В.Н. Борбат
Н.В. Сакович
А.Б. Чеботаревский
Б.Д. Чеботаревский

# КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО КУРСУ “АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ”

Для студентов
физико-математического факультета



МОГИЛЕВ 2006

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
"МОГИЛЁВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. А.А.КУЛЕШОВА"

В.Н. Борбат, Н.В. Сакович,
А.Б. Чеботаревский, Б.Д. Чеботаревский

# КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО КУРСУ "АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ"

Для студентов
физико-математического факультета

Могилёв 2006

УДК (512+511)(076-1)
ББК 22.14в6+22.13в6
Б82

*Печатается по решению редакционно-издательского
и экспертного совета МГУ им. А.А.Кулешова*

Рецензент:
доктор физико-математических наук, профессор
кафедры математического анализа, информатики и
вычислительной техники МГУ им. А.А.Кулешова
*С.В. Жестков*

**Борбат, В.Н.**
Б82 Контрольные задания по курсу «Алгебра и теория чисел» / В.Н. Борбат, Н.В. Сакович, А.Б. Чеботаревский, Б.Д. Чеботаревский. – Могилев: МГУ им. А.А.Кулешова, 2006. – 62 с.

ISBN 985-480-268-Х.

Сборник предназначен для итогового тестового контроля уровня усвоения основного содержания курса «Алгебра и теория чисел» студентами специальности «Математика и физика». Он включает более 300 тестовых заданий, сгруппированных в 8 тем, которые предусматривают контроль как усвоения основных понятий (темы 1 и 2), основных фактов (тема 3), так и уровня овладения основными алгоритмами и практическими умениями по основным разделам курса (темы 4 – 8).

Предложенный сборник материалов будет полезен студентам для подготовки к итоговым испытаниям.

**УДК (512+511)(076-1)**
**ББК 22.14в6+22.13в6**

**ISBN 985-480-268-Х**

# Тема 1. Логика и множества (основные понятия)

**1. Укажите верное определение.**

А) Отрицанием высказывания $A$ называется такое высказывание $\rceil A$, которое истинно, если $A$ ложно, и ложно, если $A$ истинно.

Б) Отрицанием высказывания $A$ называется высказывание $\rceil A$.

В) Конъюнкцией высказываний $p$ и $q$ называется высказывание $p \wedge q$.

Г) Дизъюнкцией высказываний $p$ и $q$ называется высказывание $p \vee q$, которое истинно, когда одно из высказываний $p$ или $q$ истинно.

**2. Укажите верное определение.**

А) Объединением множеств $A$ и $B$ называется множество $A \cup B$.

Б) Объединением множеств $A$ и $B$ называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств $A$ и $B$.

В) Объединением множеств $A$ и $B$ называются все их общие элементы.

Г) Объединением множеств $A$ и $B$ называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат как множеству $A$, так и множеству $B$.

**3. Укажите верное определение.**

А) Множество $B$ называется подмножеством множества $A$, если $B$ является частью множества $A$.

Б) Множество $B$ называется подмножеством множества $A$, если $B$ состоит из тех элементов, что и $A$.

В) Множество $B$ называется подмножеством множества $A$, если каждый элемент множества $B$ является элементом множества $A$.

Г) Множество $B$ называется подмножеством множества $A$, если $B$ входит в $A$.

**4. Укажите верное определение.**

А) Пересечением множеств $A$ и $B$ называется множество $A \cap B$.

Б) Пересечением множеств $A$ и $B$ называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств $A$ и $B$.

В) Пересечением множеств $A$ и $B$ называются все их элементы.

Г) Пересечением множеств $A$ и $B$ называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат как множеству $A$, так и множеству $B$.

**5. Укажите верное определение.**

А) Бинарным отношением между элементами множеств $A$ и $B$ называется отношение между двумя элементами этих множеств.
Б) Бинарным отношением между элементами множеств $A$ и $B$ называется множество пар элементов, в которых первый элемент принадлежит $A$, а второй — $B$.
В) Бинарным отношением между элементами множеств $A$ и $B$ называется любое подмножество декартова произведения $A \times B$.
Г) Бинарным отношением между элементами множеств $A$ и $B$ называется граф, на котором от некоторых элементов множества $A$ идут стрелки к некоторым элементам множества $B$.

**6. Укажите верное определение.**

А) Бинарное отношение $\rho$ между элементами множеств $A$ и $B$ называется функциональным, если оно задается некоторой функцией.
Б) Бинарное отношение $\rho$ между элементами множеств $A$ и $B$ называется функциональным, если оно задает определенную функцию с областью определения $A$ и множеством значений $B$.
В) Бинарное отношение $\rho$ между элементами множеств $A$ и $B$ называется функциональным, если для каждого элемента $x$ из множества $A$ существует не более одного элемента $y$ из множества $B$, такого, что $(x, y) \in \rho$.
Г) Бинарное отношение $\rho$ между элементами множеств $A$ и $B$ называется функциональным, если от каждого элемента множества $A$ идет не более одной стрелки к каждому элементу множества $B$.

**7. Укажите верное определение.**

А) Бинарное отношение $\rho$ на множестве $A$ называется рефлексивным, если оно содержит прямую $y = x$.
Б) Бинарное отношение $\rho$ на множестве $A$ называется рефлексивным, если для каждого элемента $x$ из множества $A$ $(x, x) \in \rho$.
В) Бинарное отношение $\rho$ на множестве $A$ называется рефлексивным, если для любых элементов $x$ и $y$ из множества $A$ из того, что $(x, y) \in \rho$, следует, что $(y, x) \in \rho$.
Г) Бинарное отношение $\rho$ на множестве $A$ называется рефлексивным, если для любых элементов $x$ и $y$ из множества $A$ из того, что $(x, y) \in \rho$ и $(y, x) \in \rho$, следует, что $x = y$.

**8. Укажите верное определение.**

А) Бинарное отношение $\rho$ на множестве $A$ называется симметричным, если оно симметрично относительно прямой $y = x$.
Б) Бинарное отношение $\rho$ на множестве $A$ называется симметричным, если для каждого элемента $x$ из множества $A$ $(x, x) \in \rho$.

В) Бинарное отношение $\rho$ на множестве $A$ называется симметричным, если для любых элементов $x$ и $y$ из множества $A$ из того, что $(x, y) \in \rho$, следует, что $(y, x) \in \rho$.
Г) Бинарное отношение $\rho$ на множестве $A$ называется симметричным, если для любых элементов $x$ и $y$ из множества $A$ из того, что $(x, y) \in \rho$ и $(y, x) \in \rho$, следует, что $x = y$.

**9. Укажите верное определение.**
А) Бинарное отношение $\rho$ на множестве $A$ называется отношением эквивалентности, если оно симметрично, рефлексивно и транзитивно.
Б) Бинарное отношение $\rho$ на множестве $A$ называется отношением эквивалентности, если каждый элемент $x$ из множества $A$ принадлежит некоторому классу эквивалентности.
В) Бинарное отношение $\rho$ на множестве $A$ называется отношением эквивалентности, если для любых элементов $x$ и $y$ из множества $A$ либо $(x, y) \in \rho$, либо $(y, x) \in \rho$.
Г) Бинарное отношение $\rho$ на множестве $A$ называется отношением эквивалентности, если для любых элементов $x$ и $y$ из множества $A$ из того, что $(x, y) \in \rho$ и $(y, x) \in \rho$, следует, что $x = y$.

**10. Укажите верное определение.**
А) Алгебра $\langle A, * \rangle$ называется группой, если бинарная операция $*$ на множестве $A$ ассоциативна, обладает двусторонним нейтральным элементом и для каждого элемента имеет симметричный элемент.
Б) Алгебра $\langle A, +, \cdot \rangle$ называется кольцом, если $\langle A, + \rangle$ — коммутативная группа и $\langle A \setminus \{0\}, \cdot \rangle$ — коммутативная группа.
В) Алгебра $\langle A, +, \cdot \rangle$ называется кольцом, если во множестве $A$ можно выполнять операции сложения, вычитания и умножения.
Г) Алгебра $\langle A, +, \cdot \rangle$ называется полем, если $\langle A, + \rangle$ — коммутативная группа и $\langle A \setminus \{0\}, \cdot \rangle$ — коммутативная группа.

**11. Рангом системы векторов называется:**
А) число векторов в системе;
Б) число ненулевых векторов в системе;
В) число различных векторов в системе;
Г) число векторов в базисе этой системы.

**12. Базисом системы векторов называется:**
А) любая линейно независимая подсистема этой системы векторов;
Б) максимальная линейно независимая подсистема этой системы векторов;

**В)** любая подсистема этой системы векторов, через которую линейно выражается каждый вектор;
Г) нет правильного ответа.

**13. Система векторов называется линейно независимой, если:**
А) она содержит нулевой вектор;
Б) только ее тривиальная линейная комбинация может равняться нулевому вектору;
**В)** существует нетривиальная линейная комбинация векторов этой системы, равная нулевому вектору;
Г) ее ранг меньше числа векторов в системе.

**14. Тривиальной линейной комбинацией системы векторов** $a_1, a_2, \ldots, a_n$ **называется вектор вида** $\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \ldots + \alpha_n \cdot a_n$**, где**
А) хотя бы один из коэффициентов $\alpha_i$ равен нулю;
Б) хотя бы один из коэффициентов $\alpha_i$ не равен нулю;
**В)** все коэффициенты $\alpha_i$ равны нулю;
Г) ни один из коэффициентов $\alpha_i$ не равен нулю;

**15. Укажите неверное утверждение.**
Элементарными преобразованиями конечной системы векторов являются следующие преобразования:
А) умножение любого вектора системы на отличный от нуля скаляр;
Б) прибавление (вычитание) к одному из векторов системы другого вектора системы, умноженного на скаляр;
В) выведение (исключение) из системы любого вектора;
Г) выведение (исключение) из системы нулевого вектора.

**16. Укажите неверное утверждение.**
Две системы векторов эквивалентны, если:
А) равны их линейные оболочки;
Б) одну из систем векторов можно получить путем элементарных преобразований другой;
В) совпадают их базисы;
Г) содержат одинаковое количество векторов.

**17. Система векторов называется линейно зависимой, если:**
А) она не содержит нулевой вектор;
Б) существует нетривиальная линейная комбинация векторов этой системы, равная нулевому вектору;
В) только ее тривиальная линейная комбинация может равняться нулевому вектору;
Г) ее ранг равен числу векторов в системе.

**18. Линейной оболочкой векторов системы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называется:**
А) множество всех линейных комбинаций этой системы;
Б) вектор вида $\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \ldots + \alpha_n \cdot a_n$, где хотя бы один из коэффициентов $\alpha_i$ равен нулю;
В) вектор вида $\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \ldots + \alpha_n \cdot a_n$, где хотя бы один из коэффициентов $\alpha_i$ не равен нулю;
Г) вектор вида $\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \ldots + \alpha_n \cdot a_n$, где все коэффициенты $\alpha_i$ равны нулю.

**19. Элементарными преобразованиями системы уравнений не являются:**
А) удаление из системы уравнения вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0$;
Б) умножение одного из уравнений системы на произвольное число $c$;
В) прибавление к обеим частям одного из уравнений системы соответствующих частей другого уравнения;
Г) прибавление к обеим частям одного из уравнений системы соответствующих частей другого уравнения, предварительно умноженного на число $c$.

**20. Укажите неверное утверждение. Две системы являются равносильными, если:**
А) решения одной системы являются также и решениями другой и наоборот;
Б) каждую систему уравнений можно получить из другой с помощью элементарных преобразований;
В) обе системы уравнений несовместны;
Г) обе системы уравнений имеют бесконечное множество решений.

## Тема 2. Матрицы, определители, числа, векторные пространства (основные понятия)

**1. Рангом матрицы называется:**
А) число строк матрицы;
Б) число столбцов матрицы;
В) число ненулевых элементов матрицы;
Г) максимальное число линейно независимых строк матрицы.

**2. Укажите матрицу, которая является единичной:**
А) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; В) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

Б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; Г) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**3. Квадратная матрица называется вырожденной, если:**

А) число строк матрицы равно числу столбцов;
Б) число столбцов матрицы меньше числа строк;
В) ранг матрицы меньше ее порядка;
Г) ранг системы столбцов матрицы равен рангу системы строк.

**4. Квадратная матрица *A* называется обратимой, если существует такая матрица *B*, что:**

А) $B \cdot A = A \cdot B$;
Б) $A \cdot B = E$ и $B \cdot A = E$;
В) $B^{-1} \cdot B = E$;
Г) $B \cdot A = A^T$.

**5. Квадратная матрица называется невырожденной, если:**

А) число строк матрицы равно числу столбцов;
Б) число столбцов матрицы меньше числа строк;
В) ранг системы столбцов матрицы не равен рангу системы строк;
Г) ранг матрицы равен ее порядку.

**6. Укажите симметрическую матрицу:**

А) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; В) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

Б) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; Г) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**7. Квадратная матрица называется диагональной, если:**

А) равны элементы матрицы, симметричные относительно главной диагонали;
Б) все элементы матрицы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю;
В) все элементы матрицы, находящиеся под главной диагональю, равны нулю;
Г) все элементы матрицы, находящиеся на главной диагонали, равны нулю.

**8. Определителем квадратной матрицы называется:**

А) алгебраическая сумма $n!$ слагаемых, каждое из которых есть произведение $n$ сомножителей, взятых из каждой строки и каждого столбца со знаком «+», или со знаком «–»;
Б) алгебраическая сумма $n!$ слагаемых, каждое из которых есть произведение $n$ сомножителей, взятых точно по одному из каждой строки и каждого столбца, со знаком «+», если подстановка от номеров строк к номерам столбцов выбранных элементов четная, и со знаком «–», если эта подстановка нечетная;
В) произведение $n$ сомножителей, взятых точно по одному из каждой строки и каждого столбца со знаком «+», если подстановка от номеров строк к номерам столбцов выбранных элементов четная, и со знаком «–», если эта подстановка нечетная;
Г) алгебраическая сумма $n!$ слагаемых, взятых точно по одному из каждой строки и каждого столбца со знаком «+», если подстановка от номеров строк к номерам столбцов выбранных элементов четная, и со знаком «–», если эта подстановка нечетная.

**9. Минором элемента $a_{ij}$ квадратной матрицы $A$ называется определитель матрицы, полученной из исходной:**
А) перестановкой $i$-й строки и $j$-го столбца;
Б) вычеркиванием $i$-й строки и $j$-го столбца;
В) вычеркиванием $j$-й строки и $i$-го столбца;
Г) умножением на элемент $a_{ij}$ всех элементов $i$-й строки.

**10. Алгебраическим дополнением элемента $a_{ij}$ квадратной матрицы $A$ называется:**
А) минор $M_{ij}$ элемента $a_{ij}$ с противоположным знаком;
Б) минор $M_{ij}$ элемента $a_{ij}$, умноженный на элемент $a_{ij}$;
В) минор $M_{ji}$ элемента $a_{ji}$, умноженный на элемент $a_{ij}$;
Г) минор $M_{ij}$ элемента $a_{ij}$, умноженный на $(-1)^{i+j}$.

**11. Число $a$ называется первообразным корнем по модулю $m$, если:**
А) порядок числа $a$ по модулю $m$ меньше $\varphi(m)$;
Б) порядок числа $a$ по модулю $m$ равен $0{,}5\varphi(m)$
В) порядок числа $a$ по модулю $m$ равен $\varphi(m)$
Г) порядок числа $a$ по модулю $m$ равен 2.

**12. Первообразные корни существуют:**
А) только по простым модулям;
Б) только по модулям, которые являются натуральной степенью простого числа;

В) только по модулям 2,4, $p^{\alpha}$, где $p$ простое нечетное число, $\alpha \geq 1$;
Г) по модулям 2, 4, $p^{\alpha}$, $2p^{\alpha}$, где $p$ простое нечетное число, $\alpha \geq 1$.

**13. Обыкновенная несократимая дробь $\frac{a}{в}$ обращается в конечную десятичную дробь, если:**

А) НОД ($в$, 10) = 2;
Б) НОД ($в$, 10) = 5;
В) $в = 2^{\alpha} \cdot 5^{\beta}, \alpha \geq 0, \beta \geq 0$;
Г) НОД ($в$, 10) = 10.

**14. Обыкновенная несократимая дробь $\frac{a}{в}$ обращается в чистую десятичную дробь, если:**

А) НОД ($в$, 10) = 2;
Б) НОД ($в$, 10) = 5;
В) НОД ($в$, 10) = 1;
Г) $в$ является нечетным числом.

**15. Пусть натуральное число $n$ представлено в каноническом виде $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$. Тогда количество натуральных чисел, меньших $n$ и взаимно простых с $n$, равно:**

А) $p_1^{\alpha_1+1} \cdot p_2^{\alpha_2+1} \cdots p_k^{\alpha_k+1}$;
Б) $(p_1^{\alpha_1+1} - p_1^{\alpha_1}) \cdot (p_2^{\alpha_2+1} - p_2^{\alpha_2}) \cdots (p_k^{\alpha_k+1} - p_k^{\alpha_k})$;
В) $\prod_{i=1}^{k} \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}$;
Г) $\prod_{i=1}^{k} (p_i^{\alpha_i} - p_i^{\alpha_i - 1})$.

**16. Как изменится матрица перехода от одного базиса к другому, если поменять местами два вектора первого базиса?**

А) Поменяются местами две строки;
Б) не изменится;
В) поменяются местами два столбца;
Г) транспонируется.

**17. Как изменится матрица перехода от одного базиса к другому, если поменять местами два вектора второго базиса?**

А) Не изменится;
Б) поменяются местами два столбца;
В) поменяются местами две строки;
Г) транспонируется.

**18. Какие из следующих множеств чисел с обычными операциями сложения и умножения являются линейными пространствами над полем $Q$?**

А) $N, Z, Q$;
Б) $Z, R, C$;
В) $Z, Q, R$;
Г) $Q, R, C$.

**19. Следующее множество матриц с обычными операциями сложения матриц и умножения матриц на элементы поля *R* не является линейным пространством:**

А) множество всех прямоугольных матриц размерами $m \times n$ с действительными элементами;

Б) множество всех матриц второго порядка с действительными элементами;

В) множество всех матриц;

Г) множество всех матриц второго порядка с комплексными элементами.

**20. Множество векторов со сложением векторов и умножением вектора на действительное число, определяемых правилами векторной алгебры, не является действительным линейным пространством:**

А) множество всех векторов, параллельных данной прямой, проходящей через начало координат;

Б) множество всех ненулевых векторов, не параллельных данной прямой;

В) множество всех векторов, параллельных заданной плоскости, проходящей через начало координат;

Г) множество всех векторов пространства.

**21. Пусть $V$ — пространство направленных отрезков плоскости, отложенных от начала координат (система координат декартова). Следующее множество векторов образует подпространство:**

А) множество всех векторов первого и второго координатных углов;

Б) множество всех векторов первого и третьего координатных углов;

В) множество всех векторов, лежащих на оси $Ox$;

Г) множество всех векторов, лежащих на оси $Ox$ или $Oy$.

**22. Пусть $V$ — пространство направленных отрезков плоскости, отложенных от начала координат (система координат декартова). Следующее множество векторов образует подпространство:**

А) линейная оболочка ненулевого вектора;

Б) множество всех векторов второго и четвертого координатных углов;

В) линейное многообразие, порожденное ненулевым вектором;

Г) множество всех векторов первого и четвертого координатных углов.

**23. Пусть $L$ — линейная оболочка двух непропорциональных векторов арифметического трехмерного пространства. Подпространство $L$ изоморфно:**

А) $\boldsymbol{R}^1$;

Б) $\boldsymbol{R}^2$;

В) $\boldsymbol{R}^3 \cap \boldsymbol{R}^1$;

Г) $\boldsymbol{R}^3$.

**24. Следующее множество с обычным сложением и умножением на число является действительным линейным пространством:**
А) множество всех многочленов степени $n$ с действительными коэффициентами;
Б) множество всех разрывных действительных функций на отрезке $[a; b]$ с действительными коэффициентами;
В) множество всех многочленов с действительными коэффициентами, степень которых не превосходит $n$;
Г) множество всех многочленов с действительными коэффициентами, степень которых не меньше $n$.

**25. Следующее множество векторов на декартовой плоскости, отложенных от начала координат, с обычным сложением и умножением на число является действительным линейным пространством:**
А) множество, состоящее из одного ненулевого вектора;
Б) множество всех векторов, концы которых лежат на прямой, не проходящей через начало координат;
В) множество всех векторов, лежащих на прямой, проходящей через начало координат;
Г) множество всех векторов, концы которых лежат в первой или в третьей четверти.

**26. Система векторов пространства $R^n$ линейно независима, если:**
А) один из векторов линейно выражается через другие векторы этой системы;
Б) число векторов системы больше их размерности;
В) состоит из одного ненулевого вектора;
Г) два вектора системы различаются скалярным множителем.

**27. Если линейно независимая система векторов, содержащая $k$ векторов, линейно выражается через другую систему векторов, содержащую $s$ векторов, то:**
А) $k + 2 = s$;
Б) $k < s$;
В) $k + 1 = s$;
Г) $k \leq s$.

## Тема 3. Основные факты

**1. Укажите неверное утверждение.**
При решении системы линейных уравнений возможны случаи:
А) система несовместна;

Б) система имеет единственное решение;
В) система имеет конечное множество решений;
Г) система имеет бесконечное множество решений.

**2. Укажите верное утверждение.**

А) Система линейных однородных уравнений всегда имеет решения.
Б) Система линейных однородных уравнений всегда имеет нетривиальное решение.
В) Система линейных однородных уравнений имеет единственное решение, если число неизвестных равно числу уравнений.
Г) Система линейных однородных уравнений имеет решения тогда и только тогда, когда ранг матрицы коэффициентов равен числу неизвестных.

**3. Если ранг основной матрицы однородной системы линейных уравнений на единицу меньше числа переменных, то:**

А) любые два решения этой системы пропорциональны;
Б) система несовместна;
В) система имеет единственное решение;
Г) все решения системы различны и непропорциональны.

**4. Если ранг основной матрицы системы линейных уравнений равен 3, а ранг ее расширенной матрицы равен 4, то:**

А) система линейных уравнений имеет 3 решения;
Б) система линейных уравнений имеет бесконечное множество решений;
В) система линейных уравнений несовместна;
Г) система линейных уравнений имеет единственное решение.

**5. Пусть ранг основной матрицы системы линейных уравнений равен $k$, ранг ее расширенной матрицы равен $m$, число неизвестных в системе равно $n$. Тогда система линейных уравнений имеет единственное решение, если:**

А) $k = m < n$;
Б) $k = m$;
В) $k = m = n$;
Г) $k < m$.

**6. Пусть ранг основной матрицы системы линейных уравнений равен $k$, ранг ее расширенной матрицы равен $m$, число неизвестных в системе равно $n$. Тогда система линейных уравнений не имеет решений, если:**

А) $k = m < n$;
Б) $k = m$;
В) $k = m = n$;
Г) $k < m$.

**7. Пусть ранг основной матрицы системы линейных уравнений равен $k$, ранг ее расширенной матрицы равен $l$, число неизвестных в системе равно $n$. Тогда система линейных уравнений имеет бесконечно много решений, если:**

А) $k = l < n$;
Б) $k = l$;
В) $k = l = n$;
Г) $k < l$.

**8. Чтобы умножить вектор на число нужно:**

А) сумму компонент вектора умножить на это число;
Б) разность компонент вектора умножить на это число;
В) каждую из компонент вектора умножить на это число;
Г) произведение компонент вектора умножить на это число.

**9. Чтобы найти сумму двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ нужно:**

А) к сумме компонент вектора $\vec{a}$ прибавить сумму компонент вектора $\vec{b}$;
Б) найти суммы соответствующих компонент векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
В) найти произведения соответствующих компонент векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
Г) не для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполнима операция сложения.

**10. Укажите неверное утверждение:**

А) ранг любой подсистемы конечной системы векторов не больше ранга всей системы;
Б) эквивалентные конечные системы векторов имеют один и тот же ранг;
В) ранг любой конечной системы векторов $n$-мерного арифметического векторного пространства не больше $n$;
Г) если конечная система векторов имеет ранг $r$, то любая ее подсистема из $k$ векторов при $k < r$ линейно независима.

**11. Чтобы умножить вектор на число нужно:**

А) сумму компонент вектора умножить на это число;
Б) разность компонент вектора умножить на это число;
В) каждую компоненту вектора умножить на это число;
Г) первую компоненту вектора умножить на это число.

**12. Чтобы найти разность двух векторов нужно:**

А) из суммы компонент первого вектора вычесть сумму компонент второго вектора;
Б) вычислить разности соответствующих компонент векторов;
В) найти произведение соответствующих компонент векторов;
Г) не для любых арифметических векторов выполнима операция вычитания.

**13. Матрицу $A$ можно умножить на матрицу $B$, если:**

А) число строк матрицы $A$ равно числу строк матрицы $B$;
Б) число столбцов матрицы $A$ равно числу столбцов матрицы $B$;
В) число столбцов матрицы $A$ равно числу строк матрицы $B$;
Г) число строк матрицы $A$ равно числу столбцов матрицы $B$.

**14. Матрица $A$ имеет обратную матрицу, если матрица $A$:**
А) вырожденная;
Б) невырожденная;
В) имеет определитель, равный 0;
Г) имеет две пропорциональные строки.

**15. Укажите верное высказывание:**
А) если $AB=BA$, то $A$ и $B$ — квадратные матрицы одинаковых размеров;
Б) если $AB$ и $BA$ существуют, то $A$ и $B$ — квадратные матрицы;
В) если $AB$ и $BA$ существуют, то $AB = BA$;
Г) если $A$ — квадратная матрица и $AB$ существует, то и $B$ — квадратная матрица.

**16. Укажите неверное высказывание о матричном равенстве $AB=C$:**
А) система столбцов матрицы $C$ линейно выражается через систему столбцов матрицы $A$;
Б) система строк матрицы $C$ линейно выражается через систему строк матрицы $B$;
В) ранг матрицы $C$ не меньше рангов матриц $A$ и $B$;
Г) если $C$ — нулевая матрица и $A$ — невырожденная квадратная матрица, то $B$ — нулевая матрица.

**17. Даны матричные уравнения $AX=B$ (1) и $YA=B$ (2). Укажите неверное высказывание:**
А) если $A$ и $B$ имеют разное число строк, то уравнение (1) неразрешимо;
Б) если ранг $A$ меньше ранга $B$, то оба уравнения неразрешимы;
В) если матрица $A$ невырожденная, то уравнения (1) и (2) имеют более, чем по одному решению;
Г) если уравнения (1) и (2) разрешимы одновременно, то их решения $X$ и $Y$ — квадратные матрицы.

**18. Укажите верное утверждение:**
А) умножение квадратных матриц одного порядка коммутативно;
Б) умножение матриц ассоциативно;
В) сложение квадратных матриц одного порядка не ассоциативно;
Г) сложение квадратных матриц одного порядка не коммутативно.

**19. Укажите верное утверждение:**

А) при умножении матрицы на число ее ранг изменится на это число;

Б) ранг системы строк матрицы не всегда равен рангу системы столбцов этой же матрицы;

В) элементарные преобразования системы столбцов изменяют строчный ранг матрицы;

Г) если к одной из строк матрицы прибавить другую, умноженную на любое число, то ранг матрицы не изменится.

**20. Определители квадратной матрицы $A$ и транспонированной матрицы $A^T$:**

А) равны;

Б) имеют противоположный знак;

В) в произведении дают 1;

Г) в произведении дают –1.

**21. Определитель вырожденной матрицы равен:**

А) 1;

Б) –1;

В) 0;

Г) любому действительному числу.

**22. Определитель матрицы не изменится, если:**

А) к одной строке определителя прибавить его другую строку;

Б) две строки определителя поменять местами;

В) один из столбцов определителя умножить на 2;

Г) два столбца определителя поменять местами.

**23. Определитель диагональной матрицы равен:**

А) 0;

Б) произведению элементов ее главной диагонали;

В) сумме квадратов элементов этой матрицы;

Г) сумме элементов ее главной диагонали.

**24. Определитель треугольной матрицы равен:**

А) 0;

Б) 1;

В) произведению элементов ее главной диагонали;

Г) сумме элементов ее главной диагонали.

**25. При перестановке двух столбцов (строк) матрицы ее определитель:**

А) не изменяется;

Б) меняет знак;

В) становится равным нулю;

Г) увеличивается на 1.

**26. Если все элементы какой-либо строки (столбца) матрицы умножить на число $a \neq 0$, то определитель этой матрицы:**

А) не изменится;

Б) увеличится на $a$;

В) изменится в $a$ раз;

Г) станет равным нулю.

**27. Укажите верное утверждение.**

А) Для любых целых чисел $a$ и $b$ можно найти такие целые числа $q$ и $r$, что $a = bq + r$, причем $r < |b|$.

Б) Для любых целых чисел $a$ и $b$, $b \neq 0$, существует единственная пара целых чисел $(q, r)$ такая, что $a = bq + r$, причем $0 \leq r < |b|$.

В) Если $a = bq + r$, $q$ является неполным частным, а $r$ — остатком от деления целого числа $a$ на целое число $b$.

Г) Если $a < b$, то выполнить деление с остатком числа $a$ на число $b$ невозможно.

**28. Укажите верное утверждение о целых числах.**

А) Если каждое из слагаемых не делится на число $a$, то и сумма не делится на $a$.

Б) Если уменьшаемое и вычитаемое не делятся на число $a$, то и разность не делится на $a$.

В) Если каждый из сомножителей делится на число $a$, то и произведение делится на $a$.

Г) Если хотя бы один из сомножителей не делится на число $a$, то и произведение не делится на $a$.

**29. Если целое число $a$ делится на целое число $b$, то:**

А) $a > b$;

Б) $|a| > b$;

В) $|a| \geq |b|$;

Г) $|a| \geq |b|$ или $b = 0$.

**30. Укажите верное утверждение.**

А) Если $a = bq + r$, то НОД $(a, b) = r$.

Б) Если $a = bq + r$, то НОД $(a, b) =$ НОД $(q, r)$.

В) Если $a = bq + r$, то НОД $(a, b) = q$.

Г) Если $a = bq + r$, то НОД $(a, b) =$ НОД $(b, r)$.

**31. Укажите неверное утверждение о целых числах.**

А) Если $a = bm$, то НОД $(a, b) = m$.

Б) Если $a = bm$, то НОД $(a, b) = b$.

В) Если НОД $(a, b) = b$, то $a \vdots b$.

Г) Если $a \vdots m$ и $b \vdots m$, то НОД $(a, b) \vdots m$.

**32. Укажите верное утверждение о взаимно простых числах $m$ и $n$.**

А) Если $am$ делится на $n$, то $a$ делится на $n$.

Б) Числа $m + n$ и $m - n$ взаимно просты.

В) Числа $m + 1$ и $n + 1$ взаимно просты.

Г) Если $am$ делится на $bn$, то $a$ делится на $n$ и $m$ делится на $b$.

**33. Укажите неверное утверждение относительно взаимно простых чисел $m$ и $n$.**

А) Если $a \vdots m$ и $a \vdots n$, то $a \vdots mn$.

Б) Число $m + an$ при любом целом $a$ взаимно просто с $n$.

В) Взаимно простые числа не имеют наибольшего общего делителя.

Г) НОД $(am, n)$ = НОД $(a, n)$.

**34. Укажите неверное утверждение.**

А) Числовые сравнения можно почленно складывать.

Б) Числовые сравнения можно почленно вычитать.

В) Числовые сравнения можно почленно делить.

Г) Числовые сравнения можно почленно умножать.

**35. Укажите неверное утверждение.**

А) Число, кратное модулю, можно прибавлять к любой части сравнения.

Б) Число, кратное модулю, можно вычитать из любой части сравнения.

В) Модуль сравнения можно заменить любым его делителем.

Г) Модуль сравнения можно заменить любым его кратным.

**36. Укажите верное утверждение.**

А) Если $a \equiv b \pmod m$ и $a \equiv b \pmod n$, то $a \equiv b \pmod{mn}$.

Б) Если НОД $(m, n) = 1$, $a \equiv b \pmod m$, $a \equiv b \pmod n$, то $a \equiv b \pmod{mn}$.

В) Если $a \equiv b \pmod m$ и $c \equiv d \pmod n$, то $ac \equiv bd \pmod{mn}$.

Г) Если $a \equiv b \pmod m$ и $b \equiv c \pmod n$, то $a \equiv c \pmod{mn}$.

37. Пусть НОД$(a, в) = d$, НОК$(a, в) = m$. Укажите верное равенство:

А) $\dfrac{a}{в} = \dfrac{m}{d}$;

Б) $\dfrac{m}{a} = \dfrac{в}{d}$;

В) $\dfrac{m}{a} = \dfrac{d}{в}$;

Г) $\dfrac{m}{в} = \dfrac{d}{a}$.

**38. Пусть натуральное число $n$ представлено в каноническом виде $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_к^{\alpha_к}$. Тогда количество натуральных делителей числа $n$ равно**

А) $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_к$;

Б) $(\alpha_1 - 1) \cdot (\alpha_2 - 1) \cdots (\alpha_к - 1)$;

В) $(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_к + 1)$;

Г) $(2\alpha_1 - 1) \cdot (2\alpha_2 - 1) \cdots (2\alpha_к - 1)$.

**39. Пусть натуральное число $n$ представлено в каноническом виде $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_\kappa^{\alpha_\kappa}$. Тогда сумма натуральных делителей числа $n$ равна**

А) $p_1^{\alpha_1+1} \cdot p_2^{\alpha_2+1} \cdots p_\kappa^{\alpha_\kappa+1}$;

Б) $(p_1^{\alpha_1+1} - p_1^{\alpha_1}) \cdot (p_2^{\alpha_2+1} - p_2^{\alpha_2}) \cdots (p_\kappa^{\alpha_\kappa+1} - p_\kappa^{\alpha_\kappa})$;

В) $\prod_{i=1}^{k} \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}$;

Г) $\prod_{i=1}^{k} (p_i^{\alpha_i} - p_i^{\alpha_i - 1})$.

**40. Укажите верное утверждение.**

А) Каждая подходящая дробь с четным номером больше соседних дробей с нечетными номерами.

Б) Подходящие дроби с нечетными номерами образуют возрастающую последовательность.

В) Подходящие дроби с четными номерами образуют убывающую последовательность.

Г) Любая подходящая дробь с нечетным номером больше любой подходящей дроби с четным номером.

**41. Два числа $a$ и $в$ сравнимы по модулю $m$, если:**

А) $a + в$ делится на $m$;

Б) $a\, в$ делится на $m$;

В) $a - в$ делится на $m$;

Г) существует такое целое число $\kappa$, что $a = m\kappa - в$.

**42. Обе части сравнения можно сократить:**

А) на любой их общий делитель;

Б) на их наибольший общий делитель;

В) на их общий делитель, взаимно простой с модулем;

Г) на любое число.

**43. Приведенную систему вычетов по модулю $m$ образуют:**

А) любые $m$ попарно не сравнимых по модулю $m$ чисел;

Б) любые $\varphi(m)$ чисел;

В) любые $\varphi(m)$ попарно не сравнимых по модулю $m$ чисел;

Г) любые $\varphi(m)$ попарно не сравнимых по модулю $m$ чисел, которые взаимно просты с $m$.

**44. Если числа $a$ и $m$ взаимно просты, то**

А) $a^{\varphi(m)-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ m)$;

Б) $a^{\varphi(m)} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ m)$;

В) $a^{m-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ m)$;

Г) $a^{\varphi(m-1)} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ m)$

**45. Сравнение $ax \equiv в (\mathrm{mod}\, m)$ имеет одно решение в классах вычетов по модулю $m$, если:**

А) НОД($a$, $в$) = 1; В) НОД ($a$, $в$) > 1;
Б) НОД ($a$, $m$) = 1; Г) НОД ($a$, $m$) > 1.

**46. Укажите верное утверждение.**
А) Порядок числа $a$ по модулю $m$ является делителем числа $\varphi(m)$.
Б) Порядок числа $a$ по модулю $m$ является делителем числа $\varphi(a)$.
В) Порядок числа $a$ по модулю $m$ является делителем числа $m$.
Г) Порядок числа $a$ по модулю $m$ является делителем числа $a$.

## Тема 4. Логика. Множества. Основные алгебраические структуры

**1. Формула $p \vee \neg q \to p \wedge q$:**
А) при $p$ = Л, $q$ = И принимает значение Л;
Б) при $p$ = И, $q$ = Л принимает значение И;
В) при $p$ = И, $q$ = И принимает значение Л;
Г) при $p$ = Л, $q$ = Л принимает значение Л.

**2. Формула $p \wedge q \to q \vee \neg p$:**
А) является тождественно истинной;
Б) не является тождественно истинной, поскольку при $p$ = И, $q$ = Л она принимает значение Л;
В) не является тождественно истинной, поскольку при $p$ = Л, $q$ = И она принимает значение Л;
Г) не является тождественно истинной, поскольку при $p$ = Л, $q$ = Л она принимает значение Л.

**3. Предложение «Уравнение $a\,x = 5$ имеет корень»:**
А) является двуместным предикатом;
Б) является высказыванием;
В) является одноместным предикатом;
Г) не является предикатом, поскольку уравнение $0\,x = 5$ не имеет корней.

**4. Высказывание $(\exists x)(\forall y)\,P(x, y)$:**
А) является истинным, если $P(x, y)$ означает предикат «$x^2 + y^2 < 1$»;
Б) не является истинным, если $P(x, y)$ означает предикат «$x^2 + y^2 > 1$»;
В) не является истинным, если $P(x, y)$ означает предикат «$x + y > 1$»;
Г) является истинным, если $P(x, y)$ означает предикат «$x + y < 1$».

**5. Высказывание $(\exists a)(\forall x)$ P$(a, x)$:**

А) не является истинным, если Р$(a, x)$ означает предикат «целое число $a$ делится на целое число $x$»;

Б) является истинным, если Р$(a, x)$ означает предикат «целое число $x$ кратно целому числу $a$»;

В) не является истинным, если Р$(a, x)$ означает предикат «натуральное число $a$ не меньше натурального числа $x$»;

Г) является истинным, если Р$(a, x)$ означает предикат «натуральное число $a$ меньше натурального числа $x$».

**6. Укажите истинное утверждение:**

А) для того, чтобы число делилось на 4, необходимо и достаточно, чтобы оно оканчивалось четной цифрой;

Б) для того, чтобы число делилось на 4, достаточно, но не необходимо, чтобы оно оканчивалось четной цифрой;

В) для того, чтобы число делилось на 4, необходимо, но не достаточно, чтобы оно оканчивалось четной цифрой;

Г) для того, чтобы число делилось на 3, необходимо, чтобы оно оканчивалось нечетной цифрой.

**7. Если $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, то:**

А) $A \cup B = \{1, 3, 5\}$;

Б) $A \cup B = \{7, 9\}$;

В) $A \cup B = \{1, 3, 5, 7, 9, 2, 4\}$;

Г) $A \cup B = \{2, 4\}$.

**8. Если $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, то:**

А) $A \cap B = \{1, 3, 5\}$;

Б) $A \cap B = \{7, 9\}$;

В) $A \cap B = \{1, 3, 5, 7, 9, 2, 4\}$;

Г) $A \cap B = \{2, 4\}$.

**9. Если $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, то:**

А) $A \setminus B = \{1, 3, 5\}$;
Б) $A \setminus B = \{7, 9\}$;
В) $A \setminus B = \{1, 3, 5, 7, 9, 2, 4\}$;
Г) $A \setminus B = \{2, 4\}$.

**10. Если $A = \{3, 5\}$, $B = \{2, 4\}$, то:**

А) $A \times B = \{6, 10, 12, 20\}$;
Б) $A \times B = \{6, 20\}$;
В) $A \times B = \{(2; 3), (2; 5), (3; 4), (4; 5)\}$;
Г) $A \times B = \{(3; 2), (3; 4), (5; 2), (5; 4)\}$.

**11. Натуральных чисел, меньших 1000, которые делятся на 23 и не делятся на 29, всего:**
А) 42; Б) 43; В) 34; Г) 33.

**12. Если $\rho = \{(x; y) \in A^2 \mid x = y + 3\}$ — бинарное отношение на множестве $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, то:**
А) $\rho$ — функциональное отношение;
Б) $\rho$ — биекция множества $A$ на себя;
В) $A$ — область определения отношения $\rho$;
Г) $A$ — множество значений отношения $\rho$.

**13. Если $\rho = \{(x; y) \in A^2 \mid x = y^2\}$ — бинарное отношение на множестве $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, то:**
А) $\rho$ — рефлексивное бинарное отношение;
Б) $\rho$ — антирефлексивное бинарное отношение;
В) $\rho$ — симметричное бинарное отношение;
Г) $\rho$ — антисимметричное бинарное отношение.

**14. Если $\rho = \{(x; y) \in A^2 \mid x = y + 2\}$ — бинарное отношение на множестве $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, то:**
А) $\rho$ — рефлексивное бинарное отношение;
Б) $\rho$ — антирефлексивное бинарное отношение;
В) бинарное отношение $\rho$ не является рефлексивным и не является антирефлексивным;
Г) $\rho$ — симметричное бинарное отношение.

**15. Если $\rho$ — отношение подобия на множестве всех прямоугольников, то:**
А) $\rho$ — функциональное бинарное отношение;
Б) $\rho$ не является рефлексивным и не является антирефлексивным;
В) $\rho$ не является симметричным и не является антисимметричным;
Г) $\rho$ — транзитивное бинарное отношение.

**16. Если $\rho = \{(m; n) \in A^2 \mid m \,\vdots\, n\}$ — бинарное отношение на множестве $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, то:**
А) $\rho$ — функциональное бинарное отношение;

Б) ρ — антирефлексивное бинарное отношение;
В) ρ — антисимметричное бинарное отношение;
Г) ρ — отношение порядка.

**17. Если $\rho = \{(m; n) \in \mathbb{Z}^2 \mid m - n \vdots 3\}$ — бинарное отношение на множестве $\mathbb{Z}$ целых чисел, то:**

А) ρ — функциональное бинарное отношение;
Б) ρ — отношение эквивалентности;
В) ρ — отношение порядка;
Г) ρ не является симметричным и не является антисимметричным.

**18. Если $\rho = \{(m; n) \in \mathbb{Z}^2 \mid m - n \vdots 3\}$ — бинарное отношение на множестве $\mathbb{Z}$ целых чисел, то:**

А) ρ — отношение нестрогого линейного порядка;
Б) ρ — отображение множества $\mathbb{Z}$ на себя;
В) отношение ρ разбивает множество $\mathbb{Z}$ на три класса эквивалентности;
Г) отношение ρ разбивает множество $\mathbb{Z}$ на $3^2$ классов эквивалентности.

**19. Если $\rho = \{(m; n) \in \mathbb{Z}^2 \mid n = m^3\}$ — бинарное отношение на множестве $\mathbb{Z}$ целых чисел, то:**

А) ρ — отношение эквивалентности;
Б) ρ — сюрьективное отображение множества $\mathbb{Z}$ на себя;
В) ρ — инъективное отображение множества $\mathbb{Z}$ в себя;
Г) ρ разбивает множество $\mathbb{Z}$ на пять классов эквивалентности, поскольку $(-1)^3 = -1$, $0^3 = 0$, $1^3 = 1$, $a^3 < a$ при $a < -1$ и $b^3 > b$ при $b > 1$.

**20. Укажите ложное утверждение о бинарном отношении $\rho = \{(x; y) \in A^2 \mid x + y = 10\}$ —на множестве $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.**
А) ρ — симметричное бинарное отношение.
Б) ρ — функциональное отношение.
В) ρ — биекция множества $A$ на себя.
Г) ρ разбивает множество $A$ на пять классов эквивалентности.

**21. Какие из следующих отображений задают на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел бинарную операцию?**

А) $(m; n) \mapsto 2m - n$.

Б) $(m; n) \mapsto 2m + n$.

В) $(m; n) \mapsto m^2 - n$.

Г) $(m; n) \mapsto 0{,}5\, m + 0{,}2\, n$.

**22. Какие из следующих бинарных операций на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел являются ассоциативными?**

А) $m * n = 2mn$.

Б) $m * n = 2m + n$.

В) $m * n = m^2 + n$.

Г) $m * n = m^2 + n^2$.

**23. Какие из следующих бинарных операций на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел являются коммутативными?**

А) $m * n = m^n$.

Б) $m * n = 2m + n$.

В) $m * n = m^2 + n$.

Г) $m * n = m^2 + n^2$.

**24. Какие из следующих бинарных операций на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел имеют правый нейтральный элемент?**

А) $m * n = m^n$.

Б) $m * n = 2m + n$.

В) $m * n = m^2 + n$.

Г) $m * n = m^2 + n^2$.

**25. Какие из следующих бинарных операций на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел имеют левый нейтральный элемент?**

А) $m * n = 2m + n$.

Б) $m * n = \text{НОК}\,(m, n)$.

В) $m * n = m^2 + n$.

Г) $m * n = m^2 + n^2$.

**26. Какие из следующих бинарных операций на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел имеют двусторонний нейтральный элемент?**

А) $m * n = m^n$.

Б) $m * n = 2m + n$.

В) $m * n =$ НОК $(m, n)$.

Г) $m * n = m^2 + n^2$.

**27. Укажите неверное утверждение относительно алгебры $\langle M_2(\mathbb{R}), *\rangle$ матриц второго порядка с действительными элементами и операцией умножения матриц.**

А) $\langle M_2(\mathbb{R}), *\rangle$ — полугруппа.

Б) $\langle M_2(\mathbb{R}), *\rangle$ — полугруппа с нейтральным элементом.

В) $\langle M_2(\mathbb{R}), *\rangle$ — коммутативная полугруппа с нейтральным элементом.

Г) В алгебре $\langle M_2(\mathbb{R}), *\rangle$ не все элементы обратимы.

**28. Укажите неверное утверждение относительно алгебры $\langle \mathbb{R}, \cdot\rangle$ действительных чисел с операцией умножения.**

А) $\langle \mathbb{R}, \cdot\rangle$ — полугруппа.

Б) $\langle \mathbb{R}, \cdot\rangle$ — полугруппа с нейтральным элементом.

В) $\langle \mathbb{R}, \cdot\rangle$ — коммутативная полугруппа с нейтральным элементом.

Г) В алгебре $\langle \mathbb{R}, \cdot\rangle$ все элементы обратимы.

**29. Укажите алгебру, которая не является группой.**

А) $\langle M_2(\mathbb{R}), +\rangle$.

Б) $\langle M_2(\mathbb{R}), \cdot\rangle$.

В) $\langle \mathbb{R}_+, \cdot\rangle$.

Г) $\langle \mathbb{Z}, +\rangle$.

**30. Укажите верное утверждение.**

А) $\langle \mathbb{R}_+, \cdot\rangle$ — подгруппа в группе $\langle \mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot\rangle$.

Б) $\langle \mathbb{R}_-, \cdot\rangle$ — подгруппа в группе $\langle \mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot\rangle$.

В) $\langle \mathbb{Z}, \cdot\rangle$ — подгруппа в группе $\langle \mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot\rangle$.

Г) $\langle \mathbb{Z}, +\rangle$ — подгруппа в группе $\langle \mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot\rangle$.

**31. Укажите неверное утверждение относительно алгебры $\langle\left\{ a + b\sqrt{3} \mid a, b \in Q \right\}, +, \cdot\rangle$ с операциями сложения и умножения.**

А) Алгебра $\langle\left\{ a + b\sqrt{3} \mid a, b \in Q \right\}, +, \cdot\rangle$ — коммутативное кольцо.

Б) Алгебра $\langle\left\{ a + b\sqrt{3} \mid a, b \in Q \right\}, +, \cdot\rangle$ — поле.

В) Алгебра $\langle\left\{ a + b\sqrt{3} \mid a, b \in Q \right\}, +, \cdot\rangle$ — подполе в поле $\langle \mathbb{R}, +, \cdot\rangle$.

Г) Алгебра $\langle\left\{ a + b\sqrt{3} \mid a, b \in Q \right\}, +, \cdot\rangle$ — кольцо с делителями нуля.

**32. Укажите верное утверждение относительно множества $M = \left\{ a + b\sqrt[3]{2} \mid a, b \in Q \right\}$.**

А) Алгебра $\langle M, +, \cdot\rangle$ — коммутативное кольцо.

Б) Алгебра $\langle M, +\rangle$ — группа.

В) Алгебра $\langle M, +, \cdot\rangle$ — поле.

Г) Алгебра $\langle M, +, \cdot\rangle$ — подполе поля действительных чисел.

**33. Укажите верное утверждение относительно множества $M = \left\{ a + b\sqrt[3]{5} \mid a, b \in Q \right\}$.**

А) Алгебра $\langle M, +, \cdot\rangle$ — коммутативное кольцо с единицей.

Б) Алгебра $\langle M, +, \cdot\rangle$ — поле.

В) Алгебра $\langle M, +, \cdot\rangle$ — подполе поля $\mathbb{C}$ комплексных чисел.

Г) Алгебра $\langle M, +\rangle$ — коммутативная группа.

**34. Укажите верное утверждение относительно множества $\mathbb{R}_+$ положительных действительных чисел.**

А) Алгебра $\langle \mathbb{R}_+, +\rangle$ — коммутативная группа.

Б) Алгебра $\langle \mathbb{R}_+, \cdot\rangle$ — коммутативная группа.

В) Алгебра $\langle \mathbb{R}_+, +, \cdot\rangle$ — коммутативное кольцо.

Г) Алгебра $\langle \mathbb{R}_+, +, \cdot\rangle$ — поле.

**35. Укажите неверное утверждение.**

А) Множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел образует подполе в поле $\mathbb{R}$ действительных чисел.

Б) Множество всех иррациональных чисел образует подполе в поле $\mathbb{R}$ действительных чисел.

В) Множество $\mathbb{Z}$ целых чисел образует подкольцо в поле $\mathbb{R}$ действительных чисел.

Г) Множество $\left\{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in Q\right\}$ является подполем в поле $\mathbb{R}$ действительных чисел.

**36. Укажите верное утверждение.**

А) Если $f$ — изоморфизм поля $\mathbb{Q}$ рациональных чисел на себя, то $f$ — тождественное преобразование.

Б) Отображение $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $x \mapsto |x|$ является изоморфизмом поля $\mathbb{R}$ действительных чисел на себя.

В) Отображение $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $x \mapsto 2x$ является изоморфизмом поля $\mathbb{R}$ действительных чисел на себя.

Г) Отображение $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $x \mapsto -2x$ является изоморфизмом поля $\mathbb{R}$ действительных чисел на себя.

**37. Укажите верное утверждение.**

А) Отображение $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$: $x \mapsto -2x$ является изоморфизмом полей.

Б) Отображение $f: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$: $x \mapsto |x|$ является изоморфизмом полей.

В) Отображение $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$: $x \mapsto 2x$ является изоморфизмом полей.

Г) Отображение $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$: $x \mapsto \bar{x}$ является изоморфизмом полей.

**38. Укажите верное утверждение.**

А) Отображение $f: \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$: $x \mapsto |x|$ является гомоморфизмом аддитивных групп.

Б) Отображение $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}_+$: $x \mapsto |x|$ является гомоморфизмом мультипликативных групп.

В) Отображение $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}: x \mapsto x + 5$ является гомоморфизмом аддитивных групп.

Г) Отображение $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}: x \mapsto 2x$ является гомоморфизмом мультипликативных групп.

**39. Укажите верное утверждение относительно алгебры $\langle \{ a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{R} \}, +, \cdot \rangle$ с операциями сложения и умножения.**

А) Алгебра $\langle \{ a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{R} \}, +, \cdot \rangle$ — коммутативное кольцо с единицей и без делителей нуля.

Б) Алгебра $\langle \{ a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{R} \}, +, \cdot \rangle$ — кольцо с делителями нуля.

В) Алгебра $\langle \{ a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{R} \}, +, \cdot \rangle$ — поле.

Г) Алгебра $\langle \{ a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{R} \}, +, \cdot \rangle$ — подполе в поле $\langle \mathbb{C}, +, \cdot \rangle$.

**40. Укажите неверное утверждение.**

А) Фактор-группа $\langle \mathbb{Z} / 2\mathbb{Z}, + \rangle$ состоит из двух элементов.

Б) Фактор-кольцо $\langle \mathbb{Z} / 3\mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ является полем.

В) Фактор-кольцо $\langle \mathbb{Z} / 4\mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ не содержит делителей нуля.

Г) В фактор-кольце $\langle \mathbb{Z} / 5\mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ верно равенство $\bar{1} \cdot \bar{2} + \bar{2} \cdot \bar{3} + \bar{3} \cdot \bar{4} = \bar{0}$.

# Тема 5. Системы линейных уравнений и арифметические векторы

**1. Сколько решений имеет система уравнений** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 8 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases}$ **?**

А) Система имеет единственное решение.
Б) Система имеет три решения.
В) Система имеет бесконечное множество решений.
Г) Система несовместна.

**2. Сколько решений имеет система уравнений** $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 6x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6 \\ 9x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 9 \end{cases}$**?**

А) Система имеет единственное решение.
Б) Система имеет три решения.
В) Система имеет бесконечное множество решений.
Г) Система несовместна.

**3. Матрица системы линейных уравнений имеет вид** $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$**. Укажите верное утверждение.**

А) Система приведена к ступенчатому виду.
Б) Система совместна и определена.
В) Система несовместна.
Г) Четвертое уравнение системы противоречиво.

**4. Матрица системы линейных уравнений имеет вид** $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$**. Укажите верное утверждение.**

А) Система не приведена к ступенчатому виду.
Б) Система совместна и определена.
В) Система несовместна.
Г) Четвертое уравнение системы противоречиво.

**5. Матрица системы линейных уравнений имеет вид** $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right)$**. Укажите верное утверждение.**

А) Система имеет единственное решение (1, 1, 1, 1).
Б) Система имеет три главных и одно свободное неизвестное.
В) Система неопределенна, ее решение зависит от двух свободных неизвестных.
Г) Система приведена к треугольному виду и поэтому имеет единственное решение.

**6. Матрица системы линейных уравнений имеет вид** $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 5 \end{array}\right)$**. Укажите верное утверждение.**

А) Система имеет три главных и одно свободное неизвестное.
Б) Система неопределенна, ее решение зависит от двух свободных неизвестных.
В) Система имеет единственное решение (1, 1, 1, 1).
Г) Система приведена к треугольному виду и поэтому имеет единственное решение.

**7. Матрица системы линейных уравнений имеет вид** $\left(\begin{array}{cccc|c} a+2 & a & 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & a-2 \end{array}\right)$**. Укажите верное утверждение.**

А) При любом значении $a$ система совместна.
Б) При любом $a \neq 0$ система совместна.
В) При любом значении $a$ система несовместна.
Г) При любом $a \neq 1$ система совместна и неопределена.

**8. Расширенная матрица системы линейных уравнений имеет вид** $\left(\begin{array}{cccc|c} a-2 & 2a & 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & -4+a & 0 & a+3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 6 \end{array}\right)$**. Укажите верное утверждение.**

А) При любом значении $a$ система совместна.
Б) При любом $a \neq 0$ система совместна.
В) При любом $a \neq 4$ система совместна и неопределенная.
Г) При любом значении $a$ система несовместна.

**9. Укажите неверное утверждение относительно системы однородных уравнений, матрица которой имеет вид** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$**.**

А) Система совместна, неопределенная, имеет множество решений:
$M = \left\{ \left( \frac{x_4}{2}, 2x_4, -x_4, x_4 \right) \middle| x_4 \in R \right\}$.
Б) Все решения системы пропорциональны.
В) Существует хотя бы два непропорциональных решения системы.
Г) Система совместна, неопределенная, имеет множество решений:
$M = \{(x_1, 4x_1, -2x_1, x_1) | x_1 \in R\}$.

**10. Укажите неверное утверждение относительно системы линейных уравнений, матрица которой имеет вид** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \\ 9 & 3 & 6 \end{array}\right)$.

А) Система совместна и имеет конечное множество решений.
Б) Система совместна и имеет бесконечное множество решений.
В) Система несовместна.
Г) Система имеет единственное решение.

**11. Для системы линейных уравнений, заданной матрицей** $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right)$**, решением является набор чисел:**

А) (2, 4, 1);
Б) (1, 2, 4);
В) (4, 2, 1);
Г) (4, 1, 2).

**12. Две системы линейных уравнений заданы матрицами** $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right)$ **и** $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{array}\right)$**. Укажите верное высказывание.**

А) Системы равносильны.
Б) Системы несовместны.
В) Системы не равносильны.
Г) Ранг основной матрицы первой системы меньше ранга основной матрицы второй системы.

**13. Тройка чисел (2, 0, –1) является решением системы:**

А) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right)$;

Б) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 & 2 \\ 6 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right)$;

В) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right)$;

Г) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right)$.

**14. Тройка чисел (1, –1, 2) является решением системы:**

А) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & -4 \end{array}\right)$;

В) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & 1 & -2 \end{array}\right)$;

Б) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)$;  Г) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right)$.

**15. Укажите верное утверждение относительно системы линейных уравнений, матрица которой имеет вид $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \\ -6 & 0 & 1 \end{array}\right)$.**

А) Система совместна и имеет единственное решение $(0, \frac{1}{2})$.
Б) Система совместна и имеет бесконечное множество решений.
В) Система несовместна.
Г) Система имеет единственное решение (0, 0).

**16. Система линейных уравнений задана матрицей $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right)$.**

**Укажите верное высказывание.**
А) Набор (–1, 2, 1) является решением системы.
Б) Система имеет два решения (–1, 2, 1) и (3, 0, 6).
В) Система несовместна.
Г) Набор (1, 1, 2) является решением системы.

**17. Укажите систему линейных уравнений, не равносильную системе $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & 6 & 4 \end{array}\right)$:**

А) $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{array}\right)$;  В) $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{array}\right)$;

Б) $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 5 \end{array}\right)$;  Г) $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{array}\right)$.

**18. Система *n* линейных однородных уравнений с *n* неизвестными имеет ненулевые решения, если:**
А) ее основная матрица вырожденная;
Б) ее основная матрица невырожденная;
В) определитель ее основной матрицы равен 1;

Г) определитель ее основной матрицы больше 0.

**19. Общее решение системы линейных однородных уравнений содержит 3 главных и 2 свободных неизвестных. Укажите верное утверждение.**

А) Фундаментальный набор состоит из трех решений.

Б) Фундаментальный набор состоит из двух решений.

В) Всякая система из трех решений линейно независима.

Г) Всякая система из двух решений линейно независима.

**20. Фундаментальный набор решений линейной однородной системы из пяти уравнений с четырьмя неизвестными содержит три решения. Укажите неверное утверждение.**

А) Система векторов-строк матрицы этой системы уравнений линейно зависима.

Б) Ранг матрицы этой системы равен 1.

В) Ранг системы векторов-столбцов этой системы равен 2.

Г) Всякая система из четырех решений линейно зависима.

**21. Система линейных однородных уравнений имеет 2 главных и 3 свободных неизвестных. Укажите верное утверждение.**

А) Фундаментальный набор решений содержит 2 решения.

Б) Ранг матрицы этой системы равен 3.

В) Фундаментальный набор решений содержит 3 решения.

Г) Система векторов-строк этой системы линейно независима.

**22. Базис системы векторов $\overrightarrow{a_1} = (1; 2; 3)$, $\overrightarrow{a_2} = (4; 5; 6)$, $\overrightarrow{a_3} = (7; 8; 9)$ образуют векторы:**

А) $\overrightarrow{a_1}$;

Б) $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$;

В) $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$;

Г) $\overrightarrow{a_3}$.

**23. Ранг системы векторов $\overrightarrow{a_1} = (1; 2; 3)$, $\overrightarrow{a_2} = (4; 5; 6)$, $\overrightarrow{a_3} = (7; 8; 9)$ равен:**

А) 1;

Б) 2;

В) 3;

Г) 0.

**24. Даны векторы $\vec{a} = (3; -2; 6)$ и $\vec{b} = (-2; 1; 0)$. Найдите вектор $2 \cdot \vec{a} + 3 \cdot \vec{b}$.**

А) (0; 1; –12);

Б) (–6; –2; 0);

В) (0; –1; 12);

Г) (–36; –12; 0).

**25. Даны векторы $\vec{a} = (-1; 4; 5)$ и $\vec{b} = (4; -4; 2)$. Найдите вектор $3 \cdot \vec{a} - 2 \cdot \vec{b}$.**

А) (–11; 20; 11);
Б) (7; 0; 19);
В) (1; 0; 1);
Г) (1; –4; 3).

**26. Даны векторы $\vec{a} = (-3; 3; 1)$ и $\vec{b} = (2; 4; -1)$. Найдите вектор $\vec{a} - 3 \cdot \vec{b}$.**

А) (–9; –9; –2);
Б) (–9; –9; 4);
В) (9; 9; –4);
Г) (–1; 7; 0).

**27. Даны векторы $\vec{a} = (0; -3; 4)$ и $\vec{b} = (2; 2; -3)$. Найдите вектор $2 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b}$.**

А) (0; –6; 8);
Б) (–4; –1; 2);
В) (4; 1; –2);
Г) (4; 4; –6).

**28. Даны векторы $\vec{a} = (4; 0; -6)$ и $\vec{b} = (3; -2; 1)$. Найдите вектор $2 \cdot \vec{a} - 3 \cdot \vec{b}$.**

А) (1; 2; –7);
Б) (1; –6; 15);
В) (7; –2; –5);
Г) (–1; 6; –15).

**29. Даны векторы $\vec{a} = (5; 2; -1)$ и $\vec{b} = (2; 1; -2)$. Найдите вектор $\vec{a} - 2 \cdot \vec{b}$.**

А) (1; 0; 3);
Б) (–1; 0; –3);
В) (7; 3; –3);
Г) (3; 1; 1).

**30. Базис системы векторов $\overrightarrow{a_1} = (1; -1; 2)$, $\overrightarrow{a_2} = (2; 0; 1)$, $\overrightarrow{a_3} = (-1; -3; 4)$ образуют векторы:**

А) $\overrightarrow{a_1}$;
Б) $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$;
В) $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$;
Г) $\overrightarrow{a_3}$.

**31. Базис системы векторов $\overrightarrow{a_1} = (-1; 1; 1)$, $\overrightarrow{a_2} = (3; 1; -3)$, $\overrightarrow{a_3} = (0; 1; 0)$ образуют векторы:**

А) $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_3}$;
Б) $\overrightarrow{a_1}$;
В) $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$;
Г) $\overrightarrow{a_2}$.

**32. Базис системы векторов $\overrightarrow{a_1} = (2; 1; -4; -1)$, $\overrightarrow{a_2} = (1; 3; -7; 2)$, $\overrightarrow{a_3} = (1; 1; -3; 0)$, $\overrightarrow{a_4} = (3; 1; -1; -4)$ образуют векторы:**

А) $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_4}$;
В) $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$, $\overrightarrow{a_4}$;

Б) $\overrightarrow{a_1}$;  Г) $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$.

**33. Базис системы векторов $\overrightarrow{a_1} = (2; 3; 1; -1)$, $\overrightarrow{a_2} = (3; 1; 4; 2)$, $\overrightarrow{a_3} = (1; 2; 3; -1)$, $\overrightarrow{a_4} = (1; -1; -7; 5)$ образуют векторы:**

А) $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_4}$;  В) $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$, $\overrightarrow{a_4}$;
Б) $\overrightarrow{a_3}$, $\overrightarrow{a_4}$;  Г) $\overrightarrow{a_2}$.

**34. Ранг системы векторов $\overrightarrow{a_1} = (1; -1; 2)$, $\overrightarrow{a_2} = (2; 0; 1)$, $\overrightarrow{a_3} = (-1; -3;4)$ равен:**

А) 0;  В) 2;
Б) 1;  Г) 3.

**35. Ранг системы векторов $\overrightarrow{a_1} = (-1; 1; 1)$, $\overrightarrow{a_2} = (3; 1; -3)$, $\overrightarrow{a_3} = (0; 1; 0)$ равен:**

А) 2;  В) 0;
Б) 3;  Г) 1.

**36. Ранг системы векторов $\overrightarrow{a_1} = (2; 1; -4; -1)$, $\overrightarrow{a_2} = (1; 3; -7; 2)$, $\overrightarrow{a_3} = (1; 1; -3; 0)$, $\overrightarrow{a_4} = (3; 1; -1; -4)$ равен:**

А) 1;  В) 3;
Б) 2;  Г) 0.

**37. Ранг системы векторов $\overrightarrow{a_1} = (1; 1; 1; 1)$, $\overrightarrow{a_2} = (2; 0; 1; -1)$, $\overrightarrow{a_3} = (3; -4; 0; -1)$, $\overrightarrow{a_4} = (13; -10; 3; -2)$ равен:**

А) 0;  В) 2;
Б) 1;  Г) 3.

**38. Базис системы векторов $\overrightarrow{a_1} = (1; 1; 1; 1)$, $\overrightarrow{a_2} = (2; 0; 1; -1)$, $\overrightarrow{a_3} = (3; -4; 0; -1)$, $\overrightarrow{a_4} = (13; -10; 3; -2)$ образуют вектора:**

А) $\overrightarrow{a_1}$;  В) $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$;
Б) $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$;  Г) $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$, $\overrightarrow{a_4}$.

**39. Ранг системы векторов $\overrightarrow{a_1} = (2; 3; 1; -1)$, $\overrightarrow{a_2} = (3; 1; 4; 2)$, $\overrightarrow{a_3} = (1; 2; 3; -1)$, $\overrightarrow{a_4} = (1; -1; -7; 5)$ равен:**

А) 1;  В) 3;
Б) 4;  Г) 2.

**40. Базис системы векторов $\overrightarrow{a_1}=(1;-2;3)$, $\overrightarrow{a_2}=(2;-1;1)$, $\overrightarrow{a_3}=(-6;0;2)$ образуют векторы:**

А) $\overrightarrow{a_1}$;

Б) $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$;

В) $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$;

Г) $\overrightarrow{a_3}$.

**41. Ранг системы векторов $\overrightarrow{a_1}=(1;-2;3)$, $\overrightarrow{a_2}=(2;-1;1)$, $\overrightarrow{a_3}=(-6;0;2)$ равен:**

А) 1;

Б) 3;

В) 0;

Г) 2.

## Тема 6. Матрицы и определители

**1. Найдите ранг матрицы** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 4 & 3 \\ -3 & -9 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

А) 3;

Б) 4;

В) 1;

Г) 2.

**2. Найдите произведение матрицы** $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ **на матрицу** $B=\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

А) $\begin{pmatrix} 3 & -25 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$;

Б) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -25 & 4 \end{pmatrix}$;

В) $\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$;

Г) $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$.

**3. Найдите произведение матрицы** $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ **на матрицу** $B=\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

А) $\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 9 & -4 \end{pmatrix}$;

Б) $\begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 2 & 17 \end{pmatrix}$;

В) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 11 & 17 \end{pmatrix}$;

Г) $\begin{pmatrix} 21 & -7 & 35 \\ 15 & -1 & 20 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

**4. Найдите сумму матриц** $A=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 2 & -4\\ -3 & 9\end{pmatrix}$ **и** $B=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 3 & 7\\ 8 & -11\end{pmatrix}$**.**

А) $\begin{pmatrix}-1 & 10\\ 5 & 3\\ 5 & -2\end{pmatrix}$;

Б) $\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & -11\\ -11 & 20\end{pmatrix}$;

В) $\begin{pmatrix}-1 & 5 & 5\\ 10 & 3 & -2\end{pmatrix}$;

Г) $\begin{pmatrix}7 & 2\\ -2 & 10\\ 6 & -3\end{pmatrix}$.

**5. Для матрицы** $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ **найдите обратную матрицу**

А) $\begin{pmatrix}-1 & \frac{1}{2}\\ 1 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$;

Б) $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$;

В) $\begin{pmatrix}-\frac{3}{5} & \frac{2}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$;

Г) $\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

**6. Вычислите** $2\cdot A$**, где** $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$**.**

А) $\begin{pmatrix}2 & 4\\ 6 & 8\end{pmatrix}$;

Б) $\begin{pmatrix}5 & 4\\ 6 & 11\end{pmatrix}$;

В) $\begin{pmatrix}2 & 7\\ 9 & 8\end{pmatrix}$;

Г) нельзя выполнить действия.

**7. Решите матричное уравнение** $\begin{pmatrix}5 & 4 & 3\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 2 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$**.**

А) $\begin{pmatrix}-4 & 2 & 4\\ 3 & -2 & -1\end{pmatrix}$;

Б) $\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 2 & -2\\ 4 & -1\end{pmatrix}$;

В) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$;

Г) нет решений.

**8. Решите матричное уравнение $X \cdot A = B$, где** $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 0 & -4 & 9 \end{pmatrix}$.

А) Нет решений;

Б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;

В) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

Г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

**9. Найдите сумму матриц** $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ **и** $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

А) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$;

Б) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$;

В) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 5 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

Г) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 4 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

**10. Для матрицы** $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ **найдите матрицу $A^T$.**

А) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} \\ -1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$;

Б) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$;

В) $\begin{pmatrix} -1 & 7 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$;

Г) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

**11. Найдите произведение матрицы** $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$ **на число –3.**

А) $\begin{pmatrix} -9 & 0 \\ -21 & 3 \end{pmatrix}$;

Б) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -21 & 3 \end{pmatrix}$;

В) $\begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$;

Г) $\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$.

**12. Для матрицы** $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ **найдите матрицу $A^T$.**

А) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$;

В) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$;

Б) $\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$;

Г) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

**13. Найдите матрицу, обратную для матрицы** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

А) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$;

В) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$;

Б) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$;

Г) $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

**14. Найдите сумму матриц** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ **и** $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

А) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$;

В) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

Б) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$;

Г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$.

**15. Для матрицы** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ **найдите матрицу** $A^T$.

А) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -4 \end{pmatrix}$;

В) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -4 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

Б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$;

Г) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

**16. Найдите произведение матрицы** $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **на матрицу** $B=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$**.**

А) $\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$;

Б) $\begin{pmatrix} -9 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$;

В) $\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$;

Г) нельзя выполнить действие.

**17. Найдите произведение матрицы** $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ **на число –2.**

А) $\begin{pmatrix} -4 & -8 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$;

Б) $\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$;

В) $\begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$;

Г) $\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

**18. Найдите разность матриц** $A=\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -5 & 2 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ **и** $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$**.**

А) $\begin{pmatrix} 0 & 10 \\ -10 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$;

Б) $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 0 & 0 \\ 13 & 7 \end{pmatrix}$;

В) $\begin{pmatrix} 0 & 10 & -10 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$;

Г) $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 0 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

**19. Найдите ранг матрицы** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & -6 \end{pmatrix}$**.**

А) 1;

Б) 2;

В) 3;

Г) 4.

**20. Найдите ранг матрицы** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

А) 1;
Б) 2;
В) 3;
Г) 4.

**21. Вычислите определитель** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 6 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

А) 0;
Б) –5;
В) 5;
Г) 71.

**22. Вычислите определитель** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 0 \end{vmatrix}$.

А) 0;
Б) 48;
В) 6;
Г) –24.

**23. Вычислите определитель** $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 9 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

А) –12;
Б) 12;
В) 20;
Г) –20.

**24. Найдите минор элемента $a_{41}$ определителя** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

А) 0;
Б) 4;
В) –7;
Г) 7.

**25. Найдите алгебраическое дополнение элемента $a_{41}$ определителя** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

А) 0;
Б) 4;
В) –7;
Г) 7.

**26. Вычислите определитель** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

А) 0;
Б) 3;
В) –21;
Г) 21.

**27. Вычислите определитель** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}$.

А) 4;
Б) 0;
В) –4;
Г) другой ответ.

**28. Вычислите определитель** $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

А) 0;
Б) 21;
В) 21;
Г) 14.

**29. Вычислите определитель** $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 & 14 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}$.

А) 0;
Б) 1;
В) 12;
Г) –12.

**30. Вычислите определитель** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

А) 0;
Б) 1;
В) –1;
Г) другой ответ.

**31. Вычислите определитель** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$.

А) 0;
Б) 1;
В) 5;
Г) 3.

**32. Найдите минор элемента $a_{32}$ определителя** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 3 & -3 \\ 0 & -4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

А) 0; В) 7;
Б) –7; Г) 5.

**33. Найдите алгебраическое дополнение элемента $a_{32}$ определителя** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 3 & -3 \\ 0 & -4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

А) –7; В) 0;
Б) 7; Г) 5.

**34. Найдите минор элемента $a_{23}$ определителя** $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 7 & 7 \\ -6 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 9 & 5 \\ 4 & 0 & 4 & 10 \end{vmatrix}$.

А) 0; В) 8;
Б) –8; Г) 4.

**35. Найдите алгебраическое дополнение элемента $a_{23}$ определителя** $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 7 & 7 \\ -6 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 9 & 5 \\ 4 & 0 & 4 & 10 \end{vmatrix}$.

А) 0; В) 4;
Б) –8; Г) 8.

**36. Найдите минор элемента $a_{44}$ определителя** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{vmatrix}$.

А) 12; В) –4;
Б) 0; Г) 4.

**37. Найдите алгебраическое дополнение элемента $a_{44}$ определителя**
$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{vmatrix}$.

А) 12; В) –12;
Б) 0; Г) 4.

**38. Найдите минор элемента $a_{23}$ определителя** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$.

А) 0; В) 3;
Б) –3; Г) 6.

**39. Найдите алгебраическое дополнение элемента $a_{23}$ определителя**
$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$.

А) 0; В) –3;
Б) 6; Г) 3.

**40. Вычислите определитель** $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

А) 0; В) 8;
Б) 1; Г) –3.

## Тема 7. Теория чисел

**1. Найдите частное и остаток при делении –134 на 26.**

А) –5 и –4; В) 5 и –4;
Б) –6 и 22; Г) –6 и –22.

**2. Если делимое и делитель увеличить в 3 раза, то:**

А) частное и остаток увеличатся в 3 раза;
Б) частное увеличится в 3 раза, остаток не изменится;
В) частное не изменится, остаток увеличится в 3 раза;

Г) частное и остаток не изменятся.

**3. Какие остатки при делении на 4 может давать квадрат натурального числа?**

А) 0, 1;
В) 0, 1, 3;
Б) 0, 1, 2;
Г) 0, 2, 3.

**4. Какие остатки при делении на 8 может давать квадрат нечетного числа?**

А) 5,7;
В) 1,3;
Б) 1;
Г) 1,3,7.

**5. При делении числа $x^5$ на 7 остаток равен 5. Чему равен остаток при делении на 7 числа $x$?**

А) 2;
В) 4;
Б) 3;
Г) 1.

**6. Найдите наибольший общий делитель чисел –3791 и 3281.**

А) 1;
В) 17;
Б) –51;
Г) 51.

**7. Найдите наибольший общий делитель чисел 420, 1155 и 630.**

А) 21;
В) 35;
Б) 5;
Г) 105.

**8. Найдите наименьшее общее кратное чисел 356, 1068, 1424.**

А) 356;
В) 4272;
Б) –356;
Г) 8544.

**9. При любом натуральном $n$ наибольший общий делитель чисел $n$ и $2n - 1$ равен:**

А) $n$;
В) 1;
Б) $n - 1$;
Г) $2n^2 - n$.

**10. Найдите разложение дроби $\frac{163}{159}$ в конечную цепную дробь.**

А) [1; 39, 1,3];
В) [1; 4, 3, 1, 1];
Б) [4; 3, 1, 1];
Г) [4; 3, 1 , 3].

**11. Найдите предпоследнюю подходящую дробь при разложении дроби $\frac{163}{159}$ в конечную цепную дробь**

А) $\frac{40}{39}$;

Б) $\frac{41}{40}$;

В) $\frac{39}{40}$;

Г) $\frac{40}{41}$.

**12. Какой остаток может получиться при делении простого числа $p \geq 5$ на 6?**

А) 3;

Б) 3, 5;

В) 1, 3;

Г) 1, 5.

**13. Выясните, какие из чисел 2657, 2665, 2667 являются простыми.**

А) 2667, 2657;

Б) все числа составные;

В) 2657, 2665;

Г) 2657.

**14. Найдите показатель, с которым число 7 входит в разложение числа 200!**

А) 28;

Б) 32;

В) 29;

Г) 30.

**15. Укажите, сколькими нулями оканчивается число 122!**

А) 24;

Б) 28;

В) 30;

Г) 32.

**16. Найдите количество натуральных делителей числа 1542.**

А) 8;

Б) 4;

В) 6;

Г) 10.

**17. Найдите сумму натуральных делителей числа 360.**

А) 720;

Б) 360;

В) 780;

Г) 1170.

**18. Запишите число 729 в системе счисления с основанием 7.**

А) $2242_{(7)}$;

Б) $1341_{(7)}$;

В) $2061_{(7)}$;

Г) $1410_{(7)}$.

**19. Найдите количество натуральных чисел, меньших 2006, которые не делятся ни на 13, ни на 19.**

А) 1753;

Б) 1754;

В) 1746;

Г) нет правильного ответа.

**20. Известно, что некоторое натуральное число при делении на 5 дает остаток 2, а при делении на 3 – остаток 1. Найдите остаток от деления этого числа на 15.**

А) 3; В) 11;
Б) 7; Г) 13.

**21. Найдите остаток при делении $15^{231}$ на 16.**
А) 1; В) 15;
Б) –1; Г) –15.

**22. Найдите последнюю цифру числа $2^{341}$.**
А) 2; В) 6;
Б) 4; Г) 8.

**23. Найдите наименьший по абсолютной величине вычет числа 484 по модулю 15.**
А) –11; В) –4;
Б) 11; Г) 4.

**24. Найдите наименьший положительный вычет числа 624 по модулю 25.**
А) 1; В) –1;
Б) 49; Г) 24.

**25. Какие из чисел образуют полную систему вычетов по модулю 6?**
А) –40, –45, 31, 26, –48, –34;
Б)–40, –45, 31, –48, 25, 11;
В) –40, –45, 31, –48, 10, 11;
Г) 6, $6^2$, $6^3$, 6, $6^5$, $6^6$.

**26. Какие из чисел образуют приведенную систему вычетов по модулю 12?**
А) 12, $12^5$, $12^7$, $12^{11}$;
Б) 121, 12, 17;
В) 121, 17, 11;
Г) 11, –11, 5, –5.

**27. Приведенная система наименьших по абсолютной величине вычетов по модулю 15 состоит из чисел:**
А) 1, 2, ; 7, 8, 10, 11, 13, 14;
Б) 1, –1, 2, –2, 4, –4, 7, –7;
В) 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14;
Г) 14, –14, 13, –13, 11, –11, 8, –8.

**28. Приведенная система вычетов по модулю 60 содержит:**
А) 60 чисел; В) 30 чисел;

Б) 59 чисел; Г) 16 чисел.

**29. Найдите остаток при делении $23^{247}$ на 7.**

А) 1; В) 2;

Б) 3; Г) 5.

**30. Найдите остаток при делении $7^{200}$ на 101.**

А) 100; В) 0;

Б) 2; Г) 1.

**31. Сколько существует натуральных чисел взаимно простых с числом 500 и меньших его?**

А) 200; В) 150;

Б) 100; Г) нет правильного ответа.

**32. Найдите сумму двух последних цифр числа $11^{203}$.**

А) 1; В) 3;

Б) 2; Г) 4.

**33. Решите сравнение $x^4 - x^2 + 3x - 1 \equiv 0 \pmod 4$.**

А) $x \equiv 1 \pmod 4$; В) $x \equiv 2 \pmod 4$;

Б) $x \equiv 3 \pmod 4$; Г) сравнение не имеет решений.

**34. Решите сравнение $x^3 - 7x + 3 \equiv 0 \pmod 5$.**

А) $x \equiv 0 \pmod 5$; В) $x \equiv 2 \pmod 5$;

Б) $x \equiv -2 \pmod 5$; Г) сравнение не имеет решений.

**35. Решите сравнение $10x^{42} - 5x^{30} + 10x^{18} + 9x^{12} + x + 4 \equiv 0 \pmod 7$.**

А) Сравнение не имеет решений;

Б) $x \equiv 0 \pmod 7$;

В) $x \equiv \pm 1, \pm 2, \pm 3 \pmod 7$;

Г) нет правильного ответа.

**36. Сколько решений в классах вычетов по модулю 7 имеет сравнение $x^6 \equiv 1 \pmod 7$?**

А) 1; В) 4;

Б) 2; Г) 6.

**37. Сколько решений в классах вычетов по модулю p имеет сравнение $x^{p-1} \equiv 0 \pmod p$, где $p$ — простое число?**

А) 1; В) $p - 1$;

Б) 2; Г) $p$.

**38. Сколько решений в классах вычетов по модулю 20 имеет сравнение $x^{\varphi(20)} \equiv 1 \pmod{20}$?**

А) 20;
В) 1;
Б) 19;
Г) 8.

**39. Сколько решений в классах вычетов по модулю $m$ имеет сравнение $x^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$?**

А) $m$;
В) $\varphi(m)$;
Б) $m-1$;
Г) $\varphi(m)-1$.

**40. Решите сравнение $4x \equiv 3 \pmod 7$.**

А) $x \equiv 1 \pmod 7$;
В) $x \equiv 5 \pmod 7$;
Б) $x \equiv 4 \pmod 7$;
Г) $x \equiv 6 \pmod 7$.

**41.Сколько решений в классах вычетов по модулю 404 имеет сравнение $88x \equiv 324 \pmod{404}$?**

А) 1;
В) $\varphi(404)$;
Б) 4;
Г) сравнение не имеет решений.

**42. Найдите порядок числа 2 по модулю 7.**

А) 1;
В) 3;
Б) 2;
Г) 6.

**43. Какие из чисел 1, 2, 3, 6 являются первообразными корнями по модулю 7?**

А) 1;
В) 3;
Б) 2;
Г) 6.

**44. Сколько первообразных корней существует по модулю 7?**

А) 1;
В) 3;
Б) 2;
Г) 6.

**45. По каким из модулей 2, 8, 10, 13, 15, 16, 18, 49 существуют первообразные корни?**

А) 2, 13, 49;
В) 10, 13, 15;
Б) 2, 8, 13, 16;
Г) 2, 10, 13, 18, 49.

**46. Определите длину периода при обращении дроби $\frac{17}{60}$ в десятичную.**

А) 17;
В) 1;
Б) 2;
Г) нет правильного ответа.

**47. Определите длину предпериода при обращении дроби $\frac{17}{60}$ в десятичную.**

А) 17; В) 1;
Б) 2; Г) нет правильного ответа.

**48. Найдите остаток при делении числа 123456789987654321 на 11.**

А) 10; В) 0;
Б) 1; Г) нет правильного ответа.

**49. Порядок числа $m-1$ по модулю $m$, где $m \in N, m > 3$, равен:**

А) 2; В) $m$;
Б) 1; Г) $m-1$.

**50. Учитывая, что 3 является первообразным корнем по модулю 7, найдите индекс числа 6 по модулю 7 при основании 3.**

А) 2; В) 4;
Б) 3; Г) 5.

## Тема 8. Векторные и евклидовы пространства, линейные операторы

**1. Подпространством арифметического векторного пространства $\mathbf{R}^4$ является множество всех векторов, сумма координат которых равна:**

А) –1; В) 0;
Б) 1; Г) 2.

**2. Пусть $V$ — множество всех направленных отрезков, отложенных от начала координат. Укажите истинные утверждения.**

А) Линейная оболочка всякого ненулевого вектора первого координатного угла есть все векторы этого угла, включая векторы на осях.

Б) Линейная оболочка двух различных ненулевых векторов из первого координатного угла есть множество всех векторов первого и третьего координатных углов.

В) Линейная оболочка всякого ненулевого вектора из первого координатного угла есть все векторы верхней полуплоскости.

Г) Линейная оболочка ненулевого вектора есть множество всех векторов прямой, проходящей через начало координат и имеющей направляющим вектором данный вектор.

**3. Система векторов векторного пространства является его базисом, если:**

А) ее линейная оболочка совпадает со всем пространством.

Б) данная система линейно независимая и ее линейная оболочка совпадает со всем пространством;

В) данная система линейно независима;

Г) всякий вектор пространства хотя бы одним образом выражается через эту систему.

**4. Для любых подпространств $L_1$ и $L_2$ векторного пространства $V$ истинно равенство:**

А) $\dim(L_1 \cap L_2) = \dim L_1 + \dim L_2$;

Б) $\dim(L_1 \cap L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 + \dim(L_1 + L_2)$;

В) $\dim(L_1 \cap L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 + L_2)$;

Г) $\dim(L_1 \cap L_2) = \dim(L_1 + L_2) - (\dim L_1 + \dim L_2)$.

**5. В пятимерном векторном пространстве два подпространства размерностей 2 и 3 имеют пересечение размерности $m$. Верно, что:**

А) в любом случае $m \neq 0$;

Б) в любом случае $m = 1$;

В) в любом случае $m = 2$;

Г) $(m = 0) \vee (m = 1) \vee (m = 2)$.

**6. Пусть $a(a_1, a_2)$, $b(b_1, b_2)$ — произвольные векторы арифметического векторного пространства $\mathbf{R}^2$, заданные своими координатами в некотором базисе. Это пространство будет евклидовым, если скалярное произведение определено следующим образом:**

А) $ab = a_1b_1 - a_2b_2$;

Б) $ab = (a_1 + a_2)(b_1 + b_2)$;

В) $ab = a_1 + a_2 + b_1 + b_2$;

Г) $ab = a_1b_1 + a_2b_2$.

**7. Пусть $a(a_1, a_2)$, $b(b_1, b_2)$ — произвольные векторы арифметического векторного пространства $\mathbf{R}^2$, заданные своими координатами в некотором базисе. Это пространство будет евклидовым, если скалярное произведение определено следующим образом:**

А) $ab = a_1a_2 - b_1b_2$;

Б) $ab = a_1b_1 + a_2b_2$;

В) $ab = 2a_1a_2 + b_1b_2$;

Г) $ab = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$.

**8. В двумерном векторном пространстве с базисом e$(e_1, e_2)$ отображение $f$ вектору $a(a_1, a_2)$ ставит в соответствие вектор $b$. Отображение $f$ является линейным оператором, если координаты вектора $b$ равны:**

А) $(2a_1; 3a_2)$; В) $(a_1+2; a_2)$;

Б) $(a_1; a_2+3)$; Г) $(a_1+2; 3a_2)$.

**9. Множество $M$ матриц с операциями сложения матриц и умножения матрицы на действительное число образует векторное пространство, если:**

А) $M = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \middle| a,b \in R \right\}$; В) $M = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \middle| a,b \in R \right\}$;

Б) $M = \left\{ \begin{bmatrix} 2a & 0 \\ a & b \end{bmatrix} \middle| a,b \in R \right\}$; Г) $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \middle| a,b \in R \right\}$.

**10. Следующее множество матриц с операциями сложения и умножения матриц на элемент из R образует векторное пространство:**

А) $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} \middle| a \in R \right\}$; В) $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & b \end{bmatrix} \middle| b \in R \right\}$;

Б) $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & 2 \end{bmatrix} \middle| a \in R \right\}$; Г) $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix} \middle| a,b \in R \right\}$.

**11. Следующее множество матриц с операциями сложения и умножения матриц на элемент из R образует векторное пространство:**

А) $\left\{ \begin{bmatrix} 2a & 3b \\ b & 0 \end{bmatrix} \middle| a,b \in R \right\}$; В) $\left\{ \begin{bmatrix} 2a & 3b \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \middle| a,b \in R \right\}$;

Б) $\left\{ \begin{bmatrix} 3a & 2b \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \middle| a,b \in R \right\}$; Г) $\left\{ \begin{bmatrix} 3a & 2b \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \middle| a,b \in R \right\}$.

**12. Следующее множество матриц с операциями сложения и умножения матриц на элемент из R образует векторное пространство:**

А) $\left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 2a & 2 \end{bmatrix} \middle| a \in R \right\}$; В) $\left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 2a & 0 \end{bmatrix} \middle| a \in R \right\}$;

Б) $\left\{ \begin{bmatrix} 3a & 0 \\ a & 3 \end{bmatrix} \middle| a \in R \right\}$; Г) $\left\{ \begin{bmatrix} a & 1 \\ 2a & 0 \end{bmatrix} \middle| a \in R \right\}$.

**13. Следующее множество матриц с операциями сложения и умножения матриц на элемент из R образует векторное пространство:**

А) $\left\{\begin{bmatrix}0 & 2a\\ 0 & b+2\end{bmatrix} \middle| a,b \in R\right\}$;    В) $\left\{\begin{bmatrix}0 & a+1\\ 0 & 2b\end{bmatrix} \middle| a,b \in R\right\}$;

Б) $\left\{\begin{bmatrix}0 & 2a\\ 0 & b\end{bmatrix} \middle| a,b \in R\right\}$;    Г) $\left\{\begin{bmatrix}0 & 2a+1\\ 0 & b\end{bmatrix} \middle| a,b \in R\right\}$.

**14. Векторы $a_1(m;\ 1;\ 0)$, $a_2(2;\ m;\ 1)$, $a_3(1;\ 0;\ 1)$ в пространстве $\mathbf{R}^3$ линейно зависимы, если:**

А) $m = \pm 2$;    В) $m = 0$;

Б) $m = \pm 3$;    Г) $m = \pm 1$.

**15. Векторы $a_1(m;\ 2;\ 0)$, $a_2(1;\ 1;\ 0)$, $a_3(-1;\ 1;\ m)$ в пространстве $\mathbf{R}^3$ линейно зависимы, если:**

А) $m = 0$ или $m = 2$;    В) $m = \pm 2$;

Б) $m = 1$;    Г) $m = -1$.

**16. Векторы $a_1(1;\ 0;\ m)$, $a_2(2;\ m;\ 1)$, $a_3(m;\ 0;\ 1)$ в пространстве $\mathbf{R}^3$ линейно зависимы, если:**

А) $m = \pm 2$;    В) $m = 2$ или $m = \pm 1$;

Б) $m = 0$ или $m = \pm 1$;    Г) $m = 0$.

**17. Векторы $a_1(2;\ 1;\ k)$, $a_2(1;\ 0;\ k)$, $a_3(-1;\ 0;\ 2)$ в пространстве $\mathbf{R}^3$ линейно зависимы, если:**

А) $k = 1$;    В) $k = -2$;

Б) $k = -1$;    Г) $k = 2$.

**18. Векторы $a_1(-1;\ 2k;\ 3)$, $a_2(0;\ 3k;\ -k)$, $a_3(1;\ k;\ -4)$ в пространстве $\mathbf{R}^3$ линейно зависимы, если:**

А) $k = \pm 1$;    В) $k = \pm 3$;

Б) $k = 0$ или $k = 1$;    Г) $k = 1$ или $k = 3$.

**19. Вектор $b(-1;\ 4;\ 5)$ пространства $\mathbf{R}^3$ в базисе, состоящем из векторов $a_1(1;\ 0;\ 1)$,**
$a_2(-2;\ 1;\ 0)$, $a_3(0;\ -1;\ 2)$ имеет координаты:

А) $(1;\ 1;\ -3)$;    В) $(-3;\ 1;\ 0)$;

Б) $(-1;\ -1;\ 1)$;    Г) $(-1;\ 0;\ 1)$.

**20. Вектор $b(4;\ -1;\ 3)$ пространства $\mathbf{R}^3$ в базисе, состоящем из векторов $a_1(1;\ 0;\ 1)$, $a_2(0;\ 2;\ 1)$, $a_3(-2;\ 3;\ 0)$ имеет координаты:**

А) $(0;\ 1;\ -2)$;    В) $(2;\ 1;\ -1)$;

Б) $(4;\ 0;\ 0)$;    Г) $(6;\ -1;\ 1)$.

**21. Вектор $c(2; -1; 2)$ пространства $R^3$ в базисе, состоящем из векторов $a_1(1; 2; 0)$, $a_2(0; 1; 3)$, $a_3(3; 0; -1)$ имеет координаты:**

А) (2; 0; 1); В) (–1; 0; 1);
Б) (–1; 1; 1); Г) (–2; 1; 1).

**22. Вектор $c(-2; 5; 8)$ пространства $R^3$ в базисе, состоящем из векторов $a_1(-2; 3; 4)$, $a_2(1; 0; 1)$, $a_3(2; -1; 0)$ имеет координаты:**

А) (1; 0; 2); В) (0; –2; 1);
Б) (1; –1; 0); Г) (2; 0; 1).

**23. Вектор $d(1; 4; 4)$ пространства $R^3$ в базисе, состоящем из векторов $a_1(1; -1; 1)$, $a_2(0; 2; 1)$, $a_3(1; 0; 3)$ имеет координаты:**

А) (1; 3; 0); В) (2; 0; –1);
Б) (0; 1; 1); Г) (0; 2; 1).

**24. Размерность линейной оболочки системы векторов $a_1(1; 1; 1; 2)$, $a_2(2; 0; 1; 1)$, $a_3(0; 2; 1; 3)$, $a_4(1; -1; 0; -1)$ равна:**

А) 4; В) 2;
Б) 3; Г) 1.

**25. Размерность линейной оболочки системы векторов $a_1(1; 3; 0; -1)$, $a_2(0; -1; 1; 1)$, $a_3(1; 2; 1; 1)$, $a_4(1; 4; -1; -2)$ равна:**

А) 1; В) 2;
Б) 3; Г) 4.

**26. Размерность линейной оболочки системы векторов $b_1(-1; 1; 1; 1)$, $b_2(1; 1; -1; 1)$, $b_3(0; 2; 0; 2)$, $b_4(-2; 0; 2; 0)$ равна:**

А) 2; В) 3;
Б) 1; Г) 4.

**27. Размерность линейной оболочки системы векторов $b_1(2; 0; -1; 2)$, $b_2(1; 1; -1; 1)$, $b_3(1; -1; 0; 1)$, $b_4(0; 2; -1; 0)$ равна:**

А) 1; В) 3;
Б) 2; Г) 4.

**28. Размерность линейной оболочки системы векторов $c_1(1; 0; 1; -1)$, $c_2(0; 2; 0; 1)$, $c_3(-1; 2; -1; 1)$, $c_4(1; -1; 0; -1)$ равна:**

А) 1; В) 3;
Б) 2; Г) 4.

**29. В пространстве многочленов степени не выше 3 система многочленов $x - 1$, $x$, $x^2 - 2$, $2x^3$ образует базис. Координаты многочлена $f(x) = -1 + 4x - x^2 + 4x^3$ в этом базисе:**

А) (1; 2; –6; 4); В) (1; 2; 2; 2);
Б) (3; 1; –1; 2); Г) (–1; 2; 6; 4).

**30. В пространстве многочленов степени не выше 3 система многочленов $1 - x, x, x^2, x^3 - x$ образует базис. Координаты многочлена $f(x) = 2 - 3x - x^2 + 3x^3$ в этом базисе:**
А) (2; 2; –1; 3); В) (1; –1; 1; –1);
Б) (2; –3; –1; 3); Г) (2; –1; 0; 3).

**31. В пространстве многочленов степени не выше 3 система многочленов $x^2+1$, $x-1$, $x^3$, $x^3-x^2$ образует базис. Координаты многочлена $f(x) = 1 + x - x^2 + 2x^3$ в этом базисе:**
А) (1; 1; –1; 2); В) (2; 1; –1; 3);
Б) (1; –1; 2; 3); Г) (–2; 1; 1; –3).

**32. В пространстве многочленов степени не выше 3 система многочленов $3 - x$, $x^2 + 2$, $x^2 - x$, $x^3 + 1$ образует базис. Координаты многочлена $f(x) = -3x + x^2 - x^3$ в этом базисе:**
А) (1; –1; 1; –1); В) (0; –3; 1; 1);
Б) (–3; 1; –1; 0); Г) (1; –1; 2; –1).

**33. В пространстве многочленов степени не выше 3 система многочленов $2 - x$, $x^2 + x$, $2x^3 - x$, $x^3 + x^2$ образует базис. Координаты многочлена $f(x) = 4 - 3x - 3x^2 - x^3$ в этом базисе:**
А) (4; –3; –3; –1); В) (2; 1; 0; –3);
Б) (2; 0; 1; –3); Г) (0; –3; –3; 2).

**34. Найдите размерность суммы и размерность пересечения подпространств $L_1 = L(a_1; a_2; a_3)$, $L_2 = L(b_1; b_2)$, если $a_1(1; 2; 0; 1)$, $a_2(1; 1; 1; 0)$, $a_3(0; 1; -1; 1)$, $b_1(1; 0; 1; 0)$, $b_2(1; 3; 0; 1)$:**
А) $\dim(L_1 + L_2) = 4$, $\dim(L_1 \cap L_2) = 1$;
Б) $\dim(L_1 + L_2) = 5$, $\dim(L_1 \cap L_2) = 0$;
В) $\dim(L_1 + L_2) = 3$, $\dim(L_1 \cap L_2) = 2$;
Г) $\dim(L_1 + L_2) = 3$, $\dim(L_1 \cap L_2) = 1$.

**35. Найти размерность суммы и размерность пересечения подпространств $L_1 = L(a_1; a_2; a_3)$, $L_2 = L(b_1; b_2)$, если $a_1(1; 1; 1; 1)$, $a_2(1; 0; 3; -1)$, $a_3(1; 2; -1; 3)$, $b_1(1; 2; 0; 2)$, $b_2(1; 0; -1; 0)$:**
А) $\dim(L_1 + L_2) = 4$, $\dim(L_1 \cap L_2) = 0$;
Б) $\dim(L_1 + L_2) = 5$, $\dim(L_1 \cap L_2) = 0$;
В) $\dim(L_1 + L_2) = 3$, $\dim(L_1 \cap L_2) = 1$;
Г) $\dim(L_1 + L_2) = 4$, $\dim(L_1 \cap L_2) = 1$.

**36. Найти размерность суммы и размерность пересечения подпространств $L_1 = L(a_1; a_2; a_3)$, $L_2 = L(b_1; b_2)$, если $a_1(1; 1; -1; 1)$, $a_2(1; -1; 1; -1)$, $a_3(3; 1; -1; 1)$, $b_1(0; -1; 1; -1)$, $b_2(1; 0; -1; 1)$:**

А) $\dim(L_1 + L_2) = 3$, $\dim(L_1 \cap L_2) = 1$;
Б) $\dim(L_1 + L_2) = 4$, $\dim(L_1 \cap L_2) = 1$;
В) $\dim(L_1 + L_2) = 3$, $\dim(L_1 \cap L_2) = 2$;
Г) $\dim(L_1 + L_2) = 2$, $\dim(L_1 \cap L_2) = 2$.

**37. Найти размерность суммы и размерность пересечение подпространств $L_1 = L(a_1; a_2)$, $L_2 = L(b_1; b_2; b_3)$, если $a_1(1; 1; -2; 1)$, $a_2(2; 0; 1; -1)$, $b_1(0; 2; -3; 3)$, $b_2(3; 1; -1; 0)$, $b_3(1; -1; 3; -2)$:**

А) $\dim(L_1 + L_2) = 3$, $\dim(L_1 \cap L_2) = 1$;
Б) $\dim(L_1 + L_2) = 4$, $\dim(L_1 \cap L_2) = 0$;
В) $\dim(L_1 + L_2) = 2$, $\dim(L_1 \cap L_2) = 2$;
Г) $\dim(L_1 + L_2) = 3$, $\dim(L_1 \cap L_2) = 2$.

**38. Найти размерность суммы и размерность пересечение подпространств $L_1 = L(a_1; a_2)$, $L_2 = L(b_1; b_2; b_3)$, если $a_1(3; -1; 0; 1)$, $a_2(-1; 0; 1; 2)$, $b_1(2; -1; 1; 3)$, $b_2(4; -1; -1; -1)$, $b_3(1; 1; -1; 0)$:**

А) $\dim(L_1 + L_2) = 4$, $\dim(L_1 \cap L_2) = 1$;
Б) $\dim(L_1 + L_2) = 3$, $\dim(L_1 \cap L_2) = 1$;
В) $\dim(L_1 + L_2) = 3$, $\dim(L_1 \cap L_2) = 2$;
Г) $\dim(L_1 + L_2) = 2$, $\dim(L_1 \cap L_2) = 2$.

**39. Укажите преобразование φ трехмерного пространства, являющееся линейным оператором:**

А) $\varphi(x_1; x_2; x_3) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2, x_3 + 2)$;
Б) $\varphi(x_1; x_2; x_3) = (x_1^2, x_2, 2x_3)$;
В) $\varphi(x_1; x_2; x_3) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2, 3x_3)$;
Г) $\varphi(x_1; x_2; x_3) = (x_1, x_2 + 1, x_3 + 2)$.

**40. Укажите преобразование φ трехмерного пространства, являющееся линейным оператором:**

А) $\varphi(x_1; x_2; x_3) = (0, x_2, x_3^2)$;
Б) $\varphi(x_1; x_2; x_3) = (x_1, 2x_2, 3x_3)$;
В) $\varphi(x_1; x_2; x_3) = (2x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_1^2)$;
Г) $\varphi(x_1; x_2; x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_2, x_3^3)$.

**41. Укажите преобразование φ трехмерного пространства, являющееся линейным оператором:**

А) $\varphi(x_1; x_2; x_3) = (x_1 - x_2 + x_3, x_2, x_3)$;
Б) $\varphi(x_1; x_2; x_3) = (2x_1 + x_2, 0, x_3 + 1)$;
В) $\varphi(x_1; x_2; x_3) = (x_1 + 1, 0, x_3 + x_2)$;

Г) $\varphi(x_1; x_2; x_3) = (x_1; x_2^2, 3x_3)$.

**42. Укажите преобразование φ трехмерного пространства, являющееся линейным оператором:**

А) $\varphi(x_1; x_2; x_3) = (x_1; x_2 + x_3, x_3 + x_2 + 1)$;
Б) $\varphi(x_1; x_2; x_3) = (x_1; x_2 + 2, 2x_3)$;
В) $\varphi(x_1; x_2; x_3) = (x_1 - x_2, x_2 + x_3, 2x_3)$;
Г) $\varphi(x_1; x_2; x_3) = (2x_1; x_2^3, x_1 + x_2 + x_3)$.

**43. Укажите преобразование φ трехмерного пространства, являющееся линейным оператором:**

А) $\varphi(x_1; x_2; x_3) = (x_1^2; 2x_2; 0)$;
Б) $\varphi(x_1; x_2; x_3) = (x_1 + x_2 + x_3; 0, x_1^2 + x_3)$;
В) $\varphi(x_1; x_2; x_3) = (x_1 + x_2, x_2^2, 0)$;
Г) $\varphi(x_1; x_2; x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, 0; x_2 - x_3)$.

**44. Пусть $a = e_1 + 2e_2 + e_3 + 2e_4$ и $b = 3e_1 + e_2 - e_3 + 2e_4$, базис e ортонормированный. Скалярное произведение $ab$ равно:**

А) 8; В) 0;
Б) 6; Г) –8.

**45. Пусть $a = -e_1 + 2e_2 + e_3 - e_4$ и $b = -2e_1 + e_2 + 3e_3 + e_4$, базис e ортонормированный. Скалярное произведение $ab$ равно:**

А) 1; В) 6;
Б) 5; Г) –1.

**46. Пусть $a = e_1 + e_2 - 3e_4$ и $b = e_1 - 5e_2 + 7e_3 - 2e_4$, базис e ортонормированный. Скалярное произведение $ab$ равно:**

А) 17; В) 10;
Б) 2; Г) –10.

**47. В евклидовом пространстве $\mathbf{R}^4$ угол между векторами $a(1; 2; 1; -1)$, $b(-2; 1; 1; 1)$ равен:**

А) π; В) π/2;
Б) π/3; Г) π/4.

**48. В евклидовом пространстве $\mathbf{R}^4$ угол между векторами $a(1; 1; 1; 1)$, $b(1; 1; 3; -5)$ равен:**

А) π/4; В) π/6;
Б) π; Г) π/2.

**49.** **В двумерном евклидовом пространстве дан базис е = ($e_1$, $e_2$) и линейный оператор φ поворота на угол $\pi/4$ против часовой стрелки. Матрица $A$ линейного оператора φ в базисе е имеет вид:**

А) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;

Б) $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$;

В) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$;

Г) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

**50.** **В двумерном евклидовом пространстве дан базис е = ($e_1$, $e_2$) и линейный оператор φ поворота на угол $2\pi/3$ против часовой стрелки. Матрица $A$ линейного оператора φ в базисе е имеет вид:**

А) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$;

Б) $\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$;

В) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;

Г) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

**51.** **В двумерном евклидовом пространстве дан базис е = ($e_1$, $e_2$) и линейный оператор φ, который вектор $e_1$ поворачивает на угол $\pi/2$ по часовой стрелке, а вектор $e_2$ растягивает вдвое. Матрица $A$ линейного оператора φ в базисе е имеет вид:**

А) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$;

Б) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}$;

В) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$;

Г) $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$,

**52.** **В двумерном евклидовом пространстве дан базис е = ($e_1$, $e_2$) и линейный оператор φ, который вектор $e_1$ поворачивает на угол $\pi$, а вектор $e_2$ поворачивает на угол $\pi/3$ по часовой стрелке. Матрица $A$ линейного оператора φ в базисе е имеет вид:**

А) $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$;

В) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$;

Б) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$;

Г) $\begin{bmatrix} -1 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

**53. В двумерном евклидовом пространстве дан базис е = ($e_1$, $e_2$) и линейный оператор φ, который вектор $e_1$ поворачивает на угол $\pi$, а вектор $e_2$ поворачивает на угол $\pi/6$ против часовой стрелки. Матрица $A$ линейного оператора φ в базисе е имеет вид:**

А) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;

В) $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$;

Б) $\begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$;

Г) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

**54. Если в пространстве $\mathbf{R}^2$ линейный оператор φ в некотором базисе задан матрицей $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, то собственные значения линейного оператора равны:**

А) $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$;
В) $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$;
Б) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$;
Г) $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$.

**55. Если в пространстве $\mathbf{R}^2$ линейный оператор φ в некотором базисе задан матрицей $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$, то собственные значения линейного оператора равны:**

А) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$;
В) $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5$;
Б) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 5$;
Г) $\lambda_1 = \lambda_2 = 5$.

**56. Если в пространстве $\mathbf{R}^2$ линейный оператор φ в некотором базисе задан матрицей $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$, то собственные значения линейного оператора равны:**

А) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$;
В) $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -3$;
Б) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3$;
Г) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$.

**57. Матрица $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$ приводится к диагональной матрице:**

А) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$;

В) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$;

Б) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$;

Г) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

**58. Матрица** $\begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ **приводится к диагональной матрице:**

А) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$;

В) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$;

Б) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$;

Г) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$.

## СОДЕРЖАНИЕ


Тема 1. Логика и множества (основные понятия) ........ 3

Тема 2. Матрицы, определители, числа, векторные пространства (основные понятия) ........ 7

Тема 3. Основные факты ........ 12

Тема 4. Логика. Множества. Основные алгебраические структуры ........ 20

Тема 5. Системы линейных уравнений и арифметические векторы ........ 28

Тема 6. Матрицы и определители ........ 36

Тема 7. Теория чисел ........ 44

Тема 8. Векторные и евклидовы пространства, линейные операторы ........ 50

Учебное издание

# КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО КУРСУ «АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ»

Для студентов
физико-математического факультета

**Борбат** Владимир Николаевич
**Сакович** Наталья Владимировна
**Чеботаревский** Андрей Борисович
**Чеботаревский** Борис Дмитриевич



Технический редактор *А.Н. Гладун*
Компьютерная верстка *А.Л. Позняков*

Подписано в печать 28.08.2006.
Формат 60x84/16. Гарнитура Times New Roman Cyr.
Усл.-печ. л. 2,0. Уч.-изд. л. 1,5. Тираж 145 экз. Заказ № 330.

Учреждение образования "Могилевский государственный университет им. А.А. Кулешова", 212022, Могилев, Космонавтов, 1
ЛИ № 02330/278 от 30.04.2004 г.

Отпечатано на ризографе отдела оперативной полиграфии МГУ им. А.А. Кулешова. 212022, Могилев, Космонавтов, 1.