Сакович Н.В, Борбат В.Н.

Индивидуальные задания по алгебре и теории чисел.

Теория многочленов.
Алгебраические и трансцендентные числа.

Могилёв, 2009

Предлагаемый сборник индивидуальных заданий по курсу алгебры и теории чисел предназначен для организации самостоятельной работы студентов физико-математического факультета по темам курса "Теория многочленов" и "Алгебраические и трансцендентные числа".

Задания для самостоятельного решения

№1. Найдите произведение многочленов $f(x) \in \mathbf{Z}_6[x]$ и $g(x) \in \mathbf{Z}_6[x]$, если:

1.0. $f(x) = \bar{2}x^3 - \bar{3}x^2 + x - \bar{1}$, $g(x) = x^2 - \bar{4}x + \bar{3}$;
1.1. $f(x) = x^3 + \bar{3}x^2 + \bar{5}x - \bar{2}$, $g(x) = -x^2 + \bar{4}x + \bar{5}$;
1.2. $f(x) = -\bar{2}x^3 - \bar{3}x^2 + x + \bar{1}$, $g(x) = \bar{4}x^2 - \bar{3}x + \bar{1}$;
1.3. $f(x) = \bar{3}x^3 + \bar{4}x^2 - \bar{2}x - \bar{5}$, $g(x) = -\bar{4}x^2 + \bar{3}x + \bar{5}$;
1.4. $f(x) = \bar{2}x^3 + \bar{5}x^2 + \bar{3}x - \bar{2}$, $g(x) = \bar{2}x^2 + \bar{3}x + \bar{1}$;
1.5. $f(x) = \bar{5}x^3 - \bar{2}x^2 - x + \bar{4}$, $g(x) = x^2 - \bar{4}x - \bar{4}$;
1.6. $f(x) = -\bar{2}x^3 + \bar{5}x^2 - \bar{3}x - \bar{1}$, $g(x) = \bar{5}x^2 + x - \bar{2}$;
1.7. $f(x) = -\bar{5}x^3 + \bar{2}x^2 + x + \bar{3}$, $g(x) = -\bar{2}x^2 + \bar{5}x - \bar{3}$;
1.8. $f(x) = x^3 - \bar{4}x^2 - \bar{2}x + \bar{4}$, $g(x) = \bar{4}x^2 + \bar{5}x + \bar{3}$;
1.9. $f(x) = x^3 - \bar{4}x^2 + \bar{3}x + \bar{5}$, $g(x) = \bar{5}x^2 - \bar{2}x + \bar{4}$;
1.10. $f(x) = \bar{2}x^3 + \bar{4}x^2 - \bar{3}x + \bar{1}$, $g(x) = \bar{3}x^2 - \bar{2}x + \bar{5}$;
1.11. $f(x) = -\bar{3}x^3 + x^2 - x - \bar{2}$, $g(x) = -\bar{4}x^2 + \bar{5}x - \bar{1}$;
1.12. $f(x) = -\bar{4}x^3 - \bar{3}x^2 + \bar{2}x + \bar{5}$, $g(x) = -\bar{5}x^2 + \bar{2}x + \bar{1}$;
1.13. $f(x) = -\bar{5}x^3 + x^2 - \bar{4}x - \bar{4}$, $g(x) = \bar{2}x^2 - \bar{4}x + \bar{2}$;
1.14. $f(x) = -x^3 - \bar{2}x^2 + \bar{5}x + \bar{2}$, $g(x) = \bar{5}x^2 - x + \bar{3}$;
1.15. $f(x) = \bar{2}x^3 - \bar{4}x^2 + \bar{3}x - \bar{2}$, $g(x) = -\bar{3}x^2 + \bar{2}x - \bar{5}$;
1.16. $f(x) = \bar{3}x^3 - \bar{4}x^2 + \bar{3}x + \bar{4}$, $g(x) = x^2 + \bar{2}x + \bar{1}$;
1.17. $f(x) = \bar{2}x^3 + \bar{2}x^2 - \bar{5}x - \bar{1}$, $g(x) = -\bar{5}x^2 + \bar{3}x - \bar{2}$;
1.18. $f(x) = -x^3 + \bar{2}x^2 - \bar{4}x + \bar{3}$, $g(x) = \bar{4}x^2 + x - \bar{1}$;
1.19. $f(x) = x^3 + \bar{3}x^2 + \bar{5}x - \bar{2}$, $g(x) = -x^2 - \bar{4}x + \bar{3}$;
1.20. $f(x) = -\bar{2}x^3 + \bar{4}x^2 - \bar{3}x + \bar{1}$, $g(x) = \bar{5}x^2 + x - \bar{2}$;
1.21. $f(x) = -\bar{3}x^3 - \bar{2}x^2 + x - \bar{4}$, $g(x) = \bar{3}x^2 - x + \bar{5}$;
1.22. $f(x) = \bar{5}x^3 + \bar{2}x^2 - \bar{3}x + \bar{1}$, $g(x) = \bar{2}x^2 + \bar{3}x - \bar{4}$;
1.23. $f(x) = x^3 - \bar{5}x^2 + \bar{4}x - \bar{2}$, $g(x) = -\bar{3}x^2 - \bar{2}x + \bar{4}$;
1.24. $f(x) = \bar{4}x^3 + \bar{2}x^2 + x - \bar{1}$, $g(x) = x^2 - \bar{2}x + \bar{3}$;
1.25. $f(x) = \bar{2}x^3 - x^2 + \bar{4}x + \bar{5}$, $g(x) = x^2 - \bar{2}x - \bar{3}$.

№2. Определите частное и остаток от деления многочлена $f(x)$ на двучлен $g(x)$, если:

2.0. $f(x) = x^5 + 2ix^3 - 3x^2 + (1-i)x - 7$, $g(x) = x - 2 + i$;
2.1. $f(x) = x^5 - (1-i)x^4 + 3ix^3 + (1+i)x + 2$, $g(x) = x + 3 - i$;
2.2. $f(x) = x^5 - 2x^4 + ix^3 - 4x^2 + (2-i)x - 3$, $g(x) = x + 1 + 2i$;
2.3. $f(x) = x^5 + 2ix^4 - x^3 - (1+i)x^2 + x + 2i$, $g(x) = x - 1 - i$;
2.4. $f(x) = x^5 + 3ix^4 - 2x^3 - ix^2 + (3+i)x + 1$, $g(x) = x + 3 + i$;
2.5. $f(x) = x^5 - 4ix^3 + (1-i)x^2 + (2+2i)x - 1$, $g(x) = x - 1 + 3i$;
2.6. $f(x) = x^5 + (2+i)x^3 - 2ix^2 + (2-i)x + 4$, $g(x) = x + 2 - 3i$;

2.7. $f(x)=x^5-ix^4+3ix^3+x^2-(3-i)x+5$, $g(x)=x-3+i$;
2.8. $f(x)=x^5-(1-i)x^4+2ix^3-ix+2i$, $g(x)=x+1+i$;
2.9. $f(x)=x^5+2x^4-3ix^3+(2-i)x^2+x-2$, $g(x)=x+4+i$;
2.10. $f(x)=x^5+ix^4+3ix^3+(3+i)x^2-x-3i$, $g(x)=x+1-i$;
2.11. $f(x)=x^5+2ix^4-3x^3-x^2+(2+i)x+1$, $g(x)=x-2+i$;
2.12. $f(x)=x^5-4ix^3+(3-3i)x^2-2x+7$, $g(x)=x-1-3i$;
2.13. $f(x)=x^5-(1+i)x^4+2ix^3-(1-i)x+i$, $g(x)=x+2+i$;
2.14. $f(x)=x^5+(3+i)x^4-5ix^3+2x^2-6$, $g(x)=x-3-i$;
2.15. $f(x)=x^5+(2-i)x^4+3ix^3-ix+2$, $g(x)=x+3+2i$;
2.16. $f(x)=x^5-3x^4+4ix^3+(3-i)x^2+2i$, $g(x)=x-1+2i$;
2.17. $f(x)=x^5-ix^4+(1+i)x^3-(1-i)x^2+3i$, $g(x)=x-1-i$;
2.18. $f(x)=x^5+2x^4-3ix^3+(3-i)x^2+2ix-i$, $g(x)=x-3+i$;
2.19. $f(x)=x^5-4ix^4+x^3+(2-i)x^2+6$, $g(x)=x-2-3i$;
2.20. $f(x)=x^5-(3-i)x^3+2ix^2-2ix+i$, $g(x)=x+3+i$;
2.21. $f(x)=x^5+(4-i)x^4+3ix^3-(4+i)x-1$, $g(x)=x-1+i$;
2.22. $f(x)=x^5-2x^4+3ix^3-x^2+(2-i)x+4$, $g(x)=x+2+i$;
2.23. $f(x)=x^5+(2-2i)x^3+3x^2-2ix+2i$, $g(x)=x-1-i$;
2.24. $f(x)=x^5-3ix^4+(2+2i)x^3-2x+i$, $g(x)=x-3-2i$;
2.25. $f(x)=x^5+2ix^4+4ix^3+(1-i)x-3$, $g(x)=x-1+4i$.

№3. При делении многочлена $f(x)$ на $(x-x_1)$ в остатке получили r_1; на $(x-x_2)$ в остатке r_2. Найдите остаток при делении $f(x)$ на $(x-x_1)\,(x-x_2)$, если::

3.0. $x_1=2$, $x_2=-4$, $r_1=11$, $r_2=10$;
3.1. $x_1=2$, $x_2=1$, $r_1=1$, $r_2=2$;
3.2. $x_1=3$, $x_2=2$, $r_1=1$, $r_2=4$;
3.3. $x_1=-2$, $x_2=-1$, $r_1=3$, $r_2=-2$;
3.4. $x_1=4$, $x_2=6$, $r_1=3$, $r_2=-1$;
3.5. $x_1=2$, $x_2=3$, $r_1=1$, $r_2=5$;
3.6. $x_1=1$, $x_2=2$, $r_1=1$, $r_2=2$;
3.7. $x_1=-2$, $x_2=-1$, $r_1=1$, $r_2=2$;
3.8. $x_1=-3$, $x_2=-2$, $r_1=1$, $r_2=-4$;
3.9. $x_1=1$, $x_2=-1$, $r_1=5$, $r_2=-4$;
3.10. $x_1=-7$, $x_2=2$, $r_1=1$, $r_2=7$;
3.11. $x_1=-4$, $x_2=6$, $r_1=-1$, $r_2=3$;
3.12. $x_1=3$, $x_2=2$, $r_1=4$, $r_2=1$;
3.13. $x_1=1$, $x_2=-3$, $r_1=2$, $r_2=5$;
3.14. $x_1=-5$, $x_2=2$, $r_1=7$, $r_2=6$;
3.15. $x_1=3$, $x_2=-7$, $r_1=-6$, $r_2=-9$;
3.16. $x_1=-9$, $x_2=4$, $r_1=-1$, $r_2=4$;
3.17. $x_1=1$, $x_2=7$, $r_1=-2$, $r_2=1$;

3.18. $x_1 = 1,\quad x_2 = 2,\quad r_1 = -1,\quad r_2 = 8;$

3.19. $x_1 = 3,\quad x_2 = -2,\quad r_1 = 4,\quad r_2 = -2;$

3.20. $x_1 = 5,\quad x_2 = 4,\quad r_1 = -3,\quad r_2 = 9;$

3.21. $x_1 = 5,\quad x_2 = 2,\quad r_1 = 2,\quad r_2 = -4;$

3.22. $x_1 = 3,\quad x_2 = 6,\quad r_1 = -5,\quad r_2 = 3;$

3.23. $x_1 = 7,\quad x_2 = 1,\quad r_1 = 4,\quad r_2 = -6;$

3.24. $x_1 = 1,\quad x_2 = 2,\quad r_1 = -7,\quad r_2 = 1;$

3.25. $x_1 = 6,\quad x_2 = -2,\quad r_1 = 5,\quad r_2 = 1.$

№4. Найдите кратность корня x_0 многочлена $f(x)$, если:

4.0. $x_0 = 3,\quad f(x) = x^5 - 11x^4 + 42x^3 - 54x^2 - 27x + 81.$

4.1. $x_0 = 1,\quad f(x) = x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 7x + 2;$

4.2. $x_0 = -1,\quad f(x) = x^5 + 6x^4 + 14x^3 + 16x^2 + 9x + 2;$

4.3. $x_0 = 1,\quad f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 3x + 1;$

4.4. $x_0 = -1,\quad f(x) = x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 3x - 1;$

4.5. $x_0 = -1,\quad f(x) = x^5 + 2x^4 - 2x^3 - 8x^2 - 7x - 2;$

4.6. $x_0 = 1,\quad f(x) = x^5 - 6x^4 + 14x^3 - 16x^2 + 9x + 2;$

4.7. $x_0 = 2,\quad f(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8;$

4.8. $x_0 = -2,\quad f(x) = x^4 + 7x^3 + 18x^2 + 20x + 8;$

4.9. $x_0 = 2,\quad f(x) = x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8;$

4.10. $x_0 = -2,\quad f(x) = x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8;$

4.11. $x_0 = 1,\quad f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2;$

4.12. $x_0 = -1,\quad f(x) = x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 7x + 2;$

4.13. $x_0 = -1,\quad f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2;$

4.14. $x_0 = 1,\quad f(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2;$

4.15. $x_0 = -1,\quad f(x) = x^5 + 8x^4 + 22x^3 + 28x^2 + 17x + 4;$

4.16. $x_0 = -1,\quad f(x) = x^5 + 7x^4 + 18x^3 + 22x^2 + 13x + 3;$

4.17. $x_0 = 1,\quad f(x) = x^5 - 7x^4 + 18x^3 - 22x^2 + 13x - 3;$

4.18. $x_0 = 1,\quad f(x) = x^5 - x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 11x + 3;$

4.19. $x_0 = -1,\quad f(x) = x^5 - 10x^3 - 20x^2 - 15x - 4;$

4.20. $x_0 = -1,\quad f(x) = x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3;$

4.21. $x_0 = -2,\quad f(x) = x^5 + 9x^4 + 32x^3 + 56x^2 + 48x + 16;$

4.22. $x_0 = -1,\quad f(x) = x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 10x + 3;$

4.23. $x_0 = 1,\quad f(x) = x^4 + x^3 - 9x^2 + 11x - 4;$

4.24. $x_0 = 3,\quad f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 27;$

4.25. $x_0 = -3,\quad f(x) = x^4 + 8x^3 + 18x^2 - 27.$

№5. При каких p и q многочлен $f(x)$ делится на $g(x)$, если:

5.0. $f(x) = x^3 + px^2 + qx - 16,\quad g(x) = x^2 - 8x + 16;$

5.1. $f(x) = x^3 + px^2 + qx - 9$, $g(x) = x^2 - 6x + 9$;
5.2. $f(x) = x^3 + px^2 + qx - 12$, $g(x) = x^2 + 4x + 4$;
5.3. $f(x) = x^3 + px^2 + qx + 3$, $g(x) = x^2 - 2x + 1$;
5.4. $f(x) = x^3 + px^2 + qx - 4$, $g(x) = x^2 + 2x + 1$;
5.5. $f(x) = x^3 + px^2 + qx - 16$, $g(x) = x^2 - 4x + 4$;
5.6. $f(x) = x^3 + px^2 + qx + 4$, $g(x) = x^2 - 2x + 1$;
5.7. $f(x) = x^3 + px^2 + qx - 5$, $g(x) = x^2 + 2x + 1$;
5.8. $f(x) = x^3 + px^2 + qx - 8$, $g(x) = x^2 + 4x + 4$;
5.9. $f(x) = x^3 + px^2 + qx + 9$, $g(x) = x^2 - 6x + 9$;
5.10. $f(x) = x^3 + px^2 + qx + 12$, $g(x) = x^2 - 4x + 4$;
5.11. $f(x) = x^3 + px^2 + qx + 4$, $g(x) = x^2 + 2x + 1$;
5.12. $f(x) = x^3 + px^2 + qx + 16$, $g(x) = x^2 - 4x + 4$;
5.13. $f(x) = x^3 + px^2 + qx - 5$, $g(x) = x^2 - 2x + 1$;
5.14. $f(x) = x^3 + px^2 + qx + 9$, $g(x) = x^2 + 6x + 9$;
5.15. $f(x) = x^3 + px^2 + qx + 8$, $g(x) = x^2 - 4x + 4$;
5.16. $f(x) = x^3 + px^2 + qx - 3$, $g(x) = x^2 + 2x + 1$;
5.17. $f(x) = x^3 + px^2 + qx - 4$, $g(x) = x^2 - 2x + 1$;
5.18. $f(x) = x^3 + px^2 + qx + 16$, $g(x) = x^2 + 4x + 4$;
5.19. $f(x) = x^3 + px^2 + qx - 8$, $g(x) = x^2 - 4x + 4$;
5.20. $f(x) = x^3 + px^2 + qx - 9$, $g(x) = x^2 + 6x + 9$;
5.21. $f(x) = x^3 + px^2 + qx + 3$, $g(x) = x^2 + 2x + 1$;
5.22. $f(x) = x^3 + px^2 + qx - 16$, $g(x) = x^2 + 4x + 4$;
5.23. $f(x) = x^3 + px^2 + qx - 12$, $g(x) = x^2 - 4x + 4$;
5.24. $f(x) = x^3 + px^2 + qx - 3$, $g(x) = x^2 - 2x + 1$;
5.25. $f(x) = x^3 + px^2 + qx + 8$, $g(x) = x^2 + 4x + 4$.

№6. Найдите НОД многочленов $f(x)$ и $g(x)$, а также линейное представление НОД$(f(x); g(x))$ через многочлены $f(x)$ и $g(x)$, если:
6.0. $f(x) = x^3 + x^2 - 9x - 9$, $g(x) = x^2 - x - 2$;
6.1. $f(x) = x^3 - 8x^2 - x + 8$, $g(x) = x^2 - 14x + 48$;
6.2. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 16x + 48$, $g(x) = x^2 - 5x + 6$;
6.3. $f(x) = x^3 - 5x^2 - 9x + 45$, $g(x) = x^2 - 6x + 5$;
6.4. $f(x) = x^3 - 6x^2 - x + 6$, $g(x) = x^2 - 15x + 54$;
6.5. $f(x) = x^3 + 6x^2 - x - 6$, $g(x) = x^2 + 16x + 60$;
6.6. $f(x) = x^3 - 7x^2 - 36x + 252$, $g(x) = x^2 + x - 56$;
6.7. $f(x) = x^3 + x^2 - 25x - 25$, $g(x) = x^2 + 5x + 4$;
6.8. $f(x) = x^3 + 4x^2 - x - 4$, $g(x) = x^2 - 2x - 24$;
5.9. $f(x) = x^3 - 6x^2 - 25x + 150$, $g(x) = x^2 - 8x + 12$;
6.10. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 25x + 50$, $g(x) = x^2 - 9x + 14$;

6.11. $f(x)=x^3+3x^2-4x-12$, $g(x)=x^2-2x-15$;
6.12. $f(x)=x^3-4x^2-49x+196$, $g(x)=x^2-7x+12$;
6.13. $f(x)=x^3+2x^2-49x-98$, $g(x)=x^2+5x+6$;
6.14. $f(x)=x^3+5x^2-16x-80$, $g(x)=x^2+12x+35$;
6.15. $f(x)=x^3-5x^2-4x+20$, $g(x)=x^2+4x-45$;
6.16. $f(x)=x^3-7x^2-16x+112$, $g(x)=x^2-12x+35$;
6.17. $f(x)=x^3+9x^2-4x-36$, $g(x)=x^2+8x-9$;
6.18. $f(x)=x^3+4x^2-25x-100$, $g(x)=x^2-4x-32$;
6.19. $f(x)=x^3-x^2-36x+36$, $g(x)=x^2-11x+10$;
6.20. $f(x)=x^3+8x^2-25x-200$, $g(x)=x^2+9x+8$;
6.21. $f(x)=x^3-4x^2-36x+144$, $g(x)=x^2-7x+12$;
6.22. $f(x)=x^3+10x^2-9x-90$, $g(x)=x^2+12x+20$;
6.23. $f(x)=x^3-7x^2-9x+63$, $g(x)=x^2-11x+28$;
6.24. $f(x)=x^3+7x^2-x-7$, $g(x)=x^2+13x+42$;
6.25. $f(x)=x^3+8x^2-9x-72$, $g(x)=x^2+4x-32$.

№7. Отделите кратные корни многочлена $f(x)$, если:
7.0. $f(x)=x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1$;
7.1. $f(x)=x^5+8x^4+25x^3+38x^2+28x+8$;
7.2. $f(x)=x^5-7x^4+19x^3-25x^2+16x-4$;
7.3. $f(x)=x^5-8x^4+25x^3-38x^2+28x-8$;
7.4. $f(x)=x^5+7x^4+19x^3+25x^2+16x+4$;
7.5. $f(x)=x^5+4x^4+x^3-10x^2-4x+8$;
7.6. $f(x)=x^5+x^4-5x^3-x^2+8x-4$;
7.7. $f(x)=x^5-4x^4+x^3+10x^2-4x-8$;
7.8. $f(x)=x^5-x^4-5x^3+x^2+8x+4$;
7.9. $f(x)=x^5-9x^4+30x^3-46x^2+33x-9$;
7.10. $f(x)=x^5+9x^4+30x^3+46x^2+33x+9$;
7.11. $f(x)=x^5+3x^4-6x^3-10x^2+21x-9$;
7.12. $f(x)=x^5+11x^4+46x^3+90x^2+81x+27$;
7.13. $f(x)=x^5+7x^4+10x^3-18x^2-27x+27$;
7.14. $f(x)=x^5-11x^4+46x^3-90x^2+81x-27$;
7.15. $f(x)=x^5-7x^4+10x^3+18x^2-27x-27$;
7.16. $f(x)=x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1$;
7.17. $f(x)=x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1$;
7.18. $f(x)=x^5-3x^4-6x^3+10x^2+21x+9$;
7.19. $f(x)=x^5-7x^4-2x^3+46x^2+65x+25$;
7.20. $f(x)=x^5-14x^4+58x^3-106x^2+85x-25$;
7.21. $f(x)=x^5+7x^4-2x^3-46x^2+65x-25$;
7.22. $f(x)=x^5+5x^4-5x^3-25x^2+40x-16$;
7.23. $f(x)=x^5+11x^4+43x^3+73x^2+56x+16$;

7.24. $f(x)=x^5-5x^4-5x^3+25x^2+40x+16$;
7.25. $f(x)=x^5-11x^4+43x^3-73x^2+56x-16$.

№8. Вычислите результант многочленов $f(x)$ и $g(x)$. Имеют ли многочлены $f(x)$ и $g(x)$ общие корни?

8.0. $f(x)=3x^2+2x-1$, $g(x)=x^3-x+1$;
8.1. $f(x)=3x^2+7x-3$, $g(x)=x^3+2x+1$;
8.2. $f(x)=3x^2+7x+2$, $g(x)=x^3-3x+1$;
8.3. $f(x)=x^3-x+1$, $g(x)=-2x^2+3x-8$;
8.4. $f(x)=x^2+2x+5$, $g(x)=2x^3-3x^2+2x+2$;
8.5. $f(x)=x^3+3x^2+3$, $g(x)=4x^2+4x+3$;
8.6. $f(x)=2x^2+7x-9$, $g(x)=x^3-3x+8$;
8.7. $f(x)=x^2-2x+1$, $g(x)=2x^3-3x^2-2$;
8.8. $f(x)=x^3+3x^2-3$, $g(x)=x^2+2x-5$;
8.9. $f(x)=x^2+7x-8$, $g(x)=x^3-2x$;
8.10. $f(x)=7x^2+8x+2$, $g(x)=3x^3+2x+1$;
8.11. $f(x)=x^3+2x+1$, $g(x)=5x^2-x+2$;
8.12. $f(x)=3x^2+2x+1$, $g(x)=3x^3-2x+1$;
8.13. $f(x)=3x^3-2x-2$, $g(x)=7x^2-8x+2$;
8.14. $f(x)=8x^2+x+1$, $g(x)=3x^3+2x-1$;
8.15. $f(x)=4x^3+x^2+1$, $g(x)=8x^2+7x-1$;
8.16. $f(x)=x^2+x+9$, $g(x)=3x^3-4x+1$;
8.17. $f(x)=2x^2+4x+1$, $g(x)=3x^3-x^2+2x-1$;
8.18. $f(x)=4x^3+2x^2-3$, $g(x)=-2x^2+4x-1$;
8.19. $f(x)=3x^2+2x+2$, $g(x)=2x^3-3x+3$;
8.20. $f(x)=-x^3-4x+2$, $g(x)=3x^2-2x+2$;
8.21. $f(x)=3x^2+2x+1$, $g(x)=2x^3+2x-1$;
8.22. $f(x)=-x^3-3x+1$, $g(x)=3x^2+2x+2$;
8.23. $f(x)=5x^2+x+2$, $g(x)=10x^3-x-4$;
8.24. $f(x)=x^3+7x-2$, $g(x)=-5x^2+x-2$;
8.25. $f(x)=5x^2+x+1$, $g(x)=x^3+x-2$.

№9. Решите уравнение:

9.0. $x^3+9x^2+9x+81=0$;
9.1. $x^3-x^2+81x-81=0$;
9.2. $x^3+9x^2+25x+225=0$;
9.3. $x^3-x^2+25x-25=0$;
9.4. $x^3+7x^2+36x+252=0$;
9.5. $x^3-4x^2+49x+196=0$;
9.6. $x^3-6x^2+16x-96=0$;
9.7. $x^3-7x^2+16x-112=0$;
9.8. $x^3+4x^2+64x+256=0$;

9.9. $x^3-3x^2+25x-75=0$;
9.10. $x^3-2x^2+64x-128=0$;
9.11. $x^3+6x^2+9x+54=0$;
9.12. $x^3-4x^2+36x-144=0$;
9.13. $x^3-9x^2+4x-36=0$;
9.14. $x^3-7x^2+9x-63=0$;
9.15. $x^3-3x^2+4x-12=0$;
9.16. $x^3+2x^2+49x+98=0$;
9.17. $x^3-5x^2+49x-245=0$;
9.18. $x^3-8x^2+9x-72=0$;
9.19. $x^3-2x^2+36x-72=0$;
9.20. $x^3-5x^2+36x-180=0$;
9.21. $x^3+8x^2+16x+128=0$;
9.22. $x^3+x^2+16x+16=0$;
9.23. $x^3-8x^2+4x-32=0$;
9.24. $x^3-6x^2+25x-150=0$;
9.25. $x^3+5x^2+4x+20=0$.

№10. Решите уравнение:
10.0. $x^4-2x^3-3x^2-4x-10=0$
10.1. $x^4-2x^3-2x^2-6x-15=0$;
10.2. $x^4-2x^3+2x^2-6x-3=0$;
10.3. $x^4-2x^3-4x-4=0$;
10.4. $x^4+2x^3-2x^2+6x-15=0$;
10.5. $x^4+2x^3-2x^2+4x-8=0$;
10.6. $x^4-4x^3+3x^2-8x-2=0$;
10.7. $x^4+2x^3+x^2+4x-2=0$;
10.8. $x^4+2x^3+2x^2+6x-3=0$;
10.9. $x^4+2x^3+4x-4=0$;
10.10. $x^4+2x^3-3x^2+4x-10=0$;
10.11. $x^4+4x^3+3x^2+8x-2=0$;
10.12. $x^4-2x^3+x^2-4x-2=0$;
10.13. $x^4-4x^3+4x^2-12x+3=0$;
10.14. $x^4+4x^3+4x^2+12x+3=0$;
10.15. $x^4-4x^3+4x^2-8x+4=0$;
10.16. $x^4+4x^3+4x^2+8x+4=0$;
10.17. $x^4-4x^3+5x^2-12x+6=0$;
10.18. $x^4+4x^3+5x^2+12x+6=0$;
10.19. $x^4-2x^3-4x^2-4x-12=0$;
10.20. $x^4-4x^3+2x^2-12x-3=0$;
10.21. $x^4-2x^3-x^2-6x-12=0$;
10.22. $x^4-2x^3-2x^2-4x-8=0$;
10.23. $x^4+2x^3-x^2+6x-12=0$;
10.24. $x^4+4x^3+x^2+8x-2=0$;
10.25. $x^4-4x^3+x^2-8x-2=0$.

№11. Число c является корнем многочлена $f(x)\in\mathbf{Q}[x]$. Найдите остальные корни, если:

11.0. $f(x)=x^4-4x^3+4x^2-1$, $c=2-\sqrt{3}$;

11.1. $f(x)=x^4-3x^3-9x^2+25x-6$, $c=2-\sqrt{3}$;

11.2. $f(x)=x^4-9x^3+27x^2-29x+6$, $c=2+\sqrt{3}$;

11.3. $f(x)=x^4-8x^3+18x^2-8x-3$, $c=2-\sqrt{5}$;

11.4. $f(x)=x^4-14x^2-16x-3$, $c=2+\sqrt{5}$;

11.5. $f(x)=x^4-3x^3-8x^2+26x-12$, $c=2-\sqrt{2}$;

11.6. $f(x)=x^4-9x^3+28x^2-34x+12$, $c=2+\sqrt{2}$;

11.7. $f(x)=x^4-9x^3+26x^2-30x+12$, $c=3+\sqrt{3}$;

11.8. $f(x)=x^4-10x^3+33x^2-42x+18$, $c=3-\sqrt{3}$;

11.9. $f(x)=x^4-2x^3-17x^2-2x+12$, $c=3-\sqrt{5}$;

11.10. $f(x)=x^4-11x^3+43x^2-71x+42$, $c=3-\sqrt{2}$;

11.11. $f(x)=x^4-9x^3+27x^2-33x+14$, $c=3+\sqrt{2}$;

11.12. $f(x)=x^4-12x^3+49x^2-80x+42$, $c=4+\sqrt{2}$;

11.13. $f(x)=x^4+4x^3+15x^2+8x+16$, $c=4-\sqrt{2}$;

11.14. $f(x)=x^4-7x^3+3x^2+29x-26$, $c=4-\sqrt{3}$;

11.15. $f(x)=x^4-7x^3-x^2+61x-78$, $c=4+\sqrt{3}$;

11.16. $f(x)=x^4-13x^3+57x^2-103x+66$, $c=4-\sqrt{5}$;

11.17. $f(x)=x^4-11x^3+37x^2-49x+22$, $c=4+\sqrt{5}$;

11.18. $f(x)=x^4-10x^3+34x^2-46x+21$, $c=3+\sqrt{2}$;

11.19. $f(x)=x^4-8x^3+16x^2+4x-21$, $c=3-\sqrt{2}$;

11.20. $f(x)=x^4-5x^3-9x^2+23x+26$, $c=4+\sqrt{3}$;

11.21. $f(x)=x^4-13x^3+59x^2-113x+78$, $c=4-\sqrt{3}$;

11.22. $f(x)=x^4-7x^3+15x^2-11x+2$, $c=2-\sqrt{3}$;

11.23. $f(x)=x^4-8x^3+20x^2-16x+3$, $c=2+\sqrt{3}$;

11.24. $f(x)=x^4-x^3-11x^2-11x-2$, $c=2+\sqrt{5}$;

11.25. $f(x)=x^4-3x^3-7x^2+7x+2$, $c=2-\sqrt{5}$.

№12. Вычислите значения многочлена $f(x_1,x_2,x_3)$ от корней уравнения $x^3+3x-10=0$, если:

12.0. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^3+x_2^3+x_3^3-3(x_1x_2x_3)$;

12.1. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^3+x_2^3+x_3^3+5(x_1+x_2+x_3)$;

12.2. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-3(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_2+x_3)$;

12.3. $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2(x_1+x_3)^2(x_2+x_3)^2-3(x_1+x_2+x_3)$;

12.4. $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1^2+x_2^2)(x_1^2+x_3^2)(x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2x_3$;

12.5. $f(x_1,x_2,x_3)=\dfrac{x_1}{x_1+1}+\dfrac{x_2}{x_2+1}+\dfrac{x_3}{x_3+1}$;

12.6. $f(x_1,x_2,x_3)=\dfrac{x_1}{x_1+2}+\dfrac{x_2}{x_2+2}+\dfrac{x_3}{x_3+2}$;

12.7. $f(x_1,x_2,x_3)=\dfrac{x_1}{x_1+3}+\dfrac{x_2}{x_2+3}+\dfrac{x_3}{x_3+3}$;

12.8. $f(x_1,x_2,x_3)=\dfrac{x_1}{x_1-1}+\dfrac{x_2}{x_2-1}+\dfrac{x_3}{x_3-1}$;

12.9. $f(x_1,x_2,x_3)=\dfrac{x_1}{x_1-2}+\dfrac{x_2}{x_2-2}+\dfrac{x_3}{x_3-2}$;

12.10. $f(x_1,x_2,x_3)=\dfrac{x_1}{x_1-3}+\dfrac{x_2}{x_2-3}+\dfrac{x_3}{x_3-3}$;

12.11. $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2-5(x_1+x_2+x_3)$;

12.12. $f(x_1,x_2,x_3)=\dfrac{(x_1+x_2)^2}{x_3}+\dfrac{(x_2+x_3)^2}{x_1}+\dfrac{(x_1+x_3)^2}{x_2}$;

12.13. $f(x_1,x_2,x_3)=\dfrac{(x_1-x_2)^2}{x_3}+\dfrac{(x_2-x_3)^2}{x_1}+\dfrac{(x_1-x_3)^2}{x_2}$;

12.14. $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_0)(x_2+x_3)(x_1+x_3)+4(x_1+x_2+x_3)$;

12.15. $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1x_2-x_3)(x_3x_2-x_1)(x_3x_1-x_2)$;

12.16. $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1^2-x_2-x_3)(x_2^2-x_1-x_3)(x_3^2-x_1-x_2)$;

12.17. $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2-x_3)(x_1+x_3-x_2)(x_2+x_3-x_1)$;

12.18. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^4+x_2^4+x_3^4-4(x_1+x_2+x_3)$;

12.19. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_3+x_2)$;

12.20. $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1x_2+x_3)(x_3x_2+x_1)(x_3x_1+x_2)$;

12.21. $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)(x_3+x_1)(x_3+x_2)-5(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$;

12.22. $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2+x_3)^3-2x_1x_2x_3$;

12.23. $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2+x_3)^3+3(x_1+x_2+x_3)$;

12.24. $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1^2+x_2+x_3)(x_2^2+x_1+x_3)(x_3^2+x_2+x_1)$;

12.25. $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2)^2(x_3-x_1)^2(x_3-x_2)^2-5(x_1+x_2+x_3)$.

№13. Освободитесь от иррациональности в знаменателе, если:

13.0. а) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}+3\sqrt[3]{2}-1}$, б) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}}$;

13.1. а) $\dfrac{1}{-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}-2}$, б) $\dfrac{1}{1-2\sqrt[3]{5}+\sqrt{2}}$;

13.2. а) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}$, б) $\dfrac{1}{2-3\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}}$;

13.3. а) $\dfrac{1}{2\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{25}+1}$, б) $\dfrac{1}{1+2\sqrt[3]{2}-\sqrt{5}}$;

13.4. а) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{25}+1}$, б) $\dfrac{1}{2-3\sqrt[3]{5}-2\sqrt{2}}$;

13.5. а) $\dfrac{1}{2\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}-1}$, б) $\dfrac{1}{2+\sqrt[3]{3}-3\sqrt{5}}$;

13.6. а) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{49}+3\sqrt[3]{7}+2}$, б) $\dfrac{1}{1+2\sqrt[3]{5}+\sqrt{3}}$;

13.7. а) $\dfrac{1}{-2\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{7}+2}$, б) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+2\sqrt{3}-1}$;

13.8. а) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}+3\sqrt[3]{2}-1}$, б) $\dfrac{1}{2\sqrt[3]{3}-3\sqrt{2}-1}$;

13.9. а) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}-3\sqrt[3]{25}+1}$, б) $\dfrac{1}{-\sqrt[3]{5}+2\sqrt{2}+2}$;

13.10. а) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}-3\sqrt[3]{3}-3}$, б) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-3\sqrt{5}+2}$;

13.11. а) $\dfrac{1}{-\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}-3}$, б) $\dfrac{1}{2\sqrt[3]{3}+\sqrt{5}-1}$;

13.12. а) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{25}+2\sqrt[3]{5}+1}$, б) $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{5}-\sqrt{3}-1}$;

13.13. а) $\dfrac{1}{-\sqrt[3]{7}+3\sqrt[3]{49}+1}$, б) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-2\sqrt{3}+1}$;

13.14. а) $\dfrac{1}{2\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}-1}$, б) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}+2\sqrt{2}+3}$;

13.15. а) $\dfrac{1}{-\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}-1}$, б) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}+3\sqrt{3}-3}$;

13.16. а) $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{5}+2}$, б) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}+3\sqrt{5}-1}$;

13.17. а) $\dfrac{1}{2\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{25}+1}$, б) $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{2}-2\sqrt{5}+1}$;

13.18. а) $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{5}-3}$, б) $\dfrac{1}{2\sqrt[3]{5}-3\sqrt{2}+3}$;

13.19. а) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{7}-2\sqrt[3]{49}-2}$, б) $\dfrac{1}{2\sqrt[3]{3}+3\sqrt{2}-3}$;

13.20. а) $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{49}+2}$, б) $\dfrac{1}{-\sqrt[3]{2}+3\sqrt{3}+1}$;

13.21. а) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{4}-2}$, б) $\dfrac{1}{-2\sqrt[3]{5}+\sqrt{3}+1}$;

13.22. а) $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}+2}$, б) $\dfrac{1}{-2\sqrt[3]{3}+3\sqrt{5}-2}$;

13.23. а) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{3}-3}$, б) $\dfrac{1}{2\sqrt[3]{2}+3\sqrt{3}-2}$;

13.24. а) $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}$, б) $\dfrac{1}{-\sqrt[3]{3}-2\sqrt{5}-1}$;

13.25. а) $\dfrac{1}{2\sqrt[3]{25}-2\sqrt[3]{5}+3}$, б) $\dfrac{1}{-2\sqrt[3]{5}+\sqrt{2}+1}$.

№14. Установите, разрешимо ли в квадратных радикалах уравнение:

14.0. a) $2x^7+9x^5+15x^3+6=0$, b) $2x^3+6x^2-4x+3=0$;

14.1. a) $3x^8+16x^7+4x^5-8x^4+12x^2-2=0$, b) $x^3+2x^2-8x+10=0$;

14.2. a) $-3x^7+15x^6-5x^5+20x^4+15x+5=0$, b) $7x^4+9x^3-21x+6=0$;
14.3. a) $3x^6+10x^5+4x^4-8x^3+4x-6=0$, b) $2x^3-3x^2+12x-24=0$;
14.4. a) $-5x^7+4x^6-12x^4+8x^2-10x+10=0$, b) $3x^4-5x^3+10x-30=0$;
14.5. a) $15x^6-12x^4+8x^3-10x^2+4x-2=0$, b) $x^3+7x^2-14x+35=0$;
14.6. a) $12x^8-15x^7+40x^5+30x^3-15x^2+10=0$. b) $3x^3-7x^2-21x+28=0$;
14.7. a) $4x^6+12x^5+30x^4+21x^2-9x+6=0$, b) $x^4-9x^3-18x+24=0$;
14.8. a) $10x^5+15x^4+9x^3-18x^2+12x-6=0$, b) $7x^3+4x^2+14x-18=0$;
14.9. a) $12x^6+15x^5+10x^4-30x^2-15x-10=0$, b) $5x^4+8x^3-14x-10=0$;
14.10. a) $8x^7+18x^6-15x^5-30x^3+24x^2+6=0$, b) $2x^3-9x^2+18x-21=0$;
14.11. a) $-3x^5+5x^4-10x^3+45x^2-25x+15=0$, b) $3x^4-5x^3-10x+30=0$;
14.12. a) $-x^6+49x^4-10x^3+45x^2-25x+15=0$, b) $x^3+8x^2-24x+14=0$;
14.13. a) $5x^5+35x^4-21x^3+14x^2-28x+14=0$, b) $7x^4-5x^3-10x+20=0$;
14.14. a) $6x^6+5x^5+20x^4-10x^2+25x-10=0$, b) $5x^3-2x^2+14x-6=0$;
14.15. a) $-7x^8+6x^6+14x^4+28x^2+6=0$, b) $2x^4+5x^3-20x+35=0$;
14.16. a) $10x^5+21x^4+9x^3-12x^2+30x-15=0$, b) $3x^3+4x^2-8x-18=0$;
14.17. a) $10x^6+18x^5-15x^4+21x^3-30x^2+12=0$, b) $x^4+12x^3-6x+22=0$;
14.18. a) $-2x^7+15x^6-35x^5+15x^3+25x-10=0$, b) $5x^4-9x^3+27x-15=0$;
14.19. a) $4x^8+12x^6+9x^4-15x^3-6x^2+6=0$, b) $2x^3+3x^2-12x+24=0$;
14.20. a) $6x^6-15x^5+25x^3+15x^2-75x+30=0$, b) $3x^4+7x^3-28x-14=0$;
14.21. a) $-28x^5+18x^4+9x^3-15x^2+27x-15=0$, b) $x^3-5x^2+20x+15=0$;
14.22. a) $-14x^6+81x^5-45x^4+18x^3-21x+12=0$, b) $7x^4+2x^3-14x+6=0$;
14.23. a) $8x^8-6x^6+18x^4+21x^3-6x+6=0$, b) $5x^3+9x^2-18x-15=0$;
14.24. a) $7x^5+12x^4+14x^3-18x^2+14x-12=0$, b) $7x^3-4x^2+12x-10=0$;
14.25. a) $25x^6-30x^5+24x^4+12x^2-18x+18=0$, b) $2x^4-5x^3+15x-30=0$.

Решение типового варианта

Задание 1.0

Найдите произведение многочленов $f(x)\in\mathbf{Z}_6[x]$ и $g(x)\in\mathbf{Z}_6[x]$, если $f(x)=\bar{2}x^3-\bar{3}x^2+x-\bar{1}$, $g(x)=x^2-\bar{4}x+\bar{3}$.

Решение.

<u>1 способ.</u> Умножим каждый член $f(x)$ на каждый член $g(x)$:

$h(x)=f(x)\,g(x)=(\bar{2}x^3-\bar{3}x^2+x-\bar{1})(x^2-\bar{4}x+\bar{3})=$
$\bar{2}x^5-\bar{2}x^4+\bar{0}x^3-\bar{3}x^4+\bar{0}x^3-\bar{3}x^2+x^3-\bar{4}x^2+\bar{3}x-x^2+\bar{4}x-\bar{3}=\bar{2}x^5-\bar{5}x^4+x^3-\bar{8}x^2+\bar{7}x-\bar{3}.$

<u>2 способ.</u> Поскольку $\mathbf{Z}_6[x]$ имеет делители нуля, то
$\deg h(x)\le\deg f(x)+\deg g(x)=3+2=5$.

По определению произведения многочленов коэффициент c_k при x^k многочлена $h(x)$ выражается через коэффициенты a_i и b_j многочленов $f(x)$ и $g(x)$ соответственно по формуле $c_k=\sum_{i=0}^{k}a_ib_{k-i}$, где коэффициенты с номером, большим степени многочлена, считаются равными нулю. Для вычисления коэффициента при x^k выбираем “начальную” пару коэффициентов (a_i,b_j), для которой $i+j=k$.

Обычно a_i берут с наибольшим возможным i, а затем перемещаются вправо по $f(x)$ и влево по $g(x)$, пока не будут перебраны все такие пары.

Вычислим коэффициенты многочлена $h(x)$:

$c_5 = \bar{2} \cdot \bar{1} = \bar{2}$.

$c_4 = \bar{2} \cdot (-\bar{4}) + (-\bar{3}) \cdot \bar{1} = -\bar{5} = \bar{1}$.

$c_3 = \bar{2} \cdot \bar{3} + (-\bar{3}) \cdot (-\bar{4}) + \bar{1} \cdot \bar{1} = \bar{1}$.

$c_2 = (-\bar{3}) \cdot \bar{3} + \bar{1} \cdot (-\bar{4}) + (-\bar{1}) \cdot \bar{1} = -\bar{2} = \bar{4}$.

$c_1 = \bar{1} \cdot \bar{3} + (-\bar{1}) \cdot (-\bar{4}) = \bar{1}$.

$c_0 = (-\bar{1}) \cdot \bar{3} = -\bar{3} = \bar{3}$.

Таким образом, $h(x) = \bar{2}x^5 + x^4 + x^3 + \bar{4}x^2 + x + \bar{3}$.

Ответ: $f(x)\ g(x) = \bar{2}x^5 + x^4 + x^3 + \bar{4}x^2 + x + \bar{3}$.

Задание 2.0

Определите частное и остаток от деления многочлена $f(x)$ на двучлен $g(x)$, если $f(x) = x^5 + 2ix^3 - 3x^2 + (1-i)x - 7$, $g(x) = x - 2 + i$.

Решение.

<u>1 способ.</u> Применим схему Горнера для деления многочлена $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$ на линейный двучлен $x - x_0$. Частное, очевидно, будет иметь степень $n-1$: $q(x) = c_0x^{n-1} + c_1x^{n-2} + ... + c_{n-2}x + c_{n-1}$. Возрастание номеров коэффициентов от нуля при убывании показателей степеней переменной удобно при применении схемы Горнера. Все коэффициенты многочлена $f(x)$, в том числе и нулевые, выпишем в верхней строке таблицы. Так как $c_0 = a_0$, то старший коэффициент a_0 запишем и во вторую строку, в которую будут заносится коэффициенты c_i частного $q(x)$. Каждый следующий за c_0 коэффициент частного будем вычислять по формуле $c_i = x_0c_{i-1} + a_i$. Вычисленное по этой формуле c_n не является коэффициентом частного, а есть остаток от деления $f(x)$ на $x - x_0$. В нашем случае $x_0 = 2 - i$:

$x_0 \backslash a_i$	1	0	$2i$	-3	$1-i$	-7
$2-i$	1	$2-i$	$3-2i$	$1-7i$	$-4-16i$	$-28i-31$

Очевидно, что частное от деления многочлена $f(x)$ на двучлен $(x-2+i)$ есть $q(x) = x^4 + (2-i)x^3 + (3-2i)x^2 + (1-7i)x - (4+16i)$, а остаток $r(x) = -31 - 28i$.

<u>2 способ.</u> Непосредственным делением $f(x)$ на $g(x)$ найдем частное и остаток от деления. Для вычисления старшего члена частного делим коэффициент старшего члена делимого на коэффициент старшего члена делителя. Степень частного равна разности степеней делимого и делителя. Затем делитель умножаем на полученный старший член частного и результат вычитаем из $f(x)$. Если полученная разность $f_1(x)$ имеет степень не меньше, чем степень делителя, то процесс повторяем для многочленов $f_1(x)$ и $g(x)$. Вычисления заканчиваются, когда полученная разность $f_i(x)$ имеет степень, меньшую степени делителя $g(x)$.

$$
\begin{array}{l|l}
\underline{}\, x^5+2ix^3-3x^2+(1-i)x-7 & x-(2-i) \\
\hline
\underline{x^5-(2-i)x^4} & x^4+(2-i)x^3+(3-2i)x^2+(1-7i)x+(-4-16i)
\end{array}
$$

$$\underline{}\,(2-i)x^4+2ix^3-3x^2+(1-i)x-7=f_1(x)$$

$$\underline{(2-i)x^4+(3-4i)x^3}$$

$$\underline{}\,(3-2i)x^3-3x^2+(1-i)x-7=f_2(x)$$

$$\underline{(3-2i)x^3-(4-7i)x^2}$$

$$\underline{}\,(1-7i)x^2+(1-i)x-7=f_3(x)$$

$$\underline{(1-7i)x^2-(-5-15i)x}$$

$$\underline{}\,(-4-16i)x-7=f_4(x)$$

$$\underline{(-4-16i)x-(-24-28i)}$$

$$-31-28i=r(x)$$

Итак, частное от деления многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)=x-2+i$ $q(x)=x^4+(2-i)x^3+(3-2i)x^2+(1-7i)x+(-4-16i)$, остаток $r(x)=-31-28i$.

Ответ: $q(x)=x^4+(2-i)x^3+(3-2i)x^2+(1-7i)x+(-4-16i)$, $r(x)=-31-28i$.

Задание 3.0

При делении многочлена $f(x)$ на $(x-2)$ в остатке получили 11; на $(x+4)$ – в остатке 10. Найдите остаток при делении $f(x)$ на $(x-2)(x+4)$.

Решение.

При делении многочлена $f(x)$ на двучлен $(x-x_0)$ остаток от деления равен $c=f(x_0)$: $f(x)=(x-x_0)q(x)+c$, где $c=f(x_0)$. Поэтому

$$f(x)=(x-2)q_1(x)+11,\quad f(2)=11;$$

$$f(x)=(x+4)q_2(x)+10,\quad f(2)=10.$$

По теореме о делении с остатком для многочленов $f(x)$ и $g(x)$ существует единственная пара многочленов $q(x)$ и $r(x)$, такая, что $f(x)=g(x)\cdot q(x)+r(x)$, где $\deg r(x)<\deg g(x)$. Применим теорему о делении с остатком к многочленам $f(x)$ и $g(x)$, где $g(x)=(x-2)(x+4)=x^2+2x-8$: $f(x)=(x-2)(x+4)q(x)+r(x)$.

Так как $\deg g(x)=2$, то $\deg r(x)=1$, то $r(x)=ax+b$. Получаем: $f(x)=(x^2+2x-8)q(x)+(ax+b)$.

Вычислим левую и правую часть от корней многочлена $g(x)$.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{при } x=2: & f(2)=2a+b=11, \\ \text{при } x=4: & f(-4)=-4a+b=10. \end{array}\right\}$$

Из системы получаем, что $\begin{cases} a=\dfrac{1}{6}, \\ b=\dfrac{32}{3}. \end{cases}$

Следовательно, искомый остаток $r(x)=\dfrac{1}{6}(x+64)$.

Ответ: $r(x)=\dfrac{1}{6}(x+64)$.

Задание 4.0

Найти кратность корня $x_0 = 3$ многочлена $f(x) = x^5 - 11x^4 + 42x^3 - 54x^2 - 27x - 81$.

Решение.

Используем схему Горнера для последовательного деления $f(x)$ и получающихся частных на двучлен $x - 3$.

x_0 \ a_i	1	-11	42	-54	-27	81
3	1	-8	18	0	-27	0
3	1	-5	3	9	0	
3	1	-2	-3	0		
3	1	1	0			
3	1	4				

Из схемы Горнера следует, что $f(x) = (x-3)(x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 27x) =$

$= (x-3)^2(x^3 - 5x^2 + 3x + 9) = (x-3)^3(x^2 - 2x - 3) = (x-3)^4(x-1)$.

Кратность корня равна числу ненулевых остатков в схеме Горнера.

Ответ: $x_0 = 3$ является корнем кратности 4.

Задание 5.0

При каких p и q многочлены $f(x)$ делится на $g(x)$, если

$f(x) = x^3 + px^2 + qx - 16$, $g(x) = x^2 - 8x + 16$.

Решение.

<u>1 способ.</u> Непосредственным делением $f(x)$ на $g(x)$ найдем частное и остаток от деления.

$$\begin{array}{l|l}
_\,x^3 + px^2 + qx - 16 & x^2 - 8x + 16 \\
\cline{2-2}
\underline{\;\;x^3 - 8x^2 + 16x\;\;} & x + (p+8) \\
\qquad _\,(p+8)x^2 + (q-16)x - 16 & \\
\qquad\quad \underline{(p+8)x^2 - 8(p+8)x + 16(p+8)} & \\
\qquad\qquad (q - 16 + 8p + 64)x + (16 + 16p + 128) &
\end{array}$$

Так как многочлен $f(x)$ делится на $g(x)$, то приравняем полученный остаток к нулю: $(q + 8p + 48)x + (16p + 144) = 0$. Данное условие равносильно системе:

$$\begin{cases} q + 8p + 48 = 0, \\ 16p + 144 = 0. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, получаем, что $p = -9$, $q = 24$.

Значит, исходный многочлен имеет вид $f(x) = x^3 - 9x^2 24x - 16$.

<u>2 способ.</u> По определению делимости $(f(x) \vdots g(x)) <=> (\exists q(x))[f(x) = g(x) \cdot q(x)]$.

Так как $\deg f(x) = 3$, $\deg g(x) = 2$, то $\deg q(x) = 1$. Пусть $q(x) = mx + n$. Тогда условие делимости многочленов запишется в виде: $x^3 + px^2 + qx - 16 = (x^2 - 8x + 16)(mx + n)$.

Выполнив преобразования в правой части равенства, получаем:

$x^3 + px^2 + qx - 16 = mx^3 + (n - 8m)x^2 + (16m - 8n)x + 16n$.

По определению равенства многочленов последнее равенство равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} m = 1, \\ n - 8m = p, \\ 16m - 8n = q, \\ 16n = -16. \end{cases}$$

Исключив из этой системы m и n, получаем $p = -9,\ q = 24$

<u>3 способ.</u> По определению делимости $(f(x) \vdots g(x)) \Leftrightarrow (\exists q(x))[f(x) = g(x) \cdot q(x)]$.

Учитывая функциональное равенство многочленов, получаем $(\forall c \in R)[f(c) = g(c)q(c)]$.

Найдём корни уравнения $g(x) = 0$, где $g(x) = x^2 - 8x + 16$, $g(x) = (x-4)^2$.

Так как $c = 4$ двукратный корень уравнения $x^2 - 8x + 16 = 0$, то $f(x) \vdots (x-4)$ и $f(x) \vdots (x-4)^2$. Для вычисления остатков от деления воспользуемся схемой Горнера:

x_0 \ a_i	1	p	q	-16
4	1	4+p	16+4p+q	48+16p+4q
4	1	8+p	48+8p+q	

Приравняем полученные остатки к нулю, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 48 + 16p + 4q = 0, \\ 48 + 8p + q = 0. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, получаем, что $p = -9,\ q = 24$.

Ответ: $p = -9,\ q = 24$.

Задание 6.0

Найдите НОД многочленов $f(x)$ и $g(x)$, а также линейное представление НОД$(f(x), g(x))$ через многочлены $f(x)$ и $g(x)$, если $f(x) = x^3 + x^2 - 9x - 9$, $g(x) = x^2 - x - 2$.

Решение.

Для нахождения НОД$(f(x), g(x))$ двух многочленов воспользуемся алгоритмом Евклида и свойствами НОД$(f(x), g(x))$:

- если $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$, то НОД($f(x)$, $g(x)$) = НОД($g(x)$, $r(x)$);
- если $f(x) \vdots g(x)$, то НОД($f(x)$, $g(x)$) = $g(x)$.

Таким образом, НОД($f(x)$, $g(x)$) есть последний отличный от нуля остаток в алгоритме Евклида, примененный к многочлена $f(x)$ и $g(x)$.

Применим алгоритм Евклида к многочленам $f(x)$ и $g(x)$:

$$\begin{array}{r|l} -\,x^3 + x^2 - 9x - 9 & x^2 - x - 2 \\ \cline{2-2} \underline{x^3 - x^2 - 2x} & x + 2 \\ -\,2x^2 - 7x - 9 & \\ \underline{2x^2 - 2x - 4} & \\ -5x - 5 & \end{array}$$

Так как НОД($f(x)$, $g(x)$) = НОД($g(x)$, $r(x)$), то

$$
\begin{array}{r|l}
-\;x^2 - x - 2 & -5x \;\; -5 \\
\cline{2-2}
x^2 + x & -1/5x + 2/5 \\
\cline{1-1}
-\;-2x - 2 & \\
-2x - 2 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Последний отличный от нуля остаток в алгоритме Евклида $r(x) = x + 1$. Значит, НОД($f(x)$, $g(x)$) $= x + 1$.

Найдем линейное представление НОД($f(x)$, $g(x)$) через многочлены $f(x)$ и $g(x)$. Это можно сделать двумя способами.

1 способ. Используем непосредственно алгоритм Евклида.

Запишем алгоритм Евклида для многочленов $f(x)$ и $g(x)$ в сокращенной форме:

$f(x) = g(x)(x+2) - 5(x+1)$, $g(x) = (x-2)$.

Так как НОД($f(x)$, $g(x)$) $= x + 1$, то выразим остаток $r(x) = x + 1$ из первого уравнения: $x + 1 = \frac{1}{5}(g(x)(x+2) - f(x))$. Тогда НОД($f(x), g(x)$) $= -\frac{1}{5} f(x) + \frac{1}{5}(x+2) g(x)$.

2 способ. Используем метод неопределенных коэффициентов.

Если $d(x) =$ НОД($f(x), g(x)$), то $d(x)$ допускает линейное представление $d(x) = u(x) f(x) + v(x) g(x)$, причем $\deg v(x) < \deg f(x)$, $\deg u(x) < \deg g(x)$.

Разделим многочлены $f(x)$ и $g(x)$ на НОД($f(x), g(x)$) $= x + 1$

$x^3 + x^2 - 9x - 9 = (x+1)(x^2 - 9)$, $f_1(x) = x^2 - 9$;

$x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$, $g_1(x) = x - 2$.

Разделив равенство $d(x) = u(x) f(x) + v(x) g(x)$ на $d(x)$, получаем: $1 = u(x)(x^2 - 9) + v(x)(x-2)$, причем $\deg v(x) < 2, \deg u(x) < 1$. Многочлены $v(x)$, $u(x)$ будем искать в виде: $v(x) = ax + b$, $u(x) = c$. Тогда равенство $1 = u(x)(x^2 - 9) + v(x)(x-2)$ запишется в виде:

$1 = c(x^2 - 9) + (ax + b)(x - 2)$,

$1 = x^2(a - c) + x(-2a + b) + (-2b - 9c)$.

Из условия равенства двух многочленов получаем систему линейных уравнений:

$$
\begin{cases}
a + c = 0, \\
-2a + b = 0, \\
-2b - 9c = 1.
\end{cases}
$$

Решив систему методом Гаусса, найдём $a = \frac{1}{5}$; $b = \frac{2}{5}$; $c = -\frac{1}{5}$.

Тогда $v(x) = \frac{1}{5}x + \frac{2}{5} = \frac{1}{5}(x+2)$; $u(x) = -\frac{1}{5}$.

После умножения обеих частей равенства $1 = u(x)(x^2 - 9) + v(x)(x-2)$ на НОД($f(x), g(x)$) $= x + 1$ получим линейное выражение НОД($f(x), g(x)$) через исходные многочлены: НОД($f(x), g(x)$) $= -\frac{1}{5} f(x) + \frac{1}{5}(x+2) g(x)$

Ответ: НОД($f(x)$, $g(x)$) = $x + 1$; НОД($f(x), g(x)$) $= -\frac{1}{5} f(x) + \frac{1}{5}(x+2) g(x)$.

Задание 7.0

Отделите кратные корни многочлена $f(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1$.

Решение.

Вычислим формальную производную многочлена $f(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1$:

$f'(x) = 5x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 4x + 1$.

С помощью алгоритма Евклида и свойств НОД$(f(x), g(x))$ найдём НОД$(f(x), f'(x))$.

Будем использовать следующее свойство НОД$(f(x), g(x))$:

- если многочлены $f(x)$ и $g(x)$ ассоциированы (т.е. отличаются на обратимый множитель), то для любого многочлена $h(x)$ НОД$(f(x), h(x))$ = НОД$(q(x), h(x))$.

Будем делить $f(x)$ на $g(x)$. Умножим на 5 многочлен $f(x)$ и разделим $5f(x)$ на $f'(x)$. Чтобы избежать дробных коэффициентов, будем умножать, если потребуется на 5 и получающиеся промежуточные остатки. Знак // разделяет различные "частные".

$$
\begin{array}{l|l}
-\,5x^5 + 5x^4 - 10x^3 - 10x^2 + 5x & 5x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 4x + 1 \\ \cline{2-2}
\,\underline{5x^5 + 4x^4 - 6x^3 - 4x^2 + x} & x\,//+1 \\
\qquad x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 4x + 5 = r_1(x) & \\
\quad -\,5x^4 - 20x^3 - 30x^2 + 20x + 25 = 5r_1(x) & \\
\qquad \underline{5x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 4x + 1} & \\
\qquad -24x^3 - 24x^2 + 24x + 24 = -24r_2(x), &
\end{array}
$$

где $r_2(x) = x^3 + x^2 - x - 1$. Разделим $f'(x)$ на $r_2(x)$:

$$
\begin{array}{l|l}
-\,5x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 4x + 1 & x^3 + x^2 - x - 1 \\ \cline{2-2}
\,\underline{5x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 5x} & 5x - 1 \\
\quad -\,-x^3 - x^2 + x + 1 & \\
\qquad \underline{-x^3 - x^2 + x + 1} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Так как НОД$(f(x), f'(x))$ = НОД$(f'(x), 24r_2(x))$ = НОД$(f'(x), r_2(x))$ = $r_2(x)$, то НОД$(f(x), f'(x))$=$x^3 + x^2 - x - 1$. Многочлен $x^3 + x^2 - x - 1$ содержит все кратные множители $f(x)$, но в степенях, на 1 меньших. Многочлен $\dfrac{f(x)}{\text{НОД}(f(x), f'(x))}$ содержит все множители многочлена $f(x)$, но только в первой степени. Найдём частное от деления $f(x)$ на НОД$(f(x), f'(x))$.

$$
\begin{array}{l|l}
-\,x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1 & x^3 + x^2 - x - 1 \\ \cline{2-2}
\,\underline{x^5 + x^4 - x^3 - x^2} & x^2 - 1 \\
\quad -\,-x^3 - x^2 + x + 1 & \\
\qquad \underline{-x^3 - x^2 + x + 1} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Итак, $\dfrac{f(x)}{\text{НОД}(f(x), f'(x))} = x^2 - 1$. Очевидно, что корнями последнего многочлена являются числа ± 1. Кратности корней $x_0 = \pm 1$ у многочлена $\text{НОД}(f(x), f'(x)) = x^3 + x^2 - x - 1$ найдём с помощью схемы Горнера:

x_0 \ a_i	1	1	-1	-1
1	1	2	1	0
1	1	3	$4 \neq 0$	
-1	1	1	0	
-1	1	0		

Следовательно, $x = 1$ является однократным корнем многочлена $\text{НОД}(f(x), f'(x))$ и двукратным корнем многочлена $f(x)$, а $x = -1$ является двукратным корнем многочлена $\text{НОД}(f(x), f'(x))$ и трёхкратным корнем многочлена $f(x)$. Так как $\deg f(x) = 5$, и старший коэффициент равен 1, то $f(x) = (x-1)^2(x+1)^3$.
Ответ: $f(x) = (x-1)^2(x+1)^3$.

Задание 8.0
Вычислите результат многочленов $f(x)$ и $g(x)$, если $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ и $g(x) = x^3 - x + 1$. Имеют ли многочлены $f(x)$ и $g(x)$ общие корни?
Решение. Вычислим результант многочленов:

$$R(f(x), g(x)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{5+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -(-1)^{4+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{3+3} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(1+3) - (3+2) + 4(9-2) = -4 - 5 + 28 = 19.$$

Так как $R(f(x), g(x)) \neq 0$, то многочлены $f(x)$ и $g(x)$ не имеют общих корней.
Ответ: $R(f(x), g(x)) = 19$.

Задание 9.0
Решите уравнение: $x^3 + 9x^2 + 9x + 81 = 0$.
Решение.
Перейдем к неполному кубическому уравнению, т.е. к уравнению не содержащему неизвестной во второй степени. Для этого разложим многочлен, стоящий в левой части, по степеням $x + 3$. Можно выполнить замену $x = y - 3$ или разделить многочлен $x^3 + 9x^2 + 9x + 81 = 0$ на двучлен $(x+3)$ по схеме Горнера. Воспользуемся

схемой Горнера для разложения многочлена $f(x) = x^3 + 9x^2 + 9x + 81$ по степеням $x+3$:

x_0 \ a_i	1	9	9	81
-3	1	6	-9	$108 = q$
-3	1	3	$-18 = p$	
-3	1	0		

Получаем уравнение $y^3 - 18y^2 + 108 = 0$. Для нахождения корней этого уравнения воспользуемся формулами Кардано: $y_1 = u_0 + v_0, y_{2,3} = -\dfrac{1}{2}(u_0 + v_0) \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}(u_0 - v_0)$, где $u_0 = \sqrt[3]{-\dfrac{q}{2} + \sqrt{\Delta}}$, $v_0 = \sqrt[3]{-\dfrac{q}{2} - \sqrt{\Delta}}$, $\Delta = \left(\dfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{p}{3}\right)^3$. Так как $p = -18,\ q = 108$, то

$\Delta = \sqrt{54^2 - 6^3} = \sqrt{2700} = 30\sqrt{3}$,

$$u_0 = \sqrt[3]{-54 + 30\sqrt{3}} = \sqrt[3]{(\sqrt{3} - 3)^3} = \sqrt{3} - 3,\ \ v_0 = \sqrt[3]{-54 - 30\sqrt{3}} = -\sqrt[3]{(3 + \sqrt{3})^3} = -3 - \sqrt{3},$$

$$y_1 = \sqrt{3} - 3 - 3 - \sqrt{3} = -6,\ \ y_{2,3} = \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} 2\sqrt{3} = 3 \pm 3i,$$

$$x_1 = -6 - 3 = -9,\ \ x_{2,3} = 3 \pm 3i - 3 = \pm 3i.$$

<u>Замечание.</u> Данное уравнение можно решить другим способом, разложив уравнение на множители:

$x^2(x+9) + 9(x+9) = (x+9)(x^2+9) = 0 \Rightarrow\ x_1 = -9,\ x_{2,3} = \pm 3i$

Ответ: $x_1 = -9$, $x_{2,3} = \pm 3i$.

Задание 10.0

Решите уравнение: $x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 4x - 10 = 0$.

Решение.

Будем пользоваться методом Феррари. Выделим полный квадрат, который “поглотит” x^4 и x^3.

$$x^4 - 2x^3 + x^2 = 4x^2 + 4x + 10,$$

$$(x^2)^2 - 2x^2x + x^2 = 4x^2 + 4x + 10,$$

$$(x^2 - x)^2 = 4x^2 + 4x + 10.$$

Прибавим к обеим частям уравнения выражение $2\lambda(x^2 - x) + \lambda^2$, где λ – некоторый параметр:

$$(x^2 - x + \lambda)^2 = x^2(4 + 2\lambda) + x(4 - 2\lambda) + (10 + \lambda^2), \qquad (*)$$

Справа будет полный квадрат, если дискриминант квадратного трёхчлена в правой части уравнения (*) будет равен нулю:

$$\frac{D}{4} = (2-\lambda)^2 - (4+2\lambda)(10+\lambda^2) = 4 - 4\lambda + \lambda^2 - 40 - 4\lambda^2 - 20\lambda - 2\lambda^3 = -8\lambda^3 - 12\lambda^2 - 96\lambda - 144,$$

$$2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 24\lambda + 36 = 0,$$

$$\lambda^2(2\lambda + 3) + 12(2\lambda + 3) = 0,$$

$$(2\lambda + 3)(\lambda^2 + 12) = 0.$$

Для нахождения корней исходного уравнения нам достаточно найти одно из решений кубической резольвенты $2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 24\lambda + 36 = 0$ и подставить его в уравнение (*). Возьмём $\lambda = -\frac{3}{2}$:

$$(x^2 - x - \frac{3}{2})^2 = x^2(4-3) + x(4+3) + 10 + \frac{9}{4}, (x^2 - x - \frac{3}{2})^2 = x^2 + 7x + \frac{49}{4},$$

$$(x^2 - x - \frac{3}{2})^2 - (x + \frac{7}{2})^2 = 0.$$

Применив формулу разности квадратов к последнему уравнению, имеем:

$x^2 - x - \frac{3}{2} - x - \frac{7}{2} = 0;$ или $x^2 - x - \frac{3}{2} + x + \frac{7}{2} = 0;$

$x^2 - 2x - 5 = 0;$ $x^2 + 2 = 0.$

Решая последние два квадратных уравнения, получаем корни исходного уравнения четвёртой степени: $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{6}$; $x_{3,4} = \pm i\sqrt{2}$.

Ответ: $\{1 \pm \sqrt{6},\ \pm i\sqrt{2}\}$.

Задание 11.0

Число $2 - \sqrt{3}$ является корнем многочлена $f(x) \in \mathbf{Q}[x]$. Найдите остальные корни, если $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x - 1$.

Решение.

Если число $x_1 = 2 - \sqrt{3}$ является корнем $f(x) \in \mathbf{Q}[x]$, то и число $x_2 = 2 + \sqrt{3}$ является корнем этого многочлена. Значит, многочлен $f(x)$ делится на многочлен $g(x) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = x^2 - 4x + 1$. Разделим $f(x)$ на $g(x)$:

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1 & x^2 - 4x + 1 \\ \cline{2-2} -\ x^4 - 4x^3 + x^2 \quad & x^2 - 1 \\ \cline{1-1} x^2 - 4x + 1 & \\ -\ x^2 - 4x + 1 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Получаем, что $x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1 = (x^2 - 4x + 1)(x^2 - 1) = 0$. Значит, $x_{3,4} = \pm 1$.

Ответ: $\left\{2 \pm \sqrt{3};\ \pm 1\right\}$.

Задание 12.0

Вычислите значение многочлена $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3$ от корней уравнения $x^3 + 3x - 10 = 0$.

Решение.

Элементарными симметрическими многочленами от трёх переменных будут многочленами $\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $\sigma_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$, $\sigma_3 = x_1x_2x_3$.

Исходный многочлен можно представить в виде $f(x_1, x_2, x_3) = f_1(x_1, x_2, x_3) - 3\sigma_1$, где $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$. Выразим многочлен $f_1(x_1, x_2, x_3)$ через элементарные симметрические. Старшим членом многочлена $f_1(x_1, x_2, x_3)$ является одночлен $u_0 = x_1^3$. Выпишем возможные старшие члены $u_i = a_i x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3}$, удовлетворяющие условиям:

1) $u_0 > u_1 > u_2 > \ldots$;

2) $k_1 + k_2 + k_3 = 3$;

3) $k_1 \ge k_2 \ge k_3$.

Получаем следующие одночлены: x_1^3, $Ax_1^2x_2$, $Bx_1x_2x_3$. Каждому старшему одночлену $u_i = a_i x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3}$ соответствует многочлен от элементарных симметрических $a_i \sigma_1^{k-k_2} \sigma_2^{k_2-k_3} \sigma_3^{k_3}$, для которого u_i является старшим членом.

Старший член	Система показателей	Соответствующий многочлен
x_1^3	$(3;0;0)$	σ_1^3
$Ax_1^2x_2$	$(2;1;0)$	$A\sigma_1\sigma_2$
$Bx_1x_2x_3$	$(1;1;1)$	$B\sigma_3$

Многочлен f_1 можно представить в виде суммы многочленов от элементарных симметрических с неопределенными коэффициентами:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sigma_1^3 + A\sigma_1\sigma_2 + B\sigma_3, \qquad (**)$$

где A и B – неопределенные коэффициенты. Для нахождения A и B будем использовать функциональное равенство многочленов, стоящих в левой и правой части (**). Поскольку неизвестных коэффициентов два, то нужно будет взять два набора переменных.

Если $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, то $f_1(1,1,1) = 3$. При этом наборе $\sigma_1 = 3$, $\sigma_2 = 3$, $\sigma_3 = 1$, а значит $f_1(1,1,1) = 27 + 9A + B$.

Если $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 0$, то $f_1(1,1,0) = 2$. При этом наборе $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 1$, $\sigma_3 = 0$, $f_2(1,1,0) = 8 + 2A$. Получаем следующую систему:

$$\begin{cases} 27 + 9A + b = 3, \\ 8 + 2A = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} A = -3, \\ B = 3. \end{cases}$$

Значит, $f_1(x_1, x_2, x_3) = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$.

Тогда $f(x_1, x_2, x_3) = f_1 - 3\sigma_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2$.

По теореме Виета из уравнения $x^3 + 3x - 10 = 0$ получаем:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 0; \\ \sigma_2 = 3; \\ \sigma_3 = 10. \end{cases}$$

Тогда значение многочлена $f(x_1, x_2, x_3)$ от корней многочлена $x^3 + 3x - 10 = 0$ при $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 3$, $\sigma_3 = 10$ равно 0.

Ответ: 0.

Задание 13.0

Освободитесь от иррациональности в знаменателе, если:

а) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4} + 3\sqrt[3]{2} - 1}$, б) $\dfrac{1}{1 + \sqrt[3]{2} + 1\sqrt{3}}$.

Решение.

а) Так как $\sqrt[3]{4}+3\sqrt[3]{2}-1$ есть значение многочлена $g(x)=x^2+3x-1\in\mathbf{Q}[x]$ при $x=\sqrt[3]{2}$, то мы имеем простое алгебраическое расширение поля рациональных чисел элементом $\alpha=\sqrt[3]{2}$. Минимальным многочленом для $\alpha=\sqrt[3]{2}$ будет $p_\alpha(x)=x^3-2$, причём НОД($g(x)$, $P_\alpha(x)$) =1. Так как НОД многочленов линейно выражается через аргументы, то $1=g(x)u(x)+p_\alpha(x)v(x)$, где $\deg u(x)<\deg p_\alpha(x)=3$, $\deg v(x)<\deg g(x)=2$.

Найти линейное представление НОД($g(x),p_\alpha(x)$) через многочлен $g(x)$ и $p_\alpha(x)$ можно двумя способами: используя алгоритм Евклида или метод неопределенных коэффициентов. Воспользуемся методом неопределенных коэффициентов: $1=g(x)u(x)+p_\alpha(x)v(x)$. Многочлены $u(x)$ и $v(x)$ будем искать в виде: $u(x)=ax^2+bx+c$, $v(x)=mx+n$. Тогда последнее равенство запишется в виде:

$1=(x^2+3x-1)(a^2x+bx+c)+(x^3-2)(mx+n)$,

$1=x^4(a+m)+x^3(3a+b+n)+x^2(-a+3b+c)+x(-b+3c-2m)+(-c-2n)$.

Из алгебраического равенства многочленов получаем следующую систему:

$$\begin{cases} a+m=0,\\ 3a+b+n=0,\\ -a+3b+c=0,\\ -b+3c-2m=0,\\ -c-2n=1. \end{cases}$$

Решим данную систему метод Гаусса:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 3 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 3 & -2 & 0 & 0\\ 6 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0\\ 6 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 5 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 5 & 5 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 5 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 15 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2/15\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -7/15\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1/15\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/15\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/15 \end{array}\right].$$

Откуда, $a=\dfrac{2}{15}$, $b=\dfrac{1}{15}$, $c=-\dfrac{1}{15}$, $m=-\dfrac{2}{15}$, $n=-\dfrac{7}{15}$. При $x=\sqrt[3]{2}$ равенство $1=(x^2+3x-1)(a^2x+bx+c)+(x^3-2)(mx+n)$ приобретает следующий вид:

$1 = (\sqrt[3]{4} + 3\sqrt[3]{2} - 1)(\frac{2}{15}\sqrt[3]{4} + \frac{1}{15}\sqrt[3]{2} - \frac{1}{15})$. Умножим числитель и знаменатель исходной дроби на $\frac{1}{15}(2\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} - 1)$. Получаем:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4} + 3\sqrt[3]{2} - 1} = \frac{\frac{1}{15}(2\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} - 1)}{\frac{1}{15}(\sqrt[3]{4} + 3\sqrt[3]{2} - 1)(2\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} - 1)} = \frac{1}{15}(2\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} - 1).$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt[3]{4} + 3\sqrt[3]{2} - 1} = \frac{1}{15}(2\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} - 1)$.

б) Будем искать множитель, рационализирующий знаменатель дроби $\frac{1}{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt{3}}$, с помощью метода неопределённых коэффициентов. Так как $1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt{3} \in \mathbf{Q}(\sqrt{3})(\sqrt[3]{2})$, и базис векторного пространства $\mathbf{Q}(\sqrt{3})(\sqrt[3]{2})$ состоит из 6 следующих элементов: $1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}, \sqrt{3}, \sqrt{3}\sqrt[3]{2}, \sqrt{3}\sqrt[3]{4}$, то рационализирующий множитель будем искать в виде $1a + b\sqrt[3]{2} + c(\sqrt[3]{2})^2 + d\sqrt{3} + e\sqrt{3}\sqrt[3]{2} + f\sqrt{3}(\sqrt[3]{2})^2$, где $a, b, c, d, e, f \in \mathbf{Q}$.

Из того, что $(1 + \sqrt{3} + \sqrt[3]{2})(a + b\sqrt[3]{2} + c(\sqrt[3]{2})^2 + d\sqrt{3} + e\sqrt{3}\sqrt[3]{2} + f\sqrt{3}(\sqrt[3]{2})^2) = k$, где k-отличное от нуля рациональное число, и алгебраического равенства многочленов, получаем систему:

$$\begin{cases} a + 3d + 2c = k, \\ b + 3e + a = 0, \\ c + 3f + b = 0, \\ e + b + d = 0, \\ f + c + e = 0, \\ d + 2f + a = 0, \end{cases}$$

Первое уравнение содержит переменную k. Поэтому решим однородную систему пяти линейных уравнений методом Гаусса:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -5 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -6 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -12 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Получили, что:

$$\begin{cases} a=-2l, \\ b=-l, \\ c=-2l, \\ d=0, \\ f=l. \end{cases}$$

Удобно взять $l=-1$. Тогда получим $a=2, b=1, c=2, d=0, l=-1, f=1$ и $k=6$

Получаем: $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}}=\dfrac{\frac{1}{6}(2+\sqrt[3]{2}+2(\sqrt[3]{2})^2+0\sqrt{3}-\sqrt{3}\sqrt[3]{2}-\sqrt{3}(\sqrt[3]{2})^2)}{\frac{1}{6}(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt{3})(2+\sqrt[3]{2}+2(\sqrt[3]{2})^2+0\sqrt{3}-\sqrt{3}\sqrt[3]{2}-\sqrt{3}(\sqrt[3]{2})^2)}=$

$=\frac{1}{6}(2+\sqrt[3]{2}+2(\sqrt[3]{2})^2+0\sqrt{3}-\sqrt{3}\sqrt[3]{2}-\sqrt{3}(\sqrt[3]{2})^2).$

Ответ: $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}}=\dfrac{1}{6}(2+\sqrt[3]{2}+2(\sqrt[3]{2})^2+0\sqrt{3}-\sqrt{3}\sqrt[3]{2}-\sqrt{3}(\sqrt[3]{2})^2)$.

Задание 14.0

Проверьте, разрешимо ли в квадратных радикалах уравнение:

а) $2x^7+9x^5+15x^3-9x^2+6=0$, б) $2x^3+6x^2-4x+3=0$.

Решение.

а) Применим к многочлену $f(x)=2x^7+9x^5+15x^3-9x^2+6$ критерий Эйзенштейна. Существует простое число $(p=3)$ такое, что все коэффициенты многочлена $f(x)$, кроме старшего, делятся на p, а свободный не делится на p^2. Следовательно, данный многочлен неприводим над **Z**, а значит и над **Q**. Значит, уравнение $2x^7+9x^5+15x^3-9x^2+6=0$ неразрешимо в квадратных радикалах.

б) Имеем $f(x)=2x^3+6x^2-4x+3$. Многочлен 3-ей степени разрешим в квадратных радикалах, если он имеет хотя бы один рациональный корень. Проверим, имеет ли данный многочлен рациональные корни. Рациональные корни многочлена будем искать в виде несократимой дроби $\frac{p}{q}$, где $p-$ делитель свободного члена, а $q-$ делитель старшего коэффициента. Поэтому, $p\in\{\pm1;\pm3\}$, $q\in\{1;2\}$, причем НОД$(p,q)=1$.

Тогда $\frac{p}{q}\in\{\pm1;\pm\frac{1}{2};\pm3;\pm\frac{3}{2}\}$.

Кроме того, если $\frac{p}{q}$ корень $f(x)$, то выражение $\frac{f(k)}{p-qk}\in\mathbf{Z}$ для любого $k\in$ **Z**. Возьмём $k=\pm1$, $f(1)=7$, $f(-1)=11$. Тогда $\frac{7}{p+q}\in\mathbf{Z}$, $\frac{11}{p+q}\in\mathbf{Z}$. Ни одно из рациональных чисел ±1, $\pm\frac{1}{2}$, ±3, $\pm\frac{3}{2}$ не удовлетворяет указанным соотношениям.

Следовательно, данный многочлен не имеет рациональных корней, а уравнение $2x^3+6x^2-4x+3=0$ неразрешимо в квадратных радикалах.

Ответ: Уравнение не разрешимо в квадратных радикалах.

Ответы к некоторым заданиям для самостоятельного решения

№ 1

Вариант	$f(x)\cdot g(x)$
1.	$-x^5+x^4+\overline{0}x^3+x^2+\overline{5}x-\overline{4}$
2.	$-\overline{2}x^5+\overline{0}x^4+\overline{5}x^3-\overline{2}x^2-\overline{2}x+\overline{1}$
3.	$\overline{0}x^5-x^4+\overline{5}x^3+\overline{4}x^2-x+\overline{1}$
4.	$\overline{4}x^5+\overline{4}x^4+\overline{5}x^3+\overline{4}x^2-\overline{3}x-\overline{2}$
5.	$\overline{5}x^5-\overline{4}x^4+x^3+\overline{4}x^2+\overline{0}x-\overline{4}$
6.	$-\overline{4}x^5+\overline{5}x^4+\overline{0}x^3+\overline{0}x^2+\overline{5}x+\overline{2}$
7.	$\overline{4}x^5-\overline{5}x^4+5x^3-x^2+\overline{0}x-\overline{3}$
8.	$\overline{4}x^5-\overline{5}x^4-x^3-\overline{0}x^2+\overline{2}x-\overline{0}$
9.	$\overline{5}x^5-\overline{4}x^4+\overline{3}x^3+\overline{3}x^2+\overline{2}x+\overline{2}$
10.	$\overline{0}x^5+\overline{2}x^4-x^3+\overline{5}x^2-\overline{5}x+\overline{5}$
11.	$\overline{0}x^5-x^4+\overline{0}x^3+\overline{2}x^2-\overline{3}x+\overline{2}$
12.	$\overline{2}x^5+x^4-\overline{2}x^3+\overline{0}x^2-\overline{0}x+\overline{5}$
13.	$-\overline{4}x^5+\overline{4}x^4-\overline{4}x^3+\overline{4}x^2+\overline{2}x-\overline{2}$
14.	$-\overline{5}x^5-\overline{3}x^4+\overline{0}x^3-x^2+x+\overline{0}$
15.	$\overline{0}x^5+\overline{4}x^4-\overline{3}x^3+\overline{2}x^2-x+\overline{4}$
16.	$\overline{3}x^5+\overline{2}x^4-\overline{2}x^3+\overline{0}x^2+\overline{5}x+\overline{4}$
17.	$-\overline{4}x^5-\overline{4}x^4+\overline{3}x^3+\overline{2}x^2+x+\overline{2}$
18.	$-\overline{4}x^5+x^4-x^3+\overline{0}x^2+x-\overline{3}$
19.	$-x^5-x^4-\overline{2}x^3-\overline{3}x^2+\overline{5}x+\overline{0}$
20.	$-\overline{4}x^5+\overline{0}x^4-x^3+\overline{0}x^2+\overline{1}x-\overline{2}$
21.	$-\overline{3}x^5+\overline{3}x^4+\overline{2}x^3+\overline{1}x^2+\overline{3}x-\overline{2}$
22.	$\overline{4}x^5+x^4-\overline{2}x^3-\overline{3}x^2+\overline{3}x-\overline{4}$
23.	$-\overline{3}x^5+x^4+\overline{2}x^3-\overline{4}x^2+\overline{2}x-\overline{2}$
24.	$\overline{4}x^5+\overline{0}x^4+\overline{3}x^3+\overline{3}x^2+\overline{5}x-\overline{3}$
25.	$\overline{2}x^5-\overline{5}x^4+\overline{0}x^3+\overline{0}x^2-\overline{4}x-\overline{3}$

№ 2

Вариант	$r(x)$
1.	384i
2.	78i-24
3.	-15+i
4.	-242-94i
5.	114i+381
6.	-515i-60
7.	-25-290i
8.	11+7i
9.	-191-485i
10.	1-12i
11.	7-18i
12.	243+128i
13.	94-62i
14.	116+554i
15.	615+267i
16.	41-84i
17.	i-10
18.	-14-583i
19.	-396-83i
20.	78-233i
21.	3i-18
22.	91i+17
23.	10i-2
24.	550i-353
25.	427-275i

№ 3

Вариант	a	b
1.	-1	3
2.	-3	10
3.	-5	-7
4.	-2	11
5.	4	-7
6.	1	0
7.	1	3
8.	-5	-14
9.	9/2	1/2
10.	2/3	17/3
11.	2/5	3/5
12.	3	-5
13.	-3/4	11/4
14.	-1/7	44/7
15.	3/10	-69/10
16.	-5/4	37/4
17.	1/2	-5/2
18.	9	-10
19.	6/5	2/5
20.	-12	57
21.	2	-8
22.	8/3	-13
23.	5/3	-23/3
24.	8	-15
25.	1/22	2

№ 4

Вариант	Кратность корня
1.	$k = 4$
2.	$k = 4$
3.	$k = 4$
4.	$k = 4$
5.	$k = 4$
6.	$k = 4$
7.	$k = 3$
8.	$k = 3$
9.	$k = 3$
10.	$k = 3$
11.	$k = 3$
12.	$k = 3$
13.	$k = 3$
14.	$k = 3$
15.	$k = 4$
16.	$k = 4$
17.	$k = 4$
18.	$k = 4$
19.	$k = 4$
20.	$k = 4$
21.	$k = 4$
22.	$k = 3$
23.	$k = 3$
24.	$k = 3$
25.	$k = 3$

№ 5

Вариант	p	q
1.	-7	15
2.	1	-8
3.	1	-5
4.	-2	-7
5.	-8	20
6.	2	-7
7.	-3	-9
8.	2	-4
9.	-5	3
10.	-1	-8
11.	6	9
12.	0	-12
13.	-7	11
14.	7	15
15.	-2	-4
16.	-1	-5
17.	-6	9
18.	8	20
19.	-6	12
20.	5	3
21.	5	7
22.	0	-12
23.	-7	16
24.	-5	7
25.	-6	-12

№ 6

Вариант	НОД
1.	x-8
2.	x-3
3.	x-5
4.	x-6
5.	x+6
6.	x-7
7.	x+1
8.	x+4
9.	x-6
10.	x-2
11.	x+3
12.	x-4
13.	x+2
14.	x+5
15.	x-5
16.	x-7
17.	x+9
18.	x+4
19.	x-1
20.	x+8
21.	x-4
22.	x+10
23.	x-7
24.	x+7
25.	x+8

№ 7

Вариант	Результат
1.	$f(x)=(x+1)^2(x+2)^3$
2.	$f(x)=(x-2)^2(x-1)^3$
3.	$f(x)=(x-1)^2(x-2)^3$
4.	$f(x)=(x+2)^2(x+1)^3$
5.	$f(x)=(x-1)^2(x+2)^3$
6.	$f(x)=(x+2)^2(x-1)^3$
7.	$f(x)=(x+1)^2(x-2)^3$
8.	$f(x)=(x-2)^2(x+1)^3$
9.	$f(x)=(x-3)^2(x-1)^3$
10.	$f(x)=(x+3)^2(x+1)^3$
11.	$f(x)=(x+3)^2(x-1)^3$
12.	$f(x)=(x+1)^2(x+3)^3$
13.	$f(x)=(x-1)^2(x+3)^3$
14.	$f(x)=(x-1)^2(x-3)^3$
15.	$f(x)=(x+1)^2(x-3)^3$
16.	$f(x)=(x-1)^2(x+1)^3$
17.	$f(x)=(x+1)^2(x-1)^3$
18.	$f(x)=(x-3)^2(x+1)^3$
19.	$f(x)=(x-5)^2(x+1)^3$
20.	$f(x)=(x-5)^2(x-1)^3$
21.	$f(x)=(x+5)^2(x-1)^3$
22.	$f(x)=(x+4)^2(x-1)^3$
23.	$f(x)=(x+4)^2(x+1)^3$
24.	$f(x)=(x-4)^2(x+1)^3$
25.	$f(x)=(x-4)^2(x-1)^3$

№ 8

Вариант	$R(f,g)$
1.	-1168
2.	-53
3.	-607
4.	1105
5.	227
6.	-3022
7.	-3
8.	53
9.	496
10.	73
11.	362
12.	54
13.	5748
14.	746
15.	328
16.	-3724
17.	35
18.	496
19.	863
20.	126
21.	75
22.	75
23.	1670
24.	-2400
25.	539

№ 9

Вариант	Действител ь-ные	Комплекс-ные
1.	1	±9i
2.	-9	±5i
3.	1	±5i
4.	-7	±6i
5.	4	±7i
6.	6	±4i
7.	7	±4i
8.	-4	±8i
9.	3	±5i
10.	2	±8i
11.	-6	±3i
12.	4	±6i
13.	9	±2i
14.	7	±3i
15.	3	±2i
16.	-2	±7i
17.	5	±7i
18.	8	±3i
19.	2	±6i
20.	5	±6i
21.	-8	±4i
22.	-1	±4i
23.	8	±2i
24.	6	±5i
25.	-5	±2i

№ 10

Вариант	Действитель-ные	Комплекс-ные
1.	$1\pm\sqrt{6}$	$\pm\sqrt{3}i$
2.	$1\pm\sqrt{2}$	$\pm\sqrt{3}i$
3.	$1\pm\sqrt{3}$	$\pm\sqrt{2}i$
4.	$-1\pm\sqrt{6}$	$\pm\sqrt{3}i$
5.	$-1\pm\sqrt{5}$	$\pm\sqrt{2}i$
6.	$2\pm\sqrt{3}$	$\pm\sqrt{2}i$
7.	$-1\pm\sqrt{2}$	$\pm\sqrt{2}i$
8.	$-1\pm\sqrt{2}$	$\pm\sqrt{3}i$
9.	$-1\pm\sqrt{3}$	$\pm\sqrt{2}i$
10.	$-1\pm\sqrt{6}$	$\pm\sqrt{2}i$
11.	$-2\pm\sqrt{3}$	$\pm\sqrt{2}i$
12.	$1\pm\sqrt{2}$	$\pm\sqrt{2}i$
13.	$2\pm\sqrt{3}$	$\pm\sqrt{3}i$
14.	$-2\pm\sqrt{3}$	$\pm\sqrt{3}i$
15.	$2\pm\sqrt{2}$	$\pm\sqrt{2}i$
16.	$-2\pm\sqrt{2}$	$\pm\sqrt{2}i$
17.	$2\pm\sqrt{2}$	$\pm\sqrt{3}i$
18.	$-2\pm\sqrt{2}$	$\pm\sqrt{3}i$
19.	$1\pm\sqrt{7}$	$\pm\sqrt{2}i$
20.	$2\pm\sqrt{5}$	$\pm\sqrt{3}i$
21.	$1\pm\sqrt{5}$	$\pm\sqrt{3}i$
22.	$1\pm\sqrt{5}$	$\pm\sqrt{2}i$
23.	$-1\pm\sqrt{5}$	$\pm\sqrt{3}i$
24.	$-2\pm\sqrt{5}$	$\pm\sqrt{2}i$
25.	$2\pm\sqrt{5}$	$\pm\sqrt{2}i$

№ 11

Вариант	Действитель-ные	Комплекс-ные
1.	2;-3	$2 \pm \sqrt{3}$
2.	2;3	$2 \pm \sqrt{3}$
3.	1;3	$2 \pm \sqrt{5}$
4.	-1;-3	$2 \pm \sqrt{5}$
5.	2;-3	$2 \pm \sqrt{2}$
6.	2;3	$2 \pm \sqrt{2}$
7.	1;2	$3 \pm \sqrt{3}$
8.	1;3	$3 \pm \sqrt{3}$
9.	-1;-3	$3 \pm \sqrt{5}$
10.	2;3	$3 \pm \sqrt{2}$
11.	1;2	$3 \pm \sqrt{2}$
12.	1;3	$4 \pm \sqrt{2}$
13.	-1;-3	$4 \pm \sqrt{2}$
14.	1;-2	$4 \pm \sqrt{3}$
15.	2;-3	$4 \pm \sqrt{3}$
16.	2;3	$4 \pm \sqrt{5}$
17.	1;2	$4 \pm \sqrt{5}$
18.	1;3	$3 \pm \sqrt{2}$
19.	-1;3	$3 \pm \sqrt{2}$
20.	-1;-2	$4 \pm \sqrt{3}$
21.	2;3	$4 \pm \sqrt{3}$
22.	1;2	$2 \pm \sqrt{3}$
23.	1;3	$2 \pm \sqrt{3}$
24.	-1;-2	$2 \pm \sqrt{5}$
25.	1;-2	$2 \pm \sqrt{5}$

№ 12

Вариант	Результат
1.	-162
2.	30
3.	-875
4.	205
5.	4
6.	3
7.	-12/5
8.	12
9.	-1/5
10.	12/49
11.	1635
12.	15
13.	-9
14.	55
15.	-45
16.	-34
17.	-13
18.	-144
19.	25
20.	45
21.	-80
22.	-37
23.	-117
24.	81
25.	1635

№ 13

Вариант	Результат
1.	$\dfrac{5\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{4}+11}{47}$
2.	$\sqrt[3]{2}-1$
3.	$\frac{1}{46}(5\sqrt[3]{25}+3\sqrt[3]{5}+11)$
4.	$\frac{1}{2}(2\sqrt[3]{25}+3\sqrt[3]{5}+3)$
5.	$-\frac{1}{312}(4\sqrt[3]{25}+32\sqrt[3]{5}+12)$
6.	$\frac{1}{120}(7\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{7}-17)$
7.	$-\frac{1}{293}(5\sqrt[3]{49}+26\sqrt[3]{7}+18)$
8.	$\frac{1}{15}(2\sqrt[3]{4}+3\sqrt[3]{2}-1)$
9.	$-\frac{1}{468}(9+3\sqrt[3]{25}+33\sqrt[3]{5})$
10.	$\frac{1}{30}(45+2\sqrt[3]{9}+13\sqrt[3]{3})$
11.	$-\frac{1}{12}(3+\sqrt[3]{9})$
12.	$\frac{1}{12}(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}-3)$
13.	$\frac{1}{690}(-\sqrt[3]{49}+32\sqrt[3]{7}+11)$
14.	$-3\sqrt[3]{4}-4\sqrt[3]{2}-5$
15.	$\dfrac{1}{-2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}-1}$
16.	$\dfrac{1}{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{5}+2}$
17.	$\frac{1}{46}(5\sqrt[3]{25}+3\sqrt[3]{5}-11)$
18.	$\frac{1}{254}(5\sqrt[3]{25}+21\sqrt[3]{5}+12)$
19.	$\frac{1}{159}(\sqrt[3]{49}-10\sqrt[3]{7}-6)$
20.	$\frac{1}{274}(11\sqrt[3]{49}-319\sqrt[3]{7}+25)$
21.	$\frac{1}{62}(3\sqrt[3]{4}-10\sqrt[3]{2}-8)$
22.	$\frac{1}{94}(11\sqrt[3]{4}-4\sqrt[3]{2}+10)$
23.	$\frac{1}{66}(\sqrt[3]{9}+9\sqrt[3]{3}+15)$
24.	$\frac{1}{402}(15+42\sqrt[3]{3}-3\sqrt[3]{9})$
25.	$\frac{1}{367}(26\sqrt[3]{5}-2\sqrt[3]{25}+29)$

№ 14

Все приведенные уравнения неразрешимы в квадратных радикалах.

Литература:

1. *Варпаховский Ф.Л., Солодовников А.С.* Алгебра. – М.: Просвещение, 1974. – 160 с.

2. *Варпаховский Ф.Л., Солодовников А.С., Стеллецкий И.В.* Алгебра. – М.: Просвещение, 1978. – 144 с.

3. *Куликов Л.Я.* Алгебра и теория чисел. – М.: Высшая школа, 1979. – 559 с.

4. *Милованов М.В., Тышкевич Р.И., Феденко А.С.* Алгебра и аналитическая геометрия. Ч. 1. – Мн.: Вышейшая школа, 2001. – 400 с.

5. *Милованов М.В., Толкачев М.М., Тышкевич Р.И., Феденко А.С.* Алгебра и аналитическая геометрия. Ч. 1. – Мн.: Вышейшая школа, 2001. – 352 с

6. *Радьков А.М., Чеботаревский Б.Д.* Алгебра и теория чисел: Атлас для самостоятельной работы. – Мн.: Вышейшая школа, 1992. – 286 с.

7. Практическое занятие по алгебре и теории чисел / Лельков М.П., Полевченко И.И., Радьков А.М., Чеботаревский Б.Д. – Мн.: Вышейшая школа, 1986. – 302 с.

8. *Шнеперман Л.Б.* Сборник задач по алгебре и теории чисел. – М.: Вышейшая школа, 1982. – 223 с.

СОДЕРЖАНИЕ: