование при решении задач на построении для базового уровня рекомендовано в качестве необязательного.
- Уделено внимание геометрическим построением с помощью компьютерных средств.

•	Прикладные задачи связываются с новейшими практическими применениями (нанотехнологиями, лазерными измерителями и др.).

Более краткое и рациональное изложение теоретического материала, как видно, обеспечивалось, во-первых, определенным изменением последовательности изложения учебного материала, во-вторых, изложением, состоящим в основном из крупных, узловых теорем, обеспечивающих целостность ЛМС теоретического материала. Такое изложение сокращает ЛМС, освобождает ее от второстепенного материала, предельно обнажает систему построения школьной геометрии, способствует формированию системы знаний.

9. Сформулированный подход благоприятно сказывается на создании дополнительного резерва учебного времени на решение задач. **В качестве эффективного средства регулирования сложности системы задач применена аксиоматическая теория вероятности А. Н. Колмогорова и теория энтропии К. Шеннона в прикладной форме, предложенной в данной работе.** Применение теории Шеннона к оценке сложности и трудности систем задач, позволило использовать энтропийный анализ в качестве эффективного средства регулирования сложности и доступности системы задач, а в сочетании с оптимизацией Парето находить компромиссные и оптимальные альтернативы.

Общая система задач организована в виде **совокупности малых групп**, которые легче поддаются регулированию энтропии. Предложены приемы, учитывающие количество, сложность и трудность системы задач. В этих целях вводится специальное понятие **«скачок трудности»** и предложены способы нахождения энтропии системы: с учетом количества задач (классическая, количественная энтропия) и на основе учета комплекса критериев (количества задач, трудности задач и других субъектных критериев, выражаемых, в частности, в затратах учебного времени на их решение). Разработана теория построения малых групп задач с низкой энтропией. Предложенные приемы повышают доступность всей системы задач и создают реальные комфортные условия для учащихся. Теоретическая и практическая ценность их состоит в том, что, как правило, традиционными приемами от высокой энтропии избавиться нелегко, а повысить хотя бы незначительно количество информации – чрезвычайно трудно (даже на первый взгляд группа задач, воспринимаемая вполне упорядоченной, на самом деле может иметь сравнительно большую энтропию).

Качественные изменения осуществлены в нескольких направлениях.

•	Осуществлена более детальная тематическая структуризация задач с указанием соответствующих заголовков (аналогичная структуризация применена, например, в задачнике Н. Рыбкина).

•	Тематически организованные небольшие группы задач подвергались энтропийному анализу и регулированию сложности и трудности задач. На основе энтропийного анализа уточнялся состав малых групп задач (соотношение различных по трудности задач, при котором обеспечивается преобладание информации над энтропией).

- Наиболее рациональным оказалось деление малой группы задач на две части. Разработаны различные способы энтропийного анализа малых групп задач на основе временных затрат на их решение.
- Уделяется больше внимания устным упражнениям на формирование понятий и усвоение ключевых теорем (которых традиционно набирается немалое количество и которым традиционно уделяется недостаточно внимания). Вместе с этим система задач пополняется содержательными геометрическими задачами, имеющими более весомое теоретическое и практическое значение.
- Доступность задач обеспечивается постепенным наращиванием их сложности.
- Концентрация задач вокруг узловых, ключевых теорем позволяет усилить связь между задачами, улучшить системные качества наборов задач, сократить разнородность задач, создать более комфортные условия для учащихся.
- Появилась возможность уделить больше внимания в теоретической части учебника образцам решения задач.
- В целях нормализации учебной нагрузки учащихся задачи в каждом параграфе представлены основными (общими для базового и повышенного уровней) и дополнительными задачами (в основном для повышенного уровня) с соотношением 2:1. Более сложные задачи отнесены в дополнительный отдел, обращение, к которому на базовом уровне в полном объеме не является обязательным.

10. Достижение компактности ЛМС за счет совместного применения оптимизации В. Парето, аксиоматики А. Н. Колмогорова, теории энтропии К. Шеннона и теории фракталов Б. Мандельброта (в их прикладных формах) позволило **снизить степень формального подхода**, больше внимания уделить интерактивному обучению. Обеспеченный резерв учебного времени позволил избежать сухого, формального изложения, которым трудно заинтересовать учащихся.

- К аксиомам приводятся красочные иллюстрации из окружающей среды (природа, космос, технические новинки, примеры из современной практики и др.), к трудным теоремам предпосылаются вспомогательные задачи, облегчающие их доказательства.
- Увеличено количество образцов решения задач, которые формируют навыки решения задач, готовят учащихся к самостоятельному ре-

шению задач.

- Разработаны учебные тексты по ознакомлению учащихся с методами решения задач.
- Применены различные способы организации интерактивного обучения с помощью учебника геометрии. Это обеспечены благодаря выполнению следующих его преобразований:

– упрощению логической системы геометрии, сокращению её громоздкости, примерно на 1/3;

– упрощению без потери содержания;

– концентрированному изложению родственного материала, сокращению его «разброса» и понижению информационной энтропии изложения на основе математической теории К. Шеннона и аксиоматики вероятностей А.Н. Колмогорова в их прикладной форме;

– укрупнению информации без потери доступности на основе специальных методических приемов (**группировка задач на основе фрактальной их организации** с использованием идей основателя фрактальной геометрии Б. Мандельброта), идей повторения и самоподобия, близких к классической педагогике и практике и выводящих систематизацию задач на более совершенный уровень.

– разработке специальных заданий по завершению параграфа теории для интерактивного, коллективного выполнения. Коллективное обсуждение заданий и вопросов, обращение к устным заданиям, заданиям на готовых чертежах рассматриваются как важнейшие условия интерактивности учащихся.

11. Для развития новых компетенций и соответствующих **навыков студентов, магистрантов и аспирантов предложены специальные исследовательские задания**.

В заключение отметим, что изложенный теоретический материал и практические разработки способствуют повышению профессиональной готовности студентов, магистрантов и аспирантов к творческому исследованию проблем школьного учебника. Это подтверждает опыт автора по формирования соответствующих профессиональных компетенций студентов в УО «Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова», предусматривающий, в частности, ознакомление студентов с различными построениями школьного курса геометрии и методикой организации интерактивного обучения на уроках математики. Надеемся, что более широкое распространение этого опыта поможет возникновению школы профессионалов в области создания школьного учебника, поможет вывести образование из зоны риска, неизбежного, когда творческая работа над учебником подменяется не всегда качественным составительством, не выводящим учебник за рамки коренных его недостатков.

РЕКОМЕНДУЕМЫЕ ИСТОЧНИКИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ, МАГИСТРАНТОВ, АСПИРАНТОВ

I. Работы по оптимизации

1. Айзерман М. Ф. Выбор вариантов. Основы теории / М. Ф. Айзерман, Ф. Т. Алескеров – М. : Наука. – 1990.

2. Ильин, В. Н., Сонин М. С. Теория принятия решений и экспертные системы / В. Н. Ильин, М. С. Сонин – М. : МАИ, 2009. – 44 с.

3. Микони, С. В. Теория и практика рационального выбора. – М. : Маршрут, 2004.

4. Мир математики: в 45 т. Т. 45 : Висенц Торра. Математика и выборы. Принятие решений / Пер. с исп. – М.: Де Агостини, 2014 – 160 с.

5. Ногин, В. Д. Принятие решений при многих критериях : учеб.-метод. пособие / В. Д. Ногин – СПб. : ЮТ АС, 2007. – 104 с.

6. Ногин, В. Д. Проблема сужения множества Парето: подходы к решению // Искусственный интеллект и принятие решений. – 2008. – №1. – С. 98–112.

7. Подиновский, В. В. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач / В. В. Подиновский, В. Д. Ногин – М. : Наука, 1982. – 254 с.

8. Принятие проектных решений : учеб. пособие / В. М. Балыбин [и др.] – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2003. – Ч. 1. – 80 с.

II. Работы по энтропии больших сложных систем

9. Балакирев, С. М. Теория вероятностей для школьников (с абсолютного нуля) : учеб. пособие, 2019. – 73 с.

10. Бирюков, Б. В. О понятии сложности / Б. В. Бирюков, В. С. Тюхтин // Логика и методология науки. IV Всесоюзный симпозиум, Киев, июнь, 1965 г. – М. : Наука, 1967. – С. 218–225.

11. Кайтез, Никола. Философия энтропии. Негэнтропийная перспектива / Никола Кайтез. – СПб : Алетейя, 2019. – 217 с.

12. Мамчур, Е. А. Принцип простоты и меры сложности / Е. А. Мамчур, Н. Ф. Овчинников, А. И. Уемов. – Москва : Наука, 1989. – 304 с.

13. Перегудов, Ф. И. Введение в системный анализ / Ф. И. Перегудов, Ф. П. Тарасенко. – Москва : Высшая школа, 1989. – 367 с.

14. Поваров, Г. Н. Ступени сложности / Г. Н. Поваров // Управление, информация, интеллект / А. И. Берг, Б. В. Бирюков, Н. Н. Воробьев [и др.] ; под ред. А. И. Берга [и др.] ; Филос. о-во СССР, науч. со-

вет по комплекстной проблеме «Кибернетика» АН СССР. – М. : Мысль 1976. – 383 с.

15. Рогановская, Е. Н. Теоретико-методические основы проектирования перспективно-инновационной среды геометрического образования: II и III ступени общего среднего образования : монография / Е. Н. Рогановская. – Могилев : МГУ имени А. А. Кулешова, 2023. – 276 с.

16. Управление, информация, интеллект / А. И. Берг, Б. В. Бирюков, Н. Н. Воробьев ; под ред. А. И. Берга [и др.] – М. : Мысль, 1976. – 383 с.

17. Эшби, У. Р. Введение в кибернетику: пер. с англ. ; под. ред. В. А. Успенского ; предисл. А. Н. Колмогорова ; изд. 2-е, стереотип. – М. : КомКнига, 2005. – 432 с.

III. Работы по фрактальным структурам

18. Балханов, В. К. Основы фрактальной геометрии и фрактального исчисления / отв. ред. Ю. Б. Башкуев. – Улан-Удэ : Изд-во Бурятского госуниверситета, 2013. – 224 с.

19. Божокин, С. В. Фракталы и мультифракталы / С. В. Божокин, Д. А. Паршин. – Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 128 с.

20. Мандельброт, Б. Фрактальная геометрия природы / Б. Мандельброт. – М. : Институт компьютерных исследований, 2002. – 656 с.

21. Морозов, А. Д. Введение в теорию фракталов / А. Д. Морозов. – М. : Инст. компьют. исслед., 2002. – 160 с.

IV. Основания геометрии. Вузовские учебные пособия. Энциклопедии

22. Александров, А. Д. Основания геометрии : учеб. пособие для вузов / А. Д. Александров. – М. : Наука, 1987. – 288 с.

23. Аргунов, Б. И. Элементарная геометрия : учеб. пособие для педагогических институтов / Б. И. Аргунов [и др.]. – М. : Просвещение, 1966. – 366 с.

24. Болтянский, В. Г. Элементарная геометрия / В. Г. Болтянский – М. : Высшая школа, 1972. – 280 с.

25. Гильберт, Д. Основания геометрии / Д. Гильберт. – М. : ГИТТЛ, 1948. – 491 с.

26. Каган, В. Ф. Основания геометрии. Ч. 1 / В. Ф. Каган. – М. : ГИТТЛ, 1949. – 492 с.

27. Лебег, А. Об измерении величин / А. Лебег. – М. : Учпедгиз, 1960. – 216 с.

28. Матэматычная энцыклапедыя / Гал. рэд. В. Бернік ; рэдкал.: Э. Звяровіч, Л. Майсеня [і інш.]. – Мінск : Тэхналогія, 2001. – 496 с.

29. Метельский, Н. В. Очерки истории методики математики / Н. В. Метельский. – Мн. : Вышэйшая школа, 1968. – 340 с.

30. Методика преподавания геометрии в старших классах средней школы / под ред. А. И. Фетисова. – М. : Просвещение, 1967. – 271 с.

31. Погорелов, А. В. Элементарная геометрия. Планиметрия / А. В. Погорелов. – М. : Наука, 1969. – 127 с.

32. Постников, М. М. Аналитическая геометрия / М. М. Постников. – М. : Изд. МГУ, 1962.

33. Рогановский, Н. М. Элементарная математика. Ч. III : Геометрия на плоскости : учеб. пособие для студентов / Н. М. Рогановский, Е. Н. Рогановская. – Минск : Адукацыя і выхаванне, 2003. – 336 с.; Ч. IV : Стереометрия. – Минск : Адукацыя і выхаванне, 2004. – 336 с.

34. Рогановская, Е. Н. Методика преподавания математики. Ч. 1 : Дидактика математики : учебно-исследовательский практикум для студентов физико-математического факультета / Е. Н. Рогановская. – Могилев : МГУ им. А. А. Кулешова, 2004. – 111 с.

35. Рогановский, Н. М. Методика преподавания математики : учеб. пособие для студентов физико-математического факультета : в 2 ч. Ч. 1 : Общая методика / Н. М. Рогановский, Е. Н. Рогановская. – Минск : Народная асвета, 2018. – 174 с.; Ч. 2 : Частные методики. – Минск : Народная асвета, 2019. – 231 с.

36. Рогановская, Е. Н. Методика разработки учебно-дидактических материалов на интеграционной основе в курсе математики 7–9-х классов : учеб. пособие студентов / Е. Н. Рогановская. – Могилев : МГУ имени А. А. Кулешова, 2000. – 112 с.

37. Фетисов, А. И. Очерки по евклидовой и неевклидовой геометрии / А. И. Фетисов. – М. : Просвещение, 1965. – 235 с.

V. Учебные пособия по геометрии для средней школы

38. Атанасян, Л. С. Геометрия : пробный учебник для 6 класса / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Д. Кадомцев [и др.]. – М. : Просвещение, 1987. – 127 с.

39. Болтянский, В. Г. Геометрия. 7 класс : экспериментальное учеб. пособие / В. Г. Болтянский [и др.]. – М. : Педагогика, 1974. – 160 с.

40. Бутузов, В. Ф. Геометрия, 7 класс : учебник / В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, В. В. Прасолов; под ред. В. А. Садовничего. – М. : Просвещение, 2019. – 128 с.

41. Казаков, В. В. Геометрия : учеб. пособие для 7 класса / В. В. Казаков. – Минск : Народная асвета. – 1-е изд., 2017. – 173 с. ; 2-е изд., 2022. – 183 с.

42. Киселёв, А. П. Элементарная геометрия / А. П. Киселёв. – М. : Просвещение, 1980. – 287 с.

43. Клопский, В. М. Геометрия. 9 класс / В. М. Клопский ; под ред. З. А. Скопеца [и др.]. – М. : Просвещение, 1975. – 128 с.

44. Колмогоров, А. Н. Геометрия : учеб. пособие для 6–8 классов средней школы / А. Н. Колмогоров, А. Ф. Семенович, Р. С. Черкасов. – М. : Просвещение, 1979. – 383 с.

45. Моиз, Д. Геометрия / Д. Моиз, Ф. Л. Даунс ; пер. с англ. И. А. Ванштейна ; под ред. И. М. Яглома. – М. : Просвещение, 1972. – 622 с.

46. Никитин, Н. Н. Геометрия : учебник для 6–9 кл. / Н. Н. Никитин [и др.]. – М. : Учпедгиз, 1956. – 100 с.

47. Погорелов, А. В. Геометрия : учебник для 7–11 кл. средней школы / А. В. Погорелов. – 3-е изд. – М. : Просвещение, 1992. – 383 с.

48. Рогановский, Н. М. Геометрия : учебник для 7–9 классов общеобразовательных школ с углубленным изучением математики / Н. М. Рогановский. – 3-е изд. – Минск : Народная асвета, 1997. – 574 с.

49. Рогановский, Н. М. Геометрия: 8 класс : учеб. пособие для школ и классов с углублённым изучением математики / Н. М. Рогановский, Е. Н. Рогановская, О. И. Тавгень. – Минск : Народная асвета, 2005. – 245 с.

50. Рогановский, Н. М. Геометрия. 7 класс: многообразие идей и методов : пособие для учащихся по факультативному курсу / Н. М. Рогановский, Е. Н. Рогановская, О. И. Тавгень – Минск. : Аверсэв, 2011. – 239 с.

51. Рыбкин, Н. Сборник задач по геометрии. 6–8 классы. Ч. 1 : Планиметрия / Н. Рыбкин. – М. : Просвещение, 1964. – 120 с.

52. Рыбкин, Н. Сборник задач по геометрии. 9–10 классы. Ч. 2. : Стереометрия / Н. Рыбкин. – М. : Просвещение, 1960. – 88 с.

53. Смирнова, И. М. Геометрия. 7–9 классы общеобразоват. учреждений / И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. – 2-е изд. – М. : Мнемозина, 2007. – 376 с.

54. Фетисов, А. И. Геометрия. Ч. 1 : Планиметрия / А. И. Фетисов. – М. : Изд-во АПН РСФСР, 1963. – 282 с.

55. Шарыгин, И. Ф. Геометрия : учебник для 7–9 классов / И. Ф. Шарыгин. – М. : Дрофа, 2002. – 368 с.

56. Шлыков, В. В. Геометрия. 7 класс / В. В. Шлыков. – Минск : Народная асвета, 2011. – 197 с.

57. Программно-методический комплекс «Геометрия 8 класс» (разработан в рамках республиканской программы «Информатизация системы образования» по заказу Главного информационно-аналитического центра Министерства образования Республики Беларусь. – Минск, 2006 (госрегистрация 200645114, дата регистрации 16.11.2006).

VI. Статьи

58. Ермаков, В. Г. Об учебных пособиях фрактальной структуры : тезисы докладов Герценовских чтений, посвящ. 75-летию кафедры методики преподавания математики и факультета математики / В. Г. Ермаков / Рос. гос. пед. ун-т им. А. И. Герцена. – СПб. : Образование, 1994.

59. Каблов, Е. Н. Что такое инновации / Е. Н. Каблов // Наука и жизнь. – 2011. – № 5. – С. 2–6.

60. Концепция учебного предмета «Математика» : приказ Министерства образования Республики Беларусь, 29 мая 2009 г., № 675 // Матэматыка: праблемы выкладання. – Минск: 2009. – № 4. – С. 3–7.

61. Коробкова, Т. А. Принцип динамического баланса и его реализация в учебном процессе / Т. А. Коробкова, П. В. Скулов // Образовательные технологии. – 2004. – №1. – С. 17–20.

62. Князева, Е. Н., Куркина, Е. С. Природа сложности: Методологические следствия математического моделирования эволюции сложных структур / Е. Н. Князева, Е. С. Куркина // Синергетическая парадигма. Синергетика инновационной сложности. – М. : Прогресс-Традиция, 2011. – С. 443.

63. Майсеня, Л. И. Методология современной теории и методики обучения математике: конкретизация понятийного базиса / Л. И. Майсеня // Матэматыка. – 2015. – № 4. – С. 14–23.

64. Мельников, О. И. Усиление преемственности между средней и высшей школами / О. И. Мельников // Вышэйшая школа : навукова-метадычны і публіцыстычны часопіс. – 2017. – № 2. – С. 23–24.

65. Нешков, К. И. О школьном учебнике математики / К. И. Нешков [и др.] // Математика в школе. – 1982. – № 2. – С. 52–57.

66. Образовательный стандарт. Общее среднее образование. Основные нормативы и требования // Матэматыка: праблемы выкладання. – 2007. – № 2. – С. 3–16.

67. Rahanouskaya, A. M. DESIGNING METHODOLOGY OF THE MATHEMATIKAL EDUCATION ENVIRONMENT AT THE SECONDARY SCOOL ON LAWS OF LARGE COMPLEX SYSTEMS DEVELOPMENT / A. M. Rahanouskaya // Annali d'Italia/ – Florence: 2021 – № 21. – S. 52–67.

68. Рогановская, Е. Н. Учебникам математики нового поколения необходима современная дидактическая и методическая основа / Е. Н. Рогановская, Н. М. Рогановский // Учебники естественнонаучного цикла в системе среднего и высшего образования : материалы Междунар. науч.-практ. конф., 16-17 мая 2012 / ред. совет: Т. Ю. Герасимова [и др.]. – Могилев : МГУ имени А. А. Кулешова, 2012. – С. 34–37.

69. Колесников, А. В. Элементы фрактальной геометрии в общенаучной подготовке студентов и школьников / А. В. Колесников, С. Н. Сиренко // Информатизация образования.– 2010.– № 1. – С. 17–34.

70. Рогановская, Е. Н. Фракталы как предмет обучения математике в средней школе // Актуальные проблемы обучения математике и информатике в школе и вузе : материалы VI Междунар. науч. интернет-конф., 11–12 декабря 2020 г. / под общ. ред. М. В. Егуповой, Л. И. Боженковой. – Москва: МПГУ, 2021. – С. 152–175. – URL : http://news.scienceland.ru/ (дата обращения: 29.03.21).

71. Рогановская, Е. Н. Дидактический фрактал и его применение при проектировании образовательной среды средней школы / Е. Н. Рогановская // Перспективы развития социально-гуманитарных и экономических наук в XXI веке // Сборник научных трудов : по материалам Междунар. науч.-практ. конф., Белгород, 29 июня 2018 г. : в 2 ч. Ч. 1 ; под общ. ред. Е. П. Ткачёвой. – Белгород : АПНИ, 2018. – С. 106–110.

72. Рогановская, Е. Н. Дидактический фрактал: его характеристика и применение при проектировании среды математического образования/ Рогановская Е. Н // Романовские чтения – XIII : сборник статей Междунар. науч. конф., посвящ. 105-летию МГУ имени А. А. Кулешова, Могилев, 25–26 октября 2018 г. / под общ. ред. А. С. Мельниковой. – Могилев : МГУ имени А. А. Кулешова, 2019. – С. 221–222.

73. Рогановская, Е. Н. Моделирование процесса изучения учебного материала на основе дидактического фрактала / Е. Н. Рогановская // Итоги научных исследований ученых МГУ имени А. А. Кулешова 2019 г. : материалы науч.-метод. конф., 25 января – 8 февраля 2019 г. / под ред. Е. Л. Сычовой. – Могилев : МГУ им. А. А. Кулешова, 2019. – С. 116–118.

74. Рогановская, Е. Н. Дидактический фрактал / Е. Н. Рогановская // Математическое образование: современное состояние и перспективы :

материалы Междунар. науч. конф., 20–21 февраля 2019 г., МГУ имени А. А. Кулешова, г. Могилев. – Могилев : МГУ имени А. А. Кулешова, 2019. – С. 54–59.

75. Рогановский, Н. М. Фракталы в средней школе: перспективы применения / Н. М. Рогановский, Е. Н. Рогановская // Матэматыка. – 2019. – № 6. – С. 16–30.

76. Рогановский, Н. М. Оптимизация математической подготовки учащихся на основе компетентностного подхода / Н. М. Рогановский, Е. Н. Рогановская // Матэматыка: праблемы выкладанная. – 2015. – № 1. – С. 8–17.

77. Седов, Е. А. Информационно-энтропийные свойства социальных систем / Е. А. Седов // ОНС. – 1993. – № 5. − С. 92.

78. Сетров, М. И. Общие принципы организации систем и их методологическое значение / М. И. Сетров. – Ленинград : Наука, 1971. – С. 18.

79. Шлык, В. А. Фракталы: первые уроки / В. А. Шлык // Матэматыка: праблемы выкладання. – 2006. – № 5. – С. 55–61.

СОДЕРЖАНИЕ

Научное издание

Рогановская Елена Николаевна

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА ПОСТРОЕНИЯ ШКОЛЬНОГО УЧЕБНИКА ГЕОМЕТРИИ НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ, ЭНТРОПИИ И ФРАКТАЛЬНОЙ ОРГАНИЗАЦИИ

Монография

Технический редактор *А. Г. Роскач*
Компьютерная верстка *Н. Г. Алешко*
Корректоры *Г. В. Карпенкова, И. Г. Коржова*

Подписано в печать 09.12.2025
Формат 60x84/16. Гарнитура Times New Roman Cyr.
Усл.-печ. л. 18,3. Уч.-изд. л. 19,8. Тираж 75 экз. Заказ № 214.

Учреждение образования “Могилевский государственный университет имени А.А. Кулешова”, 212022, Могилев, Космонавтов, 1
Свидетельство ГРИИРПИ № 1/131 от 03.01.2014 г.

Отпечатано в издательском отделе
МГУ имени А. А. Кулешова. 212022, Могилев, Космонавтов, 1