УДК 517.955

С.В.ЖЕСТКОВ

ГЛОБАЛЬНЫЙ ВАРИАНТ КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЫ КОШИ-КОВАЛЕВСКОЙ

В последнее время различным абстрактным вариантам нелинейной теоремы Коши-Ковалевской посвящено значительное число работ (см., например, Рж. мат. 1995, 9Б207, 9Б700, 10Б214,10Б216). Однако все они носят локальный характер и не позволяют устанавливать существование глобального по t решения задачи Коши, что является их существенным недостатком. В настоящей работе доказывается глобальный вариант нелинейной теоремы Коши-Ковалевской на основе развития классического метода мажорант Коши. Отметим, что глобальные варианты этой теоремы для различных частных случаев систем Ковалевской установлены в [1-4].

Следуя [5], достаточно исследовать разрешимость следующей задачи Коши:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{k=1}^{n} C_k(t,x,u)\frac{\partial u}{\partial x_k}+f(t,x,u)\ , \qquad u\in R^m, \tag{1}$$

$$u\big|_{t=t_0}=0, \tag{2}$$

$$G=\{t,x,u: t\ge t_0\ge 0,\ \ \|x\|\le Q,\ \ \|u\|\le Q\}, \qquad Q>0\ ,$$

где матрицы $C_k(t,x,u)$ и вектор $f(t,x,u)$ непрерывны по t и аналитичны по x, u в области G, точнее говоря, разлагаются в абсолютно сходящиеся в области G степенные ряды по x, u, причем

$$C_k(t,x,u)\ll\frac{c_k(t)}{1-\dfrac{nh+mz}{Q}}\ , \qquad f(t,x,u)\ll\frac{f(t)}{1-\dfrac{nh+mz}{Q}},$$

$$\left(\|x\|\le h<\frac{Q}{n}\ , \quad \|u\|\le z<\frac{Q}{m}\right).$$

Здесь функции $c_k(t), f(t)$ непрерывны и неотрицательны на $[t_0,+\infty)$. Под нормой вектора (матрицы) понимаются следующие величины:

$$\|u\|=\max_{1\le i\le m}|u_i|\ , \quad \|x\|=\max_{1\le k\le n}|x_k|\ , \quad \|C\|=\max_{1\le s\le m}\sum_{i=1}^{m}|c_{si}|$$

Знак мажорирования $\ll$ означает, что нормы матричных (векторных) коэффициентов разложения в степенной ряд матрицы (вектора), стоящей (стоящего) слева, не превосходят соответствующих коэффициентов разложения в степенной ряд скалярной функции, стоящей справа.

Развивая классический метод мажорант Коши (см. [6]), составим соответствующую мажорантную задачу для (1), (2). Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{nc(t)}{1-\dfrac{nh+mz}{Q}}\frac{\partial z}{\partial h}+\frac{c(t)}{1-\dfrac{nh+mz}{Q}}\,, \tag{3}$$

$$z\big|_{t=t_0}=0\,, \tag{4}$$

где

$$c(t)\equiv\max\{c_1(t),\, c_2(t),\, \dots,\, c_n(t), f(t)\}\,,$$

при этом

$$\|u(t,x)\|\le z(t,h),\quad \forall t\ge t_0\,,\quad \forall\|x\|\le h<\frac{Q}{n}\,.$$

Интегрируя задачу (3), (4), найдем ее решение в явном виде

$$z(t,h)=\frac{Q-nh}{m+n^2}-\left[\frac{(Q-nh)^2}{\left(m+n^2\right)^2}-\frac{2Q}{m+n^2}\int_{t_0}^{t}c(\tau)d\tau\right]^{1/2}. \tag{5}$$

Из формулы (5) вытекает, что при выполнении неравенства

$$\int_{t_0}^{+\infty}c(\tau)d\tau<\frac{\left(1-\dfrac{nQ_0}{Q}\right)^2 Q}{2\left(m+n^2\right)}\,,\qquad h\le Q_0<\frac{Q}{n}, \tag{6}$$

где Q_0 – некоторое фиксированное число, задача (3), (4) имеет решение в области

$$t\ge t_0\ge 0\,,\quad \|x\|\le h\le Q_0<\frac{Q}{n}.$$

Таким образом, справедлива следующая глобальная

Теорема (Коши-Ковалевской). Пусть при сделанных выше предположениях о гладкости входных данных задачи (1), (2) выполнено неравенство (6). Тогда задача (1), (2) имеет единственное глобальное по t решение.

Замечание. В классическом случае (см. [5]) неравенство (6) всегда выполняется за счет малости промежутка интегрирования $[t_0\,,t]$. Следовательно, неравенство (6) определяет верхнюю границу этого промежутка. В этом и заключается смысл локальности задачи Коши, который был впервые установлен С.В.Ковалевской для общих нормальных систем в частных производных.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Жестков С.В.*** Об устойчивости, по Ляпунову, задачи Коши для линейных систем в частных производных // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26. – №4. – С. 706 – 709.
2. ***Жестков С.В.*** Об устойчивости задачи Коши для матричной системы уравнений в частных производных типа Ф.И. Федорова // Укр. мат. журнал. – 1991. – Т.43. – №5. – С. 583 – 590.

3. ***Жестков С.В.*** Об экспоненциальной устойчивости задачи Коши для линейных систем в частных производных // Дифференц. уравнения. – 1991. – Т.27. – №6. – С. 1079 – 1081.
4. ***Жестков С.В.*** Об устойчивости задачи Коши для квазилинейных нормальных систем в частных производных // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т.33. – №4. – С.558 – 559.
5. ***Ниренберг Л.*** Лекции по нелинейному функциональному анализу. – М., 1977.
6. ***Демидов Г.В.*** Некоторые приложения обобщенной теоремы Ковалевской // Численные методы механики сплошной среды. Информационный бюллетень. – Новосибирск, 1970. – Т.1. – №2. – С.10-32.