

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

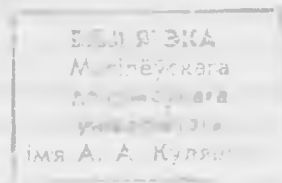
МОГИЛЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

им. А.А.КУЛЕШОВА

Н.В. Сакович

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Методические указания
и расчетно-графические задания



Могилев 2001

Рецензент

Кандидат физико-математических наук, доцент

МГУ им. А.А.Кулешова

Б.Д. Чеботаревский

*Печатается по решению редакционно-издательского
и экспертного совета МГУ им. А.А. Кулешова*

Сакович Н.В.

С15 **Линейное программирование: Методические указания и расчетно-графические задания.** – Могилев: МГУ им. А.А. Кулешова, 2001. – 44 с.

Методические указания по линейному программированию предназначены для оказания помощи студентам экономического факультета в изучении математического программирования. Ввиду отсутствия подходящего и доступного студентам учебного пособия по данному курсу высшей математики, по каждой теме приведен необходимый минимум справочного теоретического материала, который дополнен подробным решением типовых задач, что создает достаточную базу для самостоятельной работы студентов.

Выполнение студентами предлагаемых расчетно-графических работ поможет им не только усвоить методы решения задач на экстремум, возникающих при планировании и организации производства, но и получить навыки математического моделирования несложных процессов.

УДК 519.85(076.1 / 075.8)

ББК 22.18я73

ТЕМА 1 ФОРМЫ ЗАПИСИ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ (ЗЛП)

В общем виде ЗЛП может быть сформулирована как задача нахождения наибольшего (наименьшего) значения линейной функции:

$$Z(X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j = CX \quad (1.1)$$

на некотором множестве $\Omega \subset R^n$, где $X \in \Omega$ удовлетворяет системе ограничений:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, i = \overline{1, m_1}; \quad (1.2)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = \overline{m_1 + 1, m_2}; \quad (1.3)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, i = \overline{m_2 + 1, m}; \quad (1.4)$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, r}, r \leq n \quad (1.5)$$

Линейная функция (1.1) называется *целевой*. *Планом ЗЛП* называется всякий вектор X из пространства R^n . *Допустимым планом* называется такой план ЗЛП, который удовлетворяет ограничениям (1.2) – (1.5), то есть содержится в области Ω . Сама область Ω называется *областью допустимых планов*. Допустимый план $X^* \in \Omega$, доставляющий целевой функции (1.1) экстремальное значение, именуется *оптимальным*. Величина $Z^* = Z(X^*)$ называется *оптимальным значением целевой функции*.

Модель ЗЛП может быть записана также в одной из приведенных ниже форм:

Каноническая, или основная, форма записи.

$$\max Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j,$$

на множестве допустимых планов:

$$\Omega = \left\{ X \in R^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, x_j \geq 0, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n} \right. \right\} \quad (1.6)$$

Симметричная, или стандартная, форма записи

$$\max Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j,$$

$$\Omega = \left\{ X \in R^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, x_j \geq 0, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n} \right. \right\} \quad (1.7)$$

$$\text{или } Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j,$$

$$\Omega = \left\{ X \in R^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, x_j \geq 0, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n} \right. \right\} \quad (1.8)$$

Прежде чем переходить к рассмотрению способов преобразования моделей ЗЛП, определим понятие базиса. **Базисом** называется система переменных задачи, характеризующаяся следующими признаками:

1. Число базисных переменных равно числу ограничений задачи.
2. Каждая базисная переменная встречается во всей системе ограничений только один раз.
3. Коэффициенты при базисных переменных равны $+1$.

Если каждое ограничение области допустимых планов Ω – равенство, имеющее базисную переменную при неотрицательности правых частей, то система представлена в каноническом предпочтительном виде.

Идея преобразования моделей в канонический предпочтительный вид следующая:

1) ограничения в виде неравенств типа (1.3) преобразуются в уравнения за счет добавления фиктивных неотрицательных переменных $x_{n+i}, i = \overline{m_1 + 1, m_2}$, которые в данном случае оказываются базисными переменными. Дополнительные переменные в целевую функцию (1.1) вводятся с коэффициентами, равными нулю, то есть не оказывают влияния на ее значение;

2) ограничения в виде неравенств типа (1.4) преобразуются в уравнения за счет вычитания фиктивных неотрицательных переменных $x_{n+i}, i = \overline{m_2 + 1, m}$. Так же, как и в случае (1) они входят в целевую функцию с нулевыми коэффициентами;

3) переменные, на которые не налагается условие неотрицательности, представляются в виде разности двух новых неотрицательных переменных $x_j = x_j - x_j$, $x_j \geq 0$, $x_j \geq 0$.

Однако, в результате таких преобразований в некоторых ограничениях могут быть не выделены базисные переменные. Для образования базиса при неотрицательности правой части в данном случае в каждое из таких уравнений вводится искусственная переменная, величина которой считается близкой к нулю. Искусственные переменные вводятся также в функцию цели, но с коэффициентами (+ М) в случае задачи на min и (-М) – на max, где М – большое положительное число. Полученная задача называется **М-задачей**, соответствующей исходной. Итак, любую ЗЛП можно представить в эквивалентном предпочтительном виде. Рассмотрим КЗЛП (1.6). Приведём её к симметричной форме. Пусть ранг данной системы равен r и $r < n$. Тогда система имеет бесконечное множество решений. Считая, без ограничения общности, первые r переменных базисными, имеем:

$$x_i + \sum_{j=r+1}^n \alpha_{ij} x_j = \beta_i, i = \overline{1, r} \quad (1.9)$$

С учетом того, что все $x_i \geq 0$, заменим данные равенства следующими эквивалентными неравенствами:

$$\sum_{j=r+1}^n \alpha_{ij} x_j \leq \beta_i, i = \overline{1, r} \quad (1.10)$$

Исключая базисные неизвестные из целевой функции, получим:

$$Z = (c_1 \beta_1 + c_2 \beta_2 + \dots + c_r \beta_r) - \sum_{j=r+1}^n [(c_1 \alpha_{1j} + \dots + c_r \alpha_{rj}) - c_j] \cdot x_j \quad (1.11)$$

Итак, приходим к эквивалентной задаче для симметричной ЗЛП (1.7) или (1.8).

При преобразовании ЗЛП полезны следующие замечания:

1. Задачу максимизации можно заменить задачей минимизации, и наоборот: $\max Z(X) = - \min (-Z(X))$;
2. Неравенство типа $\leq$ путем умножения левых и правых частей на -1 можно превратить в неравенство типа $\geq$, и наоборот.

3. Ограничение – равенство $a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i$, может быть записано в виде системы неравенств:

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i \\ a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i \end{cases} \text{ и наоборот.}$$

Отметим, что моделью ЗЛП вида (1.1) – (1.5) могут быть описаны задачи разных классов: распределения, управления запасами, упорядочения и др. Вводимые дополнительные переменные имеют определенный экономический смысл, связанный с содержанием задачи (величину неиспользованного ресурса, потребление сверх нормы и др.).

В следующих задачах требуется привести ЗЛП к каноническому предпочтительному виду:

Пример 1.1:

$$\max Z(X) = 3x_1 + 4x_2 + 10x_3 - x_4$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_4 \leq 25, \\ x_1 - 7x_2 + x_3 = 10, \\ 3x_1 + 5x_2 - 6x_4 \leq 17, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Решение:

$$\max Z(X) = 3x_1 + 4x_2 - 4x_2 + 10x_3 - x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_2 + x_4 + x_5 = 25, \\ x_1 - 7x_2 + 7x_2 + x_3 = 10, \\ 3x_1 + 5x_2 - 5x_2 - 6x_4 + x_6 = 17, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

Данная ЗЛП имеет предпочтительный вид. За базисные переменные можно взять x_1, x_3, x_5 .

Пример 1.2:

$$\min Z(X) = 12x_1 + 10x_2 + 13x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 50, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 100, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 120, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3} \end{cases}$$

Решение:

$$\min Z(X) = 12x_1 + 10x_2 + 13x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = 50, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 100, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_5 = 120, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5} \end{cases}$$

Полученная система ограничений не имеет предпочтительного вида, а поэтому перейдем к М-задаче:

$$\min \bar{Z}(\bar{X}) = 12x_1 + 10x_2 + 13x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + Mw_1$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 + w_1 = 50, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 100, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_5 = 120, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5}, w_1 \geq 0 \end{cases}$$

Если бы нужно было максимизировать функцию цели, то ее вид был бы $\max \bar{Z}(\bar{X}) = 12x_1 + 10x_2 + 13x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 - Mw_1$. Здесь базис образован искусственной (w_1), основной (x_3) и дополнительной (x_5) переменными.

Пример 1.3: Привести к симметричной форме записи задачу:

$$\max Z(X) = x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_5 = 20, \\ 3x_2 + x_3 - x_5 = 18, \\ -4x_2 + x_4 + 7x_5 = 35, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5} \end{cases}$$

Решение:

Исключая из системы ограничений-равенств любые три переменные и учитывая неотрицательность переменных, получим:

$$\begin{cases} x_1 = 20 - 2x_2 - x_5 \geq 0, \\ x_3 = 18 - 3x_2 + x_5 \geq 0, \\ x_4 = 35 + 4x_2 - 7x_5 \geq 0, \end{cases}$$

Подставляя x_1, x_2, x_3 в целевую функцию, получим следующую ЗЛП в симметричной форме:

$$\max Z(X) = 8x_2 + 8x_5 + 3$$

$$\begin{cases} 2x_2 + x_5 \leq 20, \\ 3x_2 - x_5 \leq 18, \\ -4x_2 + 7x_5 \leq 35, \\ x_2 \geq 0, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

ТЕМА 2 ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ, ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ И ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Пусть каноническая ЗЛП представлена в следующей векторной форме записи:

$$\max(\min) Z = C^T X \quad (2.1)$$

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n = b_0 \quad (2.2)$$

$$x_j \geq 0 \quad (2.3)$$

где $C^T = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, $X^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$,

$$A_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})^T, j = 1, n, \quad b_0 = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$$

Чтобы задача (2.1) – (2.3) имела решение, система ее ограничений (2.2) должна быть совместной. Если ранг системы $r = n$, система имеет единственное решение, которое и будет при $x_j \geq 0, j = \overline{1, n}$. В этом случае проблема выбора оптимального решения теряет смысл.

Пусть $r < n$. В этом случае система векторов $A_j, j = \overline{1, n}$ содержит базис – максимальную линейно независимую подсистему векторов, через которую любой вектор системы может быть выражен как её линейная комбинация.

Этому базису соответствуют базисные переменные $x_1, x_2, \dots, x_r$. Остальные $n-r$ переменные будут свободными.

Вектор $X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_m X_m$ называется **выпуклой линейной комбинацией** векторов $X_1, X_2, \dots, X_m$, если $\lambda \geq 0, i = 1, m$ и $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$.

Множество V векторов (точек) линейного пространства R^n называется **выпуклым**, если оно вместе с любыми своими точками содержит и их произвольную линейную выпуклую комбинацию, то есть соединяющий их отрезок.

Точка X выпуклого множества называется **угловой**, если она не может быть представлена в виде выпуклой линейной комбинации каких-нибудь двух других различных точек данного множества. Допустимый план X называется **опорным планом** ЗЛП, если его базисные компоненты больше или равны нулю, а все свободные компоненты равны нулю.

Свойства решений задачи линейного программирования:

2.1. Множество допустимых планов задачи линейного программирования выпукло;

2.2. Выпуклая линейная комбинация произвольного числа допустимых планов ЗЛП является допустимым планом;

2.3. Пусть Ω – выпуклый многогранник решений с угловыми точками $X_1, X_2, \dots, X_m$. Тогда его любая точка может быть представлена как выпуклая линейная комбинация угловых точек;

2.4. В задаче линейного программирования с m линейно независимыми ограничениями – равенствами угловая точка X имеет не более чем m отличных от нуля координат. Это утверждение называют **теоремой о структуре координат угловой точки**. Опорный план называется **невырожденным**, если он содержит ровно m положительных координат, и **вырожденным**, если меньше, чем m .

2.5. **Основная теорема линейного программирования:** Если целевая функция ЗЛП достигает экстремального значения в некоторой точке многогранника решений Ω , то она принимает это значение в угловой точке, если же более чем в одной угловой точке, то она принимает это же значение в любой их выпуклой линейной комбинации.

Перейдем к **геометрической интерпретации ЗЛП**. Гиперплоскостью в n -мерном пространстве называется множество точек, удовлетворяющих

линейному уравнению $\sum_{i=1}^n a_i x_i = b$. В связи с этим целевую функцию (2.1) в

записи $c_1x_1 + \dots + c_nx_n = z$ геометрически можно рассматривать как семейство параллельных гиперплоскостей, каждой из которых соответствует определенное значение z функции Z . Вектор $C = \left(\frac{c_1}{\alpha_1}, \dots, \frac{c_n}{\alpha_n} \right)$ перпендикуляр-

ный к гиперплоскостям, указывает направление наискорейшего возрастания функции Z и называется **градиентом** целевой функции. Поскольку в любой точке гиперплоскости функция Z принимает одно и то же значение (сохраняет значение на постоянном уровне), то их называют **плоскостями уровня**.

Учитывая сказанное, общую ЗЛП с геометрической точки зрения можно сформулировать следующим образом: найти точку $X^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ многогранника планов, определяемого системой (1.2) – (1.5), через которую проходит гиперплоскость семейства (1.1), соответствующая наибольшему (наименьшему) значению функции Z .

В случае двух переменных область допустимых решений задачи можно изобразить на координатной плоскости, а значит решить графически. Несмотря на свою очевидную ограниченность, графический метод решения ЗЛП может быть применен не только к задачам с двумя переменными и ограничениями в виде неравенств, но и к каноническим ЗЛП, у которых $n - 1 \leq r \leq n$, где n – количество переменных, r – ранг матрицы системы ограничений. Действительно, выполняя преобразования (1.9) – (1.11) получим эквивалентную симметричную ЗЛП с двумя переменными, которая может быть решена графически.

Пример 2.1: Решить графически ЗЛП:

$$\max(\min) Z = -2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 - x_6$$

$$2x_1 - 9x_2 + x_3 = -21,$$

$$-x_1 + x_4 = -3,$$

$$-2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 36,$$

$$7x_1 - 7x_2 + x_3 + x_6 = 49,$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 6$$

Решение:

В данной задаче $n = 6$, $r = 4$.

Так как $n - r = 2$, задачу можно решить графически. Выполняя преобразования (1.9) – (1.11) получим следующую эквивалентную ЗЛП с двумя переменными:

$$Z = 5x_1 + 2x_2 - 40;$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 9x_2 \geq 21, \\ x_1 \geq 3, \\ -x_1 + 7x_2 \leq 60, \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 70 \\ x_1 \leq 0, \quad x_2 \leq 0 \end{cases}$$

Решая задачу графически будем придерживаться следующей последовательности.

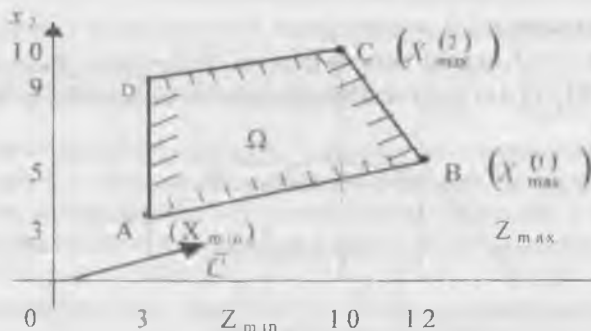
1) Строим множество допустимых планов Ω , которое основано на том факте, что прямая $ax_1 + bx_2 = d$ разбивает плоскость X_1OX_2 , на две полуплоскости, определяемые неравенствами $ax_1 + bx_2 > d$ и $ax_1 + bx_2 < d$.

В нашем примере строим в системе X_1OX_2 , соответствующие данным ограничениям - неравенствам граничные прямые:

$$\begin{aligned} -2x_1 + 9x_2 &= 21; & x_1 &= 3; \\ -x_1 + 7x_2 &= 60; & 5x_1 + 2x_2 &= 70. \end{aligned}$$

Определяем полуплоскости, в которых выполняются данные неравенства. Так как неравенство системы выполняется для любой точки из соответствующей полуплоскости, то их достаточно проверить для какой-либо одной точки. Обычно используют точку $O(0;0)$. Так как $-2 \cdot 0 + 9 \cdot 0 < 21$, то неравенство $-2x_1 + 9x_2 \geq 21$ определяет полуплоскость, не содержащую точку $O(0;0)$. Аналогично определяются остальные полуплоскости.

Находим множество допустимых решений как общую часть полученных полуплоскостей. Для нашего примера область Ω – множество точек четырехугольника $ABCD$.



2) Строим вектор градиентного направления $C = (c_1, c_2) = (5; 2)$.

3) Проводим перпендикулярно градиентному вектору C произвольную линию уровня цели $Z = const$. В нашем случае построим прямую $5x_1 + 2x_2 = 0$.

4) Переместим линию уровня цели $Z = const$ при решении задачи на $\max$ в направлении вектора C так, чтобы она заняла крайнее положение. В случае решения на $\min$ линию уровня перемещаем в антиградиентном направлении.

В нашем примере параллельным перемещением прямой $5x_1 + 2x_2 = 0$ находим крайнюю точку A , в которой целевая функция достигает минимума. Максимального значения целевая функция достигает в двух вершинах B и C , а, следовательно, и в любой точке отрезка BC . Произошло это потому, что линия уровня функции Z параллельна стороне BC многогранника области допустимых решений. Будем в подобных случаях говорить, что задача имеет *альтернативный оптимум*.

5) Определяем оптимальный план. Координаты точки $A(3;3)$ находятся при совместном решении уравнений: $-2x_1 + 9x_2 = 21$ и $x_1 = 3$. Аналогично находятся координаты точек $B(5;12)$ и $C(10;10)$. Подставляя значения свободных переменных $x_1^* = 3$ и $x_2^* = 3$ в исходную ЗЛП определим оптимальные значения оставшихся переменных x_3, x_4, x_5 и x_6 . Таким образом, искомое оптимальное решение будет:

$$X_{\min}^* = (3, 3, 0, 0, 42, 49) \text{ и } Z_{\min}^* = -19.$$

Заметим, что данный опорный план является невырожденным. Аналогично находим следующих два опорных решения:

$$X_{\max}^{(1)} = (12; 5; 0; 9; 37; 0)$$

$$X_{\max}^{(2)} = (10; 10; 49; 7; 0; 0).$$

Используя свойство 2.5 решений ЗЛП, получаем:

$$X_{\max}^* = (22\lambda + 10; -5\lambda + 10; 49 - 49\lambda; 2\lambda + 7; 0),$$

$$\text{где } 0 \leq \lambda \leq 1, \text{ и } Z_{\max}^* = 30.$$

Отметим также, что область допустимых решений системы может быть пустой, если система ограничений ЗЛП несовместна; одной точкой, выпуклым многогранником неограниченной выпуклой многогранной областью. При этом при определении оптимального плана возможны следующие случаи:

- а) задача не имеет решения (если область допустимых решений – пустое множество);
- б) оптимальный план единственный;
- в) оптимальных планов бесконечное множество (случай альтернативного оптимума);
- г) целевая функция не ограничена.

ТЕМА 3 СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Классическим методом решения ЗЛП стал симплекс-метод, получивший также в литературе название метода последовательного улучшения плана, разработанный в 1947 году американским математиком Дж. Данцигом.

Идея метода состоит в последовательном переборе угловых точек множества допустимых планов задачи, т.е. в последовательном улучшении опорных планов задачи по определенному критерию до тех пор, пока не будет получено оптимальное решение.

Для решения ЗЛП необходимо выполнить следующие процедуры:

- 1) привести исходную задачу к эквивалентному каноническому предпочтительному виду:

$$\max(\min) Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$x_i + \sum_{j=m+1}^n a_{ij} x_j = \beta_i, \beta_i \geq 0, i = \overline{1, m}; \quad (3.1)$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, n}$$

2) определить начальный опорный план задачи: $X_0 = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m, 0, \dots, 0)$; $n-m$

3) занести в исходную симплекс-таблицу данные нашей задачи, соответствующие начальному опорному плану X_0 :

БП	C_B	x_1	x_2	x_3	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	x_j	x_{m+n}	x_n	A_0
		c_1	c_2	c_3	c_m	c_{m+1}	c_{m+2}	c_j	c_{m+n}	c_n	
x_1	c_1	1	0	0	0	$\alpha_{1,m+1}$	$\alpha_{1,m+2}$	$\alpha_{1,j}$	$\alpha_{1,m+n}$	$\alpha_{1,n}$	β_1
x_i	c_i	0	1	0	0	$\alpha_{i,m+1}$	$\alpha_{i,m+2}$	$\alpha_{i,j}$	$\alpha_{i,m+n}$	$\alpha_{i,n}$	β_i
x_m	c_m	0	0	1	0	$\alpha_{m,m+1}$	$\alpha_{m,m+2}$	$\alpha_{m,j}$	$\alpha_{m,m+n}$	$\alpha_{m,n}$	β_m
$Z_j - C_j$		0	0	0	0	Δ_{m+1}	Δ_{m+2}	Δ_j	Δ_{m+n}	Δ_n	Δ_0

где $C_B = (c_1, \dots, c_m)$ – вектор коэффициентов целевой функции при базисных переменных; $A_0 = (b_1, \dots, b_m)^T$ – вектор свободных членов в системе ограничений, представленной в предпочтительном виде.

$A_j = (a_{1j}, \dots, a_{mj})^T$ – вектор-столбец коэффициентов при переменных x_j . Элементы последней строки, часто называемой Z -строкой, рассчитываются по специальным формулам:

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^m c_i \alpha_{ij} - c_j = C_B \cdot A_j - c_j, j = \overline{1, n}. \quad (3.2)$$

$$\Delta_0 = \sum_{i=1}^m c_i \beta_i = C_B \cdot A_0 \quad (3.3)$$

Заметим, что Δ_0 есть значение целевой функции для начального опорного плана X_0 .

Составление симплексной таблицы является первым шагом алгоритма симплекс-метода по нахождению оптимального плана.

Приведем весь алгоритм симплекс-метода.

1. Составление симплексной таблицы.

2. Проверка опорного плана на оптимальность: опорный план X_0 доставляет целевой функции максимальное (минимальное) значение $Z(X_0) = \Delta_0$, если все оценки свободных переменных неотрицательны (неположительны).

3. Если при решении задачи на $\max(\min)$ среди оценок свободных переменных Δ_j имеются отрицательные(положительные), а в столбце A переменной x_i все $\alpha_{ij} < 0$, $i = 1, m$, то целевая функция не ограничена сверху (снизу) на множестве допустимых планов задачи.

4. Если же имеются $\Delta_j < 0$ ($\Delta_j > 0$) в столбцах A_j , соответствующих этим отрицательным(положительным) оценкам, существует хотя бы один элемент $\alpha_{i_0 j_0} > 0$, то возможен переход к нехудшему опорному плану.

5. Вектор-столбец A_{j_0} , для которого $\Delta_{j_0} = \max |\Delta_j|$ называется разрешающим, а соответствующая переменная x_{j_0} – перспективной. Для улучшения плана перспективная переменная x_{j_0} вводится в базис.

6. Строку i_0 , для которой выполняется симплексное отношение:

$$\min_{\alpha_{ij_0} > 0} \left\{ \frac{b_i}{\alpha_{ij_0}} \right\} = \frac{b_{i_0}}{\alpha_{i_0 j_0}},$$

назовём разрешающей, а элемент $\alpha_{i_0 j_0}$ – разрешающим или ключевым. Переменная x_{i_0} выводится из базиса.

7. Заполняется таблица, соответствующая новому опорному плану. Все элементы новой симплексной таблицы определяются новыми симплексными преобразованиями:

$$\alpha'_{ij} = \begin{cases} \alpha_{ij} - \frac{\alpha_{i_0 j} \cdot \alpha_{i j_0}}{\alpha_{i_0 j_0}}, & \text{если } i \neq i_0 \\ \frac{\alpha_{i_0 j}}{\alpha_{i_0 j_0}}, & \text{если } i = i_0 \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\beta'_i = \begin{cases} \beta_i - \frac{\beta_{i_0} \cdot \alpha_{i j_0}}{\alpha_{i_0 j_0}}, & \text{если } i \neq i_0 \\ \frac{\beta_{i_0}}{\alpha_{i_0 j_0}}, & \text{если } i = i_0 \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\Delta'_j = \Delta_j - \frac{\Delta_{j_0} \alpha_{i_0 j}}{\alpha_{i_0 j_0}}, \quad j = \overline{0, n} \quad (3.6)$$

Как следует из равенств (3.4) – (3.6) при $i \neq i_0$, элементы α'_{ij} , β'_i и Δ'_j новой симплексной таблицы могут быть найдены по правилу треугольника: из соответствующего элемента прежней таблицы нужно вычесть произведение элемента разрешающей строки на элемент разрешающего столбца, разделённое на ключевой элемент.

	x_{ij}		x_{iy_0}
$x_{i_0 j}$			$x_{i_0 j_0}$

8. Процесс вычисления заканчивается, когда найдено оптимальное решение (пункт 2), либо когда целевая функция будет неограниченной на множестве допустимых планов.

Шаг симплексного метода, позволяющий перейти от одного опорного плана к другому нехудшему, называется **итерацией**.

При решении ЗЛП симплексным методом будут полезны следующие замечания.

1. Коэффициенты и значения целевой функции могут быть рассчитаны по формулам (3.2), (3.3), которые могут быть применены для контроля вычислений после каждой итерации.

2. Между оптимальным планом исходной задачи, записанной в каноническом виде и М-задачей предпочтительного вида существует следующая связь:

$$\bar{X}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*, \omega_1^*, \dots, \omega_m^*),$$

где $\omega_i^* = 0, i = \overline{1, m}$ – все искусственные переменные, то план оптимален

$X^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ для исходной задачи. Если же хотя бы одна искусственная переменная отлична от нуля, то система ограничений исходной задачи несовместна.

3. При решении М-задачи по мере вывода из базиса искусственных переменных соответствующие им столбцы можно опускать.

4. Если в индексной строке последней симплексной таблицы (содержащей оптимальный план) имеется хотя бы одна нулевая оценка, соответствующая свободной переменной, то ЗЛП имеет бесконечное множество оптимальных планов.

Пример 3.1: Решить симплекс-методом ЗЛП:

$$\begin{aligned} \max Z &= 5x_1 + 2x_2, \\ \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 25; \\ -x_1 + 2x_2 \geq 1; \\ x_2 \leq 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Решение:

Сведем задачу к каноническому виду, а затем к М-задаче предпочтительного вида:

$$\begin{aligned} \max \bar{Z} &= 5x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 - M\omega_1, \\ \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 & & & & = 25, \\ -x_1 + 2x_2 & -x_4 & & + \omega_1 & = 1, \\ & x_2 & & + x_5 & = 5, \\ x_j \geq 0, j = 1, 5, \omega_1 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

За начальный базис выберем переменные x_3, ω_1, x_5 . Занесём условие М-задачи в симплексную таблицу. Индексную строку в случае М-задачи удобно разбить на две. Значение целевой функции для начального опорного плана X_0 и оценки индексной строки рассчитываем по формулам (3.2), (3.3).

БП	С _Б	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	ω_1	A_0	Θ
		5	2	0	0	0	M		
x_3	0	4	3	1	0	0	0	25	$25/3$
ω_1	-M	-1	2	0	-1	0	1	1	$1/2$
x_5	0	0	1	0	0	1	0	5	5
$z_j - c_j$		-5	-2	0	0	0	0	0	
		M	-2M	0	M	0	0	-M	

Итак, начальный опорный план $X_0 = (0; 0; 25; 0; 5; 1)$. Действительно, полагая свободные переменные $x_1 = x_2 = x_4 = 0$, базисные переменные примут следующие значения $x_3 = 25$, $x_5 = 5$, $\omega_1 = 1$. При этом $Z(X_0) = -M$, где M – достаточно большое положительное число.

Данный план не является оптимальным, так как при решении задачи на максимум, среди оценок свободных переменных имеются отрицательные Δ_1 и Δ_2 . Вектор-столбец 4, выберем разрешающим, так как у него наибольшая по абсолютной величине индексная оценка. Соответствующую перспективную переменную x_2 введём в базис.

Находим минимальное симплексное отношение (их значения приведены в дополнительном столбце):

$$\min \left\{ \frac{25}{3}; \frac{1}{2}; 5 \right\} = \frac{1}{2}$$

но соответствует второй строке, которая и будет разрешающей. Соответствующая ей переменная $\omega_1 = 1$ выводится из базиса. Элемент $a_{12} = 2$ является ключевым элементом (в итерации 0 он выделен рамкой).

Запишем следующую симплексную таблицу, соответствующую новому опорному плану, пользуясь рекуррентными соотношениями (3.4)-(3.6).

Например:

$$\alpha'_{11} = 4 - \frac{-1 \cdot 3}{2} = \frac{11}{2},$$

$$\beta'_1 = 25 - \frac{3 \cdot 1}{2} = \frac{47}{2}.$$

Итерация 1:

БП	С _Б	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	A ₀	Θ
		5	2	0	0	0		
x ₃	0	11/2	0	1	3/2	0	47/2	47/11
x ₂	2	-1/2	1	0	-1/2	0	1/2	-
x ₅	0	1/2	0	0	1/2	1	9/2	9
z ₁ -C ₁		-6	0	0	-1	0	1	

Так как искусственная переменная w₁ выведена из базиса, то соответствующий столбец опущен. Итак, $\bar{X}_1 = (0; 1/2; 47/2; 0; 9/2; 0)$, $Z(\bar{X}_1) = 1$.

В индексной строке есть отрицательный элемент. Δ₁ = -6. Следовательно, оптимальное решение не получено. Будем улучшать план за счет введения в базис переменной x₁. Разрешающим элементом является $\alpha'_{11} = \frac{11}{2}$.

Итерация 2:

БП	С _Б	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	A ₀
		5	2	0	0	0	
x ₃	0	1	0	$\frac{2}{11}$	$\frac{3}{11}$	0	$\frac{47}{11}$
x ₂	2	0	1	$\frac{1}{11}$	$\frac{4}{11}$	0	$\frac{29}{11}$
x ₅	0	0	0	$\frac{1}{11}$	$\frac{4}{11}$	1	$\frac{26}{11}$
z ₁ -C ₁		0	0	$\frac{12}{11}$	$\frac{7}{11}$	0	$\frac{293}{11}$

В индексной строке полученной симплексной таблицы нет отрицательных элементов. Следовательно, опорный план $\bar{X}_2 = (\frac{47}{11}; \frac{29}{11}; 0; 0; \frac{26}{11}; 0)$ дос-

7) если какое-либо ограничение прямой задачи записано как равенство, то на соответствующую переменную двойственной задачи условие не налагается

Очевидно, задача двойственная двойственной, совпадает с исходной, т.е. отношение двойственности симметрично. Тем самым мы можем говорить о паре взаимно двойственных задач.

В матричной форме пара двойственных симметричных задач может быть кратко записана:

$$Z(X) = CX \rightarrow \max, \Omega = \{X \in R^n | AX \leq B, X \geq 0\} \quad (4.5)$$

$$F(Y) = YB \rightarrow \min, \Omega' = \{Y \in R^m | Y \cdot A \geq C, Y \geq 0\} \quad (4.6)$$

Фундаментальные свойства, которыми обладают двойственные задачи ЛП, могут быть сформулированы в виде приводимых ниже утверждений. Их обычно называют *теоремами двойственности*.

4.1 Основное неравенство двойственности: Если X и Y - допустимые планы для пары двойственных задач, то $Z(X) \leq F(Y)$.

4.2 Критерий оптимальности Канторовича: Если для некоторых планов X^* и Y^* взаимно двойственных задач выполняется равенство:

$$Z(X^*) = F(Y^*), \quad (4.7)$$

то X^* и Y^* являются оптимальными планами для этих задач.

4.3 Теорема существования: Чтобы прямая и двойственная задачи имели оптимальные решения, необходимо и достаточно, чтобы существовали допустимые решения для каждой из них.

4.4 Основная теорема двойственности: Если одна и та же пара двойственных задач имеет оптимальное решение, то и другая его имеет, причем экстремальные значения целевых функций равны. Если же целевая функция одной из задач не ограничена, то система условий другой противоречива.

4.5 Теорема равновесия: Пусть X^* и Y^* — оптимальные планы пары двойственных задач. Если j -тая компонента плана X^* строго положительна ($x_j^* > 0$) то соответствующее j -тое ограничение двойственной задачи выполняется как равенство:

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* = c_j,$$

если же j -тая компонента плана X^* имеет нулевое решение ($x_j^* = 0$), то j -тое ограничение двойственной задачи выполняется как неравенство:

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* \geq c_j.$$

4.6 Теорема об оценках: Значения переменных y_i^* в оптимальном решении двойственной задачи представляют собой оценки влияния свободных членов системы ограничений на величину функции цели:

$$y_i^* = \frac{\partial Z(X^*)}{\partial b_i}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (4.8)$$

Из теорем двойственности вытекает:

1) Между переменными прямой и двойственной задачи можно установить следующее взаимно однозначное соответствие:

$$x_j \leftrightarrow y_{m+j}, \quad x_{n+i} \leftrightarrow y_i \quad (4.9)$$

Получить решение двойственной задачи можно из последней симплексной таблицы прямой задачи. Оптимальное решение двойственной задачи соответствует оценкам индексной строки в последней симплексной таблице прямой задачи. Если прямая решается на максимум, то:

$$y_i^* = \Delta_{n+i}^* \quad (i = \overline{1, m}), \quad y_{m+j}^* = \Delta_j^* \quad (j = \overline{1, n}) \quad (4.10)$$

Если прямая решается на минимум, то:

$$y_i^* = -\Delta_{n+i}^* \quad (i = \overline{1, m}), \quad y_{m+j}^* = -\Delta_j^* \quad (j = \overline{1, n})$$

2) Из теоремы равновесия следует условие дополняющей нежесткости для оптимальных планов X^* и Y^* пары двойственных задач:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j^* - c_i &= 0, \\ y_i^* (\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* - b_i) &= 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

3) Теория двойственности позволила разработать еще один метод решения ЗЛП, получившего название **двойственного симплексного метода**, предложенного впервые Лемке в 1954г. Этот метод представляет собой итеративный процесс целенаправленного перебора сопряженных (двойственно допустимых) базисов. В этом его отличие от обычного симплекс-метода, в котором последовательно рассматриваются допустимые базисные планы прямой задачи.

Экономическая интерпретация двойственной ЗЛП базируется на модели простейшей задачи производственного планирования. В ней вектор X рассматривается как план выпуска продукции; c_j – цена единицы продукции j -го вида; A_j – вектор, определяющий технологию расходования имеющихся ресурсов на производство единицы продукции j -го вида; b_i – ограничение на объемы i -го ресурса, а y_i – оценка единицы i -го ресурса.

Выпишем решение двойственной задачи, используя соответствие (4.10):

$$Y^* = (0,25; 1,5; 0 \mid 8; 0; 0; 10), \quad F_{\min} = F(Y^*) = 15$$

Первые две двойственные оценки показывают, что увеличение ресурсов P_1 и P_2 на единицу приведет к увеличению $Z_{\max}$ соответственно на 0.25 и 1.5 единиц, а оценка $y_3^* = 0$ показывает, что увеличение ресурсов сырья P_3 не повлияет на величину $Z_{\max}$, ибо это сырье и так имеется в избытке.

Дополнительные двойственные оценки $y_4^* = 8$ и $y_5^* = 10$ говорят о том, что стоимость ресурсов, расходуемых на единицу производства продукции первого и четвертого вида (в оптимальных оценках) превосходит стоимость единицы этой продукции на 8 и 10 денежных единиц соответственно.

ТЕМА 5. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Пусть имеется m поставщиков, располагающих некоторым продуктом в объемах по a_i единиц ($i = \overline{1, m}$) и n получателей с объемом потребления по b_j единиц ($j = \overline{1, n}$). Задана матрица тарифов $C = [c_{ij}]$, где c_{ij} – стоимость перевозки единицы продукции от i -го поставщика j -тому потребителю. Задача сводится к определению плана перевозок $X = [x_{ij}]$, (где x_{ij} – количество единиц продукции, поставляемой по коммуникациям ij), который минимизирует целевую функцию.

$$Z(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (5.1)$$

на множестве допустимых планов.

$$\Omega = \left\{ X \in R^{mn} \mid \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \right. \quad (5.2)$$

$$\left. \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, x_{ij} \geq 0, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n} \right\}$$

при соблюдении условия баланса:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j. \quad (5.3)$$

Задачи, в которых соблюден баланс между ресурсами и потребностями, т.е. выполняется (4.3) называются закрытыми, а задачи с отсутствием баланса – открытыми.

В случае, если запасы больше потребностей получателей, вводят $(n+1)$ -го фиктивного потребителя, спрос которого полагают равным небалансу, т.е.

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j \quad (5.4)$$

Тарифы $c_{i,n+1}$ ($i = \overline{1, m}$) считают одинаковыми, чаще всего равными нулю. Аналогично, если потребности превышают запасы, вводится $(m+1)$ -й поставщик, запас которого:

$$\begin{aligned} a_{m+1} &= \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i \\ c_{m+1,j} &= 0 \quad (j = \overline{1, n}). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Для данной задачи двойственная будет иметь следующий вид:

$$\max F = \sum_{i=1}^m a_i u_i + \sum_{j=1}^n b_j v_j \quad (5.6)$$

$$\Omega = \left\{ u \in R^m, v \in R^n \mid u_i + v_j \leq c_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n} \right\} \quad (5.7)$$

Переменные u_i называют потенциалами пунктов производства, а v_j – потенциалами пунктов потребления.

Транспортная задача (ТЗ) является представителем класса задач ЛП, и поэтому обладает всеми качествами линейных оптимизационных задач, но одновременно она имеет и ряд дополнительных полезных свойств, которые позволили разработать специальные методы ее решения. При решении ТЗ важное значение имеет **теорема о ранге матрицы**. ранг матрицы ТЗ на единицу меньше числа уравнений: $r = m + n - 1$ где m – число поставщиков, n – число потребителей.

Из данной теоремы следует, что каждое опорное решение системы ограничений ТЗ должно иметь $n - r = mn - (n + m - 1) = (m - 1)(n - 1)$ свободных переменных, равных нулю, и $r = m + n - 1$ базисных переменных. Таким образом, невырожденный опорный план должен содержать $m + n - 1$ ненулевых компонент.

Процесс решения ТЗ удобно оформлять в виде последовательности таблиц, структура которых следующая:

a_i	b_1		b_n
	c_{11}		c_{1n}
a_1	x_{11}		x_{1n}
a_m	c_{m1}		c_{mn}
	x_{m1}		x_{mn}

Строки транспортной таблицы соответствуют пунктам производства, а столбцы – пунктам потребления. Во входной строке и столбце указаны объем запасов продуктов a_i и потребности b_j . Все остальные клетки содержат информацию о перевозке из i -го пункта в j -й: цена единицы перевозки единицы продукта c_{ij} и объем перевозимого груза x_{ij} .

Алгоритм решения ТЗ после занесения исходных данных в транспортную таблицу включает следующие этапы:

1) Построение начального опорного плана.

Существуют различные способы построения начального опорного плана: правило ‘северо-западного угла’, ‘минимального элемента’, метод Фогеля.

Суть метода “северо-западного угла” состоит в последовательном распределении груза, начиная с загрузки левой верхней клетки, двигаясь затем от нее по строке вправо или по столбцу вниз. Каждый шаг распределения сводится к попытке полного исчерпания запасов в очередном пункте производства или к попытке полного удовлетворения потребностей в очередном пункте потребления. На каждом шаге к величине текущих нераспределенных запасов обозначим $a_i^{(k)}$, а текущих неудовлетворительных потребностей – $b_j^{(k)}$. Из данных чисел выбирается минимальное и назначается в качестве объема перевозки между данными пунктами:

$$x_{ij} = \min \{a_i^{(k)}, b_j^{(k)}\} \quad (5.8)$$

После этого значения нераспределенных запасов и неудовлетворенных потребностей в соответствующем пункте уменьшаются на данную величину:

$$\begin{aligned} a_i^{(k+\eta)} &= a_i^{(k)} - x_{ij}, \\ b_j^{(k+\eta)} &= b_j^{(k)} - x_{ij} \end{aligned} \quad (5.9)$$

После чего следует переход в следующую клетку. В данном методе никак не учитываются значения c_{ij} , а потому целевая функция, как правило, принимает значение, далекое от оптимального.

Суть **“метода минимального элемента”** состоит в том, что при распределении объемов перевозок по вышеуказанному правилу (5.8) с учетом (5.9). в первую очередь заполняются клетки с наименьшими тарифами. Процесс распределения заканчивается, когда все запасы поставщиков исчерпаны, а спрос потребителей полностью удовлетворен.

Суть **“метода Фогеля”** состоит в определении наибольшей разности по строкам и столбцам между двумя наименьшими тарифами. Загрузке подлежат клетки, соответствующие наибольшей разности и наименьшему тарифу. На каждом шаге загружается только одна клетка. Распределение груза производится по уже известному правилу. “Метод Фогеля” используется как приближенный метод решения ТЗ. Отметим, что в построенном плане занятыми должно быть $m+n-1$ клеток.

2) Проверка построенного плана на оптимальность.

Критерий оптимальности для плана транспортной задачи (теорема о потенциалах):

Для того, чтобы допустимый план ТЗ $X^* = [x_{ij}]_{m,n}$ был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы нашлись такие потенциалы u_i, v_j , для которых:

$$u_i + v_j = c_{ij}, \text{ если } x_{ij} > 0, \quad (5.10)$$

$$u_i + v_j \leq c_{ij}, \text{ если } x_{ij} = 0. \quad (5.11)$$

Таким образом, после определения, из системы (5.10), содержащей $m+n-1$ уравнение, потенциалов текущего плана ТЗ для каждой свободной клетки проверим условие (5.11). Для этого найдем оценки свободных клеток:

$$s_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j). \quad (5.12)$$

Признаком оптимальности является не отрицательность оценок всех свободных клеток. При этом если все $s_{ij} > 0$, то полученный оптимальный план единственный.

3) Переход к следующему опорному плану путем перераспределения потоков.

Если для опорного плана перевозок условие оптимальности не выполняется, то за счет загрузки свободной клетки с отрицательной оценкой план перевозок улучшается. Если таких клеток несколько, то наиболее перспективной для загрузки является клетка с наименьшей оценкой. Для такой клетки строится замкнутый цикл с вершинами в загруженных клетках. Свободной клетке условно приписывается знак "+", тогда следующей по часовой или против часовой занятой клетке – знак "-" и т.д., знаки чередуются. Выбираем наименьшее значение поставки в клетках отрицательного полуцикла, т.е. $\min \{x_{ij}\} = \lambda$.

Производится перемещение груза на величину λ так, чтобы баланс цикла сохранился. В общем виде переход к новому опорному плану осуществляется по формуле:

$$x'_{ij} = \begin{cases} x_{ij}, & \text{для клеток, не входящих в цикл} \\ x_{ij} + \lambda, & \text{для клеток положительного полуцикла} \\ x_{ij} - \lambda, & \text{для клеток отрицательного полуцикла} \end{cases} \quad (5.13)$$

Получаем новый опорный план, который необходимо проверить на оптимальность.

Пример 5.1: Определить оптимальный план перевозок товара от поставщиков к оптовым базам, минимизирующий суммарные транспортные расходы, если известны:

a_i – запас единиц груза i -того поставщика, $i = \overline{1,3}$,

b_j – потребность единиц груза j -того потребителя, $j = \overline{1,4}$,

c – затраты на перевозку одной единицы груза.

$A = (a_i) = (700; 300; 600)$

$B = (b_j) = (350; 550; 250; 650)$

$$C = [c_{ij}] = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 7 & 9 \\ 8 & 5 & 3 & 8 \\ 7 & 4 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Начальный опорный план построить различными методами, найти значение целевой функции для каждого из планов.

Решение:

Поскольку потребности превышают запасы, вводится согласно (5.5), фиктивный поставщик, запас которого $a_4 = 200$ единиц.

1.) Построим начальные опорные планы различными методами:

а.) методом северо-западного угла:

b_j	350	550	250	650
a_i				
700	7	8	7	9
300	8	5	3	8
600	7	4	3	7
200	0	0	0	0

Стрелки на диаграмме указывают на процесс распределения: от (1,1) к (1,2) на 350, от (1,2) к (2,2) на 200, от (2,2) к (2,3) на 100, от (2,3) к (3,3) на 150, от (3,3) к (3,4) на 450, и от (4,4) к (4,5) на 200.

Показан процесс поиска опорного плана, включая последовательное изменение объема нераспределенных запасов и неудовлетворенных потребностей.

Например:

$$x_{11} = \min\{350; 700\} = 350$$

$$x_{12} = \min\{550; 700 - 350\} = 350.$$

Стрелки отражают траекторию перехода по клеткам транспортной таблицы. В результате получаем следующее опорное решение:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 350 & 350 & 0 & 0 \\ 0 & 200 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 150 & 450 \\ 0 & 0 & 0 & 200 \end{bmatrix}$$

Данный план является невырожденным, так как содержит $m + n - 1 = 7$ ненулевых компонент.

$$Z(X_1) = 350 \cdot 7 + 350 \cdot 8 + 200 \cdot 5 + 100 \cdot 3 + 150 \cdot 3 + 450 \cdot 7 = 10150$$

б) методом минимального элемента:

$a_i \backslash b_j$	350	550	250	650
700	150 (4)	8 (5)	7 (3)	9 (7)
300	8 (8)	5 (4)	250 (2)	50 (6)
600	7 (7)	550 (3)	3 (3)	50 (5)
200	200 (1)	0 (0)	0 (0)	0 (0)

Намеченные тарифы имеют клетки : (4;1); (4;2); (4;3) и (4;4). Загружаем любую из них. В клетку (4;1) помещаем $x_{41} = \min\{200; 350\} = 200$ единиц груза. Далее по величине тарифа следуют клетки (2;3) и (3;3). Тогда $x_{23} = \min\{300; 250\} = 250$. Аналогично с учетом изменения объема нераспределенных запасов и неудовлетворенных потребностей заполняются оставшиеся клетки таблицы. Цифры в кружочках показывают последовательность загрузки клеток таблицы. Таким образом получаем следующее невырожденное опорное решение:

$$X_2 = \begin{bmatrix} 150 & 0 & 0 & 550 \\ 0 & 0 & 250 & 50 \\ 0 & 550 & 0 & 50 \\ 200 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Z(X_2) = 9700$$

в) методом Фогеля:

Разность между двумя наименьшими тарифами будем заносить в дополнительные строки и столбцы, соответствующие Δ_k , где k – номер шага при получении опорного плана. Наибольшую разность будем отмечать знаком $\square$. В строке (столбце) с наибольшей разностью запол-

нием клетку с наименьшим тарифом. Например, на 3 шаге загружается клетка (2,2):

$$x_{22} = \min\{300 - 250; 550\} = 50$$

	350	550	250	650	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5	Δ_6
700	7 150 (3)	8	7 550 (7)	9	0	0	1	1	2	0
300	8	5 50 (3)	3 250 (2)	8	2	2	3	-	-	-
600	7	4 500 (4)	3	7 100 (6)	1	1	3	3	0	0
200	0 200 (1)	0	0	0	0	-	-	-	-	-
Δ_1	7	4	3	7						
Δ_2	0	1	0	1						
Δ_3	0	1	-	1						
Δ_4	0	4	-	2						
Δ_5	0	-	-	2						
Δ_6	-	-	-	2						

$$X_1 = \begin{bmatrix} 150 & 0 & 0 & 550 \\ 0 & 50 & 250 & 50 \\ 0 & 500 & 0 & 100 \\ 200 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Z(X_1) = 9700$$

1. В качестве начального опорного плана выберем план X_1 .

2. Проверим полученный начальный опорный план на оптимальность.

Данный план не вырожденный, содержит $m + n - 1 = 7$ ненулевых базисных клеток, и по нему можно определить потенциалы u_i и v_j , чтобы для

каждой базисной клетке выполнялось условие (5.10). Откуда получаем следующую систему:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 7, \\ u_1 + v_4 = 9, \\ u_2 + v_2 = 5, \\ u_2 + v_3 = 3, \\ u_3 + v_2 = 4, \\ u_3 + v_4 = 7, \\ u_4 + v_1 = 0. \end{cases}$$

Данная система совместная и не определенная. Полагая потенциал первого пункта производства $u_1 = 0$, получаем полную систему потенциалов, показанную в следующей таблице:

150	7	8	7	9	550	$u_1 = 0$
8	5	3	8			$u_2 = -1$
50	250	3	7	100		$u_3 = -2$
200	0	0	0	0		$u_4 = -7$
$v_1 = 7$	$v_2 = 6$	$v_3 = 4$	$v_4 = 9$			

Для небазисных клеток транспортной таблицы по формуле (5.12) найдем оценки свободных клеток s_{ij} . В данной таблице они выписаны для всех небазисных клеток под тарифами.

Одна из оценок свободных переменных отрицательна $s_{44} = -2$. Значит, план X_3 не оптимален. Преобразуем план в соответствии с формулой (5.13), образовав замкнутую цепочку из клеток: (4;4), (4;1), (1;1), (1;4). Величина груза, перемещаемого по циклу:

$$\lambda = \min\{200; 250\} = 200.$$

Переходим к следующему базисному плану, показанному в таблице:

$\begin{matrix} 7 \\ 350 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 8 \\ \end{matrix}$	$\begin{matrix} 7 \\ \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 \\ 350 \end{matrix}$	$u_1 = 0$
$\begin{matrix} 8 \\ \end{matrix}$	$\begin{matrix} 5 \\ 50 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 3 \\ 250 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 \\ \end{matrix}$	$u_2 = -1$
$\begin{matrix} 7 \\ \end{matrix}$	$\begin{matrix} 4 \\ 500 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 3 \\ \end{matrix}$	$\begin{matrix} 7 \\ 100 \end{matrix}$	$u_3 = -2$
$\begin{matrix} 0 \\ \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 \\ \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 \\ \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 \\ 200 \end{matrix}$	$u_4 = -7$
$v_1 = 7$	$v_2 = 6$	$v_3 = 4$	$v_4 = 9$	

Все оценки s свободных переменных неотрицательны, а это значит, что полученный план оптимален. Из данной таблицы получаем следующий оптимальный план для исходной задачи:

$$X^* = \begin{bmatrix} 350 & 0 & 0 & 350 \\ 0 & 50 & 250 & 0 \\ 0 & 500 & 0 & 100 \end{bmatrix}$$

для которого значение целевой функции $Z(X^*) = 9300$ единиц. 200 единиц груза не получил четвертый потребитель. Так как $s_4 = 0$, то оптимальных планов с указанным значением целевой функции бесконечно много.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО КУРСУ “ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ”

1. Сформулируйте задачу линейного программирования.
2. Чем отличается общая задача линейного программирования от канонической и симметричной?
3. Что означает эквивалентность различных форм записи задачи линейного программирования?
4. Дайте определение для следующих понятий: план, допустимый план, оптимальный план.
5. В каком случае мы говорим, что система ограничений задачи линейного программирования приведена к предпочтительному виду?
6. Чем отличается выпуклый многогранник от многогранного выпуклого множества?
7. В чем отличие понятий “линейная оболочка” и “выпуклая оболочка”?
8. Какая точка выпуклого множества называется угловой?
9. Какова структура координат угловой точки многогранника планов?
10. Какой план называется опорным?
11. Какой план задачи линейного программирования называется вырожденным?
12. Сформулируйте свойства решения задач линейного программирования
13. В чем заключается геометрическая интерпретация задачи линейного программирования?
14. В каком случае задачу линейного программирования можно решить графически?
15. Как с точки зрения геометрической интерпретации можно представить процесс поиска оптимального плана в задаче линейного программирования?
16. Сформулируйте критерий оптимальности опорного плана, применяемого в симплекс-методе
17. Сформулируйте основные этапы стандартной итерации симплекс-метода.
18. Можно ли найти верхнюю границу количества итераций, которое потребуется для решения задачи симплекс-методом?
19. При каких условиях делается вывод о неограниченности целевой функции в решаемой задаче? Какая геометрическая интерпретация соответствует данному случаю?
20. По каким признакам можно узнать, что текущий план является вырожденным?
21. В каком случае говорят об альтернативном оптимуме? Какая геометрическая интерпретация соответствует данному случаю?
22. По каким признакам можно определить, что множество допустимых планов задачи, решаемой симплекс-методом, пусто?

23. Сформулируйте особенности решения М-задачи симплекс-методом.
24. Дайте определение двойственной задачи.
25. Сформулируйте правила построения задачи, двойственной по отношению к общей ЗЛП.
26. В чем заключается экономическая интерпретация двойственной задачи?
27. Какими фундаментальными свойствами обладают двойственные задачи линейного программирования? Какова их экономическая интерпретация?
28. Перечислите основные идеи, на которых базируется двойственный симплекс-метод.
29. Сформулируйте критерий оптимальности, используемый в алгоритме двойственного симплекс-метода.
30. Какие специфические свойства позволяют выделить транспортные задачи в отдельный класс из множества задач линейного программирования?
31. Опишите методы построения допустимого плана транспортных задач.
32. Сколько ненулевых элементов должен содержать невырожденный опорный план транспортной задачи?
33. Сформулируйте критерий оптимальности для допустимого плана транспортной задачи?
34. Что является аналогом индексной строки в методе потенциалов?
35. Каково экономическое истолкование потенциалов?
36. Перечислите основные этапы метода потенциалов.
37. Перечислите основные этапы метода потенциалов. Какими способами решаются транспортные задачи, в которых не соблюден баланс между ресурсами и потребностями?

Расчетно-графическое задание № 1

“СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ, ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ И ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ”

Требуется решить графически и проверить выполнимость основных свойств решений задач линейного программирования для следующей ЗЛП:

$$\min Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - (k+1)x_5$$

На множестве $\Omega \in R^+$, где $X \in \Omega$, удовлетворяющей следующей системе ограничений:

$$\begin{cases} -(k+1) \cdot x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = k \\ (k+2) \cdot x_1 + x_3 + x_5 = 3k+6 \\ 2(k+2) \cdot x_1 - x_4 + (k+1) \cdot x_5 = k \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 5, \quad k - \text{номер варианта.}$$

Расчетно-графическое задание № 2

“СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ. ДВОЙСТВЕННОСТЬ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ”

Предприятие может выпускать продукцию двух видов: P_1 и P_2 . Используются три вида ресурсов: R_1, R_2, R_3 . Нормы расхода, лимиты ресурсов и прибыль от реализации единицы продукции представлены в таблице:

Ресурсы	Норма расхода на единицу продукции		Объем ресурса
	P_1	P_2	
R_1	4	5	$30+k$
R_2	1	3	$15+k$
R_3	2	1	$20+k$
Прибыль за единицу продукции	10	k	

Требуется:

- составить математическую модель прямой и двойственной задачи;
- найти оптимальный план выпуска продукции;
- используя теорию двойственности выписать оптимальное решение двойственной задачи;
- дать содержательный экономический анализ основных и дополнительных переменных прямой и двойственной задач;
- проверить условие о дополняющей нежесткости;
- установить, как изменится прибыль, если незначительно (на единицу) увеличить или уменьшить объем данного ресурса;

Расчетно-графическое задание № 3

“ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА”

Определить план перевозок продукции из трех пунктов отправления в пять пунктов назначения, так чтобы суммарные транспортные издержки были минимальными.

Запас, потребность и стоимость перевозки 1 единицы продукции приведены в таблице

Поставщики	Потребители					Запас груза (a_i)
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10	$k+5$	7	11	8	180
A_2	8	12	k	6	5	240
A_3	k	20	15	10	11	$50+k$
Потребность в грузе (b_j)	150	100	80	$2(k+15)$	75	

Начальный опорный план построить всеми тремя методами.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов А. В., Сакович В. А., Холод Н. И. Высшая математика. Математическое программирование. – Мн.: Выш. шк., 1994.
2. Кузнецов А. В. Высшая математика. Математическое программирование. Мн.: Выш. шк., 1995.
3. Кузнецов А. В. Сборник задач по высшей математике. Математическое программирование. – Мн.: Выш. шк., 1995.
4. Сакович В. А. Исследование операций. – Мн.: Выш. шк., 1986.
5. Сакович В. А. Оптимальные решения экономических задач. Мн.: Выш. шк., 1985.
6. Конюховский П. Математические методы исследования операций в экономике – Санкт-Петербург: Питер, 2000

СОДЕРЖАНИЕ

Тема 1. Формы записи задач линейного программирования (ЗЛП)	1
Тема 2. Основные свойства решений, геометрическая интерпретация и графическое решение задачи линейного программирования	6
Тема 3. Симплексный метод решения задач линейного программирования	11
Тема 4. Двойственность в линейном программировании	18
Тема 5. Транспортная задача	24
Контрольные вопросы по курсу “Линейное программирование”	34
Расчетно-графическое задание № 1	36
Расчетно-графическое задание № 2	37
Расчетно-графическое задание № 3	38
Рекомендуемая литература	39