

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
МОГИЛЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. А. А. КУЛЕШОВА

Сакович Н.В., Борбат В.Н.

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА.
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Практикум (расчетно-графические задания)
для студентов специальности
“Государственное и муниципальное управление”

Могилев
МГУ им. А. А. Кулешова
2001

Рецензент
Зав. кафедрой алгебры и геометрии,
доцент МГУ им. А. А. Кулешова
Б.Д. Чеботаревский

*Печатается по решению редакционно-издательского
и экспертного совета МГУ им. А. А. Кулешова*

Сакович Н. В., Борбат В. Н.

С15 Высшая математика. Математическое программирование: Практикум (расчетно-графических заданий) по математическому программированию. – Могилев: МГУ им. А.А.Кулешова, 2001. – 10 с.

Целью расчетно-графических заданий является подготовка студентов к самостоятельному изучению литературы по математическому программированию, выработка навыков математического исследования прикладных вопросов.

Выполнение студентами предлагаемых расчетно-графических работ поможет не только усвоить методы решения задач на экстремум, возникающих при планировании и организации производства, но и получить навыки математического моделирования несложных экономических процессов.

УДК 51+519.7
ББК 22.11+22.183.4



© Сакович Н.В., Борбат В.Н., 2001
© МГУ им. А. А. Кулешова, 2001

Свойства решений, геометрическая интерпретация и графическое решение задачи линейного программирования

Задание № 1.

В следующей задаче линейного программирования (ЗЛП) целевая функция содержит параметр a :

$$Z(X) = a \cdot x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - (k+1) \cdot x_5 \rightarrow \min,$$

на множестве $\Omega \in R^5$, где $X \in \Omega$, удовлетворяющему системе ограничений:

$$\begin{cases} -(k+1) \cdot x_1 + x_2 + x_3 & + x_5 = k, \\ (k+2) \cdot x_1 & + x_3 & + x_5 = 3k+6, \\ -2(k+2) \cdot x_1 & - x_4 + (k+1) \cdot x_5 = k \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,5}, \quad k - \text{номер варианта.}$$

Требуется:

- 1) доказать, что данную ЗЛП можно решить графически;
- 2) построить область допустимых решений Ω ;
- 3) определить, при каких значениях параметра a задача будет иметь:
 - а) бесконечное множество решений,
 - б) единственное решение,
 - в) не иметь решений;
- 2) при одном из значений параметра a , в случае, когда задача имеет бесконечное множество решений, решить её графически и проверить выполнимость основных свойств решений ЗЛП.

Замечание: Во всех остальных расчётно-графических заданиях k – номер варианта.

Симплексный метод решения задач линейного программирования. Двойственность в линейном программировании

Задание № 2.

Предприятие может выпускать продукцию двух видов. Используется три вида ресурсов R_1, R_2, R_3 . Нормы расхода, лимиты ресурсов и прибыль от реализации единицы продукции представлены в таблице:

Ресурсы	Нормы расхода на единицу продукции		Объём ресурса
	Π_1	Π_2	
R_1	4	5	$30+k$
R_2	1	3	$15+k$
R_3	2	1	$20+k$
Прибыль за единицу продукции	10	k	

Требуется:

- 1) составить математическую модель прямой и двойственной задачи;
- 2) найти оптимальный план выпуска продукции;
- 3) используя теорию двойственности, выписать оптимальное решение двойственной задачи;
- 4) дать содержательный экономический анализ основных и дополнительных переменных прямой и двойственной задач;
- 5) проверить условие о дополняющей нежёсткости;
- 6) установить, как изменится прибыль, если незначительно (на единицу) увеличить или уменьшить объём одного ресурса.

Задание № 3.

Решить следующую ЗЛП симплексным методом с искусственным базисом:

$$\max(\min) Z(X) = -x_1 - x_2;$$

на множестве $\Omega \in \mathbb{R}^2$, где $X \in \Omega$, удовлетворяющей следующей системе:

$$\begin{cases} -(k+1) \cdot x_1 + x_2 \leq 5, \\ 5x_1 + x_2 \geq 5, \\ x_1 - (1+k) \cdot x_2 \leq 5; \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Транспортная задача

Задание № 4.

Определить план перевозок продукции из трёх пунктов отправления в пять пунктов назначения так, чтобы суммарные транспортные издержки были минимальными.

Запас, потребность и стоимость перевозки 1 единицы продукции приведены в таблице:

Пункты отправления	Пункты назначения					Запас груза (a_i)
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10	$k+5$	7	11	8	180
A_2	8	12	k	6	5	240
A_3	k	20	15	10	11	$50+k$
Потребность в грузе (b_j)	150	100	180	$2(k+15)$	75	

Начальный опорный план построить всеми тремя методами.

Задание № 5.

С четырёх участков поступили заявки на механизмы трёх видов. Распределить механизмы согласно заявкам так, чтобы общий объём выполненной работы был максимальным.

Производительность каждого механизма на соответствующем участке, количество механизмов каждого вида и заявки на них приведены в следующей таблице:

Участки	Механизмы			Заявки
	M_1	M_2	M_3	
Y_1	6	3	5	10
Y_2	$k+2$	14	5	22
Y_3	8	7	9	18
Y_4	k	4	3	$k+5$
Количество механизмов	20	$k+7$	18	

Задание № 6.

Имеются два пункта производства, четыре пункта потребления и три промежуточные базы. Известны объёмы поставок и потребления, мощность баз, а также стоимости перевозки единицы продукции от поставщиков на базы и с баз к потребителям (данные в таблицах).

Составить оптимальный план перевозки от поставщиков к базам и с баз потребителям, минимизирующий суммарные транспортные расходы на перевозку.

Поставщики	Базы			Объёмы поставок
	P_1	P_2	P_3	
A_1	20	10	$k+8$	350
A_2	$k+5$	24	16	450
Мощность баз	240	500	260	

Базы	Потребители				Мощность баз
	B_1	B_2	B_3	B_4	
P_1	27	22	$k+8$	13	240
P_2	20	25	24	$k+10$	500
P_3	18	10	k	11	260
Потребности в грузе	150	250	175	225	

Матричные игры с нулевой суммой. Статистические игры

Задание № 7.

Два предприятия выделяют денежные средства на строительство четырёх объектов. С учётом особенностей вкладов и местных условий прибыль первого предприятия в зависимости от объёма финансирования выражается элементами матрицы:

$$\begin{bmatrix} -(k+5) & 15 & k & 20 \\ -(k+2) & 8 & k+1 & 5 \\ k & k+10 & -(k+3) & 90 \\ -(k+4) & 3 & -k & -(k+4) \end{bmatrix}$$

Для упрощения задачи принять, что убыток второго предприятия равен прибыли первого.

Требуется:

- 1) определить максимальную и минимальную стратегии предприятий;
- 2) произвести возможные упрощения платёжной матрицы;
- 3) решить матричную игру:
 - а) используя графический метод решения;
 - б) сведя матричную игру к паре двойственных задач линейного программирования.

Задание № 8.

Руководство универсама заказывает товар вида A . Известно, что спрос на данный вид товара лежит в пределах от $(k+10)$ до $(k+15)$ единиц. Если заказанного товара окажется недостаточно для удовлетворения покупательского спроса, то руководство может срочно заказать и завести недостающее количество, причём расходы по срочному заказу и завозу единицы товара составляют $0,5(k+5)$ денежных единиц. Если же спрос будет меньше наличного количества товара, то нереализованный товар хранится на складе в универсаме, причём расходы за хранение единицы товара составляют 8 денежных единиц.

Требуется:

- 1) придать описанной ситуации игровую схему и составить платёжную матрицу игры;
- 2) найти оптимальные чистые стратегии, пользуясь:
 - а) критерием Байеса (считать вероятности соответственно равными 0,1; 0,3; 0,4; 0,2);
 - б) критерием Лапласа;
 - в) критериями Вальда, Сэвиджа, Гурвица (значение параметра в критерии Гурвица равно 0,7).

Решение задач целочисленного линейного программирования методом отсечений (Гомори) и методом ветвей и границ

Задание № 9.

Найти оптимальное целочисленное решение следующей задачи:

$$Z(X) = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max,$$

на множестве $\Omega \in R^2$, где $X \in \Omega$, удовлетворяющей системе ограничений:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq k, \\ 2x_1 \leq 2k+1, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0;$$

$$x_\gamma \in Z^+, \gamma = 1, 2.$$

Задание № 10.

Коммивояжер должен посетить каждый из пяти городов только один раз и вернуться в исходный пункт. Матрица расстояний между городами следующая:

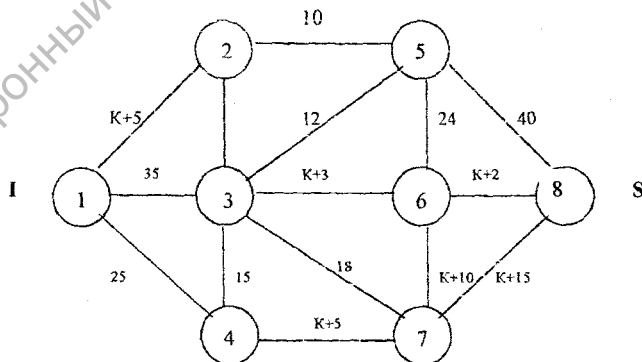
$i \backslash j$	1	2	3	4	5
1	∞	15	40	$k+5$	18
2	22	∞	$k+10$	35	∞
3	7	$k+10$	∞	9	20
4	∞	15	6	∞	k
5	18	$k+4$	5	40	∞

Требуется найти маршрут минимальной суммарной длины (гамильтонов контур минимальной длины).

Программирование на сетях

Задание № 11.

На заданной сети сформировать поток максимальной мощности, направленный от истока I в сток S , при условии, что пропускные способности ребер сети в обоих направлениях одинаковы. Выписать рёбра, образующие на сети разрез минимальной пропускной способности.



Задание № 12.

В следующей таблице представлен список комплекса операций по реконструкции цеха.

Операции	Непосредственно предшествующие операции	Продолжительность (дни)	Потребность в специалистах (чел)
<i>A</i>	–	<i>K</i>	10
<i>B</i>	–	12	5
<i>C</i>	–	9	2
<i>D</i>	<i>A</i>	6	9
<i>E</i>	<i>B, D</i>	–	–
<i>F</i>	<i>A</i>	6	3
<i>M</i>	<i>B, D</i>	$k+3$	8
<i>N</i>	<i>F, E</i>	21	6

Требуется:

1) построить сетевой график выполнения комплекса работ и пронумеровать события в соответствии с алгоритмом Фалкерсона;

2) вычислить непосредственно на сетевом графике сроки свершения событий, сроки начала и окончания работ, полные и свободные резервы времени работ (полученные результаты занести в таблицу); выделить на сетевом графике критический путь;

3) построить линейный график комплекса работ и определить по нему критический срок и критический путь;

4) построить шкалу занятости специалистов в ходе выполнения работ комплекса;

5) используя метод выравнивания потребностей в ресурсах (количество специалистов, занятых одновременно не должно превышать значение $R = 20$), определить время осуществления комплекса работ.

Метод множителей Лагранжа

Задание №13.

Методом множителей Лагранжа найти условные экстремумы функции

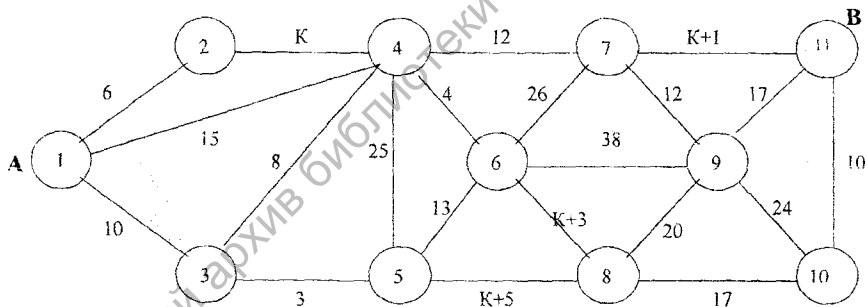
$$Z(X) = 4x_1 + 5x_2, \quad X \in \left\{ X \in R^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = k \right\}$$

Дать экономическую интерпретацию задачи, считая Z – как доход, а k – как затраты на ресурсы.

Динамическое программирование

Задание № 14.

Задана транспортная сеть, на которой указаны пункт отправления **A** и пункт назначения **B**. Между ними имеются промежуточные пункты, соединённые участками пути с указанием расстояния между ними. Методами динамического программирования найти маршрут минимальной длины из пункта отправления в пункт назначения.



Содержание

1. Свойства решений, геометрическая интерпретация и графическое решение ЗЛП	1
2. Симплексный метод решения ЗЛП. Двойственность в линейном программировании	1
3. Транспортная задача	3
4. Матричные игры с нулевой суммой. Статистические игры	4
5. Решение задач целочисленного программирования методом отсечений и методом ветвей и границ	5
6. Программирование на сетях	6
7. Метод множителей Лагранжа	7
8. Динамическое программирование	8
Рекомендуемая литература	9

22.10.2020

Учебное издание

Сакович Наталья Владимировна
Борбат Владимир Николаевич

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА.
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
ПРОГРАММИРОВАНИЕ
Практикум (расчетно-графические задания)
для студентов специальности
"Государственное и муниципальное управление"

Технический редактор А. Н.Гладун
Компьютерная верстка В. С.Маявко

ЛВ № 384 от 07.02.2001

Сдано в набор 28.10.01. Подписано в печать 2.11.01. Формат 60x84¹/₁₆
Бумага офсетная № 1. Гарнитура Times New Roman.
Усл.-печ. л. 0,5. Уч.-изд. л. 0,6. Тираж 100 экз. Заказ № 352

Налоговая льгота - Общегосударственный классификатор
Республики Беларусь ОКРБ 007-98. 22.11.20.600.

Учреждение образования "Могилевский государственный университет
им. А. А. Кулешова", 212022, Могилев, Космонавтов, 1

Напечатано на ризографе лаборатории оперативной полиграфии
у им. А. А. Кулешова, ЛП № 281 от 07.02.2001
212022, Могилев, Космонавтов, 1

